UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

III SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

Rosario, 11 al 15 de octubre - 1988

17

Rosario - República Argentina
-1989-

EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES Y PROBLEMAS RELACIONADOS

Domingo Alberto TARZIA

ABSTRACT : We study some mixed elliptic differential problems with phase-change, i.e. with solutions of non-constant sign as functions of the Dirichlet and Neumann data.

KEY WORDS : Stefan problem, free boundary problems, phase-change problems, variational inequalities, Mixed elliptic problem.

Se considera un material conductor del calor que ocupa Ω, un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$ para las aplicaciones), con una frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ suficientemente regular con med $(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$, $|\Gamma_2| > 0$ y $|\Gamma_3| \geq 0$. Sin pérdida de generalidad, se supone que la temperatura de cambio de fase es 0°C. Sobre la porción de frontera Γ_1 se tiene una temperatura constante $b > 0$ y sobre Γ_2 se impone un flujo de calor constante (saliente) $q > 0$; se supone también que la porción de frontera Γ_3 (cuando existe) es una pared impermeable al calor, es decir que el flujo de calor sobre Γ_3 es nulo. Si se considera en Ω un problema estacionario de conducción de calor, sin fuentes de calor en su interior, desde un punto de vista físico, se tienen las siguientes conclusiones :

i) Si q es pequeño entonces la temperatura en Ω resultará positiva y por ende no existirá un cambio de fase del material. En este caso, el problema resultará ser sólo de conducción para la fase líquida.

ii) Si q es grande entonces la temperatura en Ω asumirá valores positivos y negativos, y por ende existirá un cambio de fase del material.

En esta charla se encontrará para q una condición suficiente (y/o necesaria) para que exista en Ω un cambio de fase, es decir se demostrará que existe $q_0 > 0$ de manera que $\forall\ q > q_0$ se tenga en Ω un problema estacionario de Stefan a dos fases (la solución tiene signo no-constante).

Análogamente, si se reemplaza la condición de temperatura dada sobre Γ_1 por una condición de tipo Neumann con un coeficiente de transferencia de calor $\alpha > 0$, entonces se hallarán para q, α condiciones suficientes (y/o necesarias) para que la solución tenga signo no-constante.

Siguiendo [Du, Ta1] se estudia la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida para $x \in \Omega$. El conjunto Ω puede expresarse en la forma

(1) $$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$$

donde

(2) $$\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega \ / \ \theta(x) < 0 \right\}, \quad \Omega_2 = \left\{ x \in \Omega \ / \ \theta(x) > 0 \right\}$$
$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \Omega \ / \ \theta(x) = 0 \right\},$$

representan respectivamente la fase sólida, la fase líquida y la frontera libre que las separa. La temperatura θ puede representarse en Ω de la siguiente manera :

(3) $$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & , x \in \Omega_1 , \\ 0 & , x \in \mathcal{L} , \\ \theta_2(x) > 0 & , x \in \Omega_2 , \end{cases}$$

y satisface las siguientes condiciones :

(4) $$\begin{array}{l} \text{(i)} \quad -k_i\, \Delta\theta_i = g \quad \text{en } \Omega_i \ (i = 1, 2) , \\ \text{(ii)} \quad \theta_1 = \theta_2 = 0 \ , \ k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n} \quad \text{sobre } \mathcal{L} \\ \text{(iii)} \quad \theta_2 \ / \ \Gamma_1 = b \ , \qquad \text{(v)} \quad \dfrac{\partial\theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \ , \\ \text{(iv)} \quad \begin{cases} -k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q & \text{si } \theta \,|_{\Gamma_2} > 0 \ , \\ -k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q & \text{si } \theta \,|_{\Gamma_2} < 0 \ , \end{cases} \end{array}$$

donde $k_i > 0$ $(i = 1, 2)$ es la conductividad térmica de la fasse i (i = 2 : líquida, i=1 : sólida), $b = b(x)$ es la temperatura dada sobre Γ_1 , $q = q(x)$ es el flujo de calor dado sobre Γ_2 y $g = g(x)$ es un aporte de energía dado en Ω.

Observación 1. El calor latente de fusión no interviene en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases debido al hecho de que la frontera que separa las dos fases sólida y líquida es invariante en el transcurso del tiempo.

Observación 2. Si la temperatura b toma valores positivos y negativos sobre Γ_1 entonces se tiene realmente un problema estacionario a dos fases. En cambio, si b asume valores de signo constante (por ejemplo, positivo) sobre Γ_1 dicho hecho no ésta, en general, garantizado; ésto motiva el presente cursillo.

A continuación se transformará el problema (4) a través de un cambio de función incógnita, con el objeto de eliminar la frontera libre $\mathcal{L}$, escribir las ecuaciones en el sentido de las distribuciones en Ω y hallar la correspondiente formulación variacional. Sean

$$T_2 = \theta^+ \ , \ T_1 = -\theta^- \quad \text{en } \Omega \ ,$$

(5)

$$u = k_2\, T_2 + k_1\, T_1 = k_2\, \theta^+ - k_1\, \theta^- \quad \text{en } \Omega$$

donde θ^+ y θ^- representan la parte positiva y negativa de la función θ.

LEMA 1. (i) Se tienen las siguientes propiedades :

(6) $$\langle -k_2\, \Delta T_2, \phi\rangle = \int_{\Omega_2} g\, \phi\, dx - k_2 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_2}{\partial n}\, \phi\, d\Upsilon \quad , \quad \forall \phi \in D(\Omega) \ ,$$

(7) $$\langle -k_1\, \Delta T_1, \phi\rangle = \int_{\Omega_1} g\, \phi\, dx + k_1 \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial \theta_1}{\partial n}\, \phi\, d\Upsilon \quad , \quad \forall \phi \in D(\Omega) \ ,$$

donde $\langle \ , \ \rangle$ representa la dualidad $D'(\Omega) \times D(\Omega)$, n es el versor normal exterior a $\partial\Omega$ y a $\mathcal{L}$ (en la dirección de Ω_1 a Ω_2).

ii) La nueva función incógnita u satisface las siguientes relaciones :

(8)
$$-\Delta u = g \quad \text{en } D'(\Omega),$$
$$u \mid_{\Gamma_1} = B \ ,$$
$$-\frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = q \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Gamma_3} = 0 \quad ,$$

donde

(9) $$B = k_2\, b^+ - k_1\, b^- \quad \text{en } \Gamma_1 \ .$$

Demostración. $\forall \phi \in D(\Omega)$, se tiene :

$$\langle -k_2\, \Delta T_2, \phi\rangle = -k_2 \int_{\Omega} T_2\, \Delta\phi\, dx = -k_2 \int_{\Omega_2} \theta_2\, \Delta\phi\, dx =$$

$$= -k_2 \left\{ \int_{\Omega_2} \Delta\theta_2\, \phi\, dx + \int_{\partial(\Omega_2)} \left(\theta_2 \frac{\partial\phi}{\partial n} - \frac{\partial\theta_2}{\partial n}\, \phi \right) d\gamma \right\} =$$

$$= \int_{\Omega_2} g\, \phi\, dx - k_2 \int_{\mathcal{I}} \frac{\partial\theta_2}{\partial n}\, \phi\, d\gamma \quad ,$$

es decir (6).

Ejercicio 1. Completar el Lema 1, probando (7) y (8).

Observación 3. La transformación inversa a (5) está dada por

(10) $$\theta = \frac{1}{k_2}\, u^{+} - \frac{1}{k_1}\, u^{-} \quad \text{en } \Omega .$$

TEOREMA 2. (i) La formulación variacional del problema (8) está dada por :

(11) $$a(u,v-u) = L_q(v-u) \quad , \quad \forall v \in K \, , \quad u \in K \, ,$$

donde

$$V = H^1(\Omega) \quad , \quad V_0 = \left\{ v \in V \,/\, v\,|_{\Gamma_1} = 0 \right\} \quad , \quad H = L^2(\Omega) \, ,$$

(12) $$K = \left\{ v \in V \,/\, v\,|_{\Gamma_1} = B \right\} \quad , \quad (u,v) = \int_{\Omega} u\, v\, dx \, ,$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \,.\, \nabla v\, dx \quad , \quad L(v) = L_q(v) = (g,v) - \int_{\Gamma_2} q\, v\, d\gamma \quad .$$

(ii) Si $L_q \in V_0'$ y $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ entonces existe una única solución de la ecuación variacional (10).

(iii) La solución de la ecuación variacional (11) está caracterizada por el siguiente problema de mínimo

(13) $$J_q(u) \leq J_q(v) \quad , \quad \forall v \in K \, , \quad u \in K \quad ,$$

donde

(14) $$J_q(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - L_q(v) \quad , \quad v \in V \, .$$

Demostración (i) Si se multiplica la ecuación diferencial en (8) por $(v - u)$ con $v \in K$, se integra en el dominio Ω y se aplica la fórmula de Green siguiente

(15) $$-\int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma \,, \quad (u \in H^2(\Omega)\,,\ v \in H^1(\Omega)),$$

entonces se obtiene (11).

(ii) De $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ surge la existencia de

(16) $$B_0 \in V \ / \ B_0 \mid_{\Gamma_1} = B \,.$$

Entonces se tiene la equivalencia (11) $\Leftrightarrow$ (17), donde

(17) $$a(U,v) = F(v) \,, \quad \forall v \in V_0 \,, \quad U \in V_0 \,,$$

con

(18) $$U = u - B_0 \in V_0 \,, \qquad F(v) = L(v) - a(B_0,v) \,, \quad \forall v \in V_0 \,.$$

La existencia y unicidad de $U \in V_0$, solución de (17) (análogamente $u \in K$, solución de (11)) surge por aplicación del Teorema de Lax–Milgram [BaCa, KiSt, Ro, Ta3].

(iii) La caracterización del problema de mínimo (13) surge por ser la forma bilineal a simétrica.

Observación 4. La condición $L \in V_0'$ se verifica si se supone, por ejemplo, que se tiene :

(19) $$g \in L^2(\Omega) \,, \quad q \in L^2(\Gamma_2) \,.$$

Una variante, del problema definido en (4), consiste en reemplazar la condición (4iii) por la siguiente

(4iiibis) $$- k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \mid_{\Gamma_1} = \alpha \, (k_2 \theta_2 - B) \quad \text{si } \theta \mid_{\Gamma_1} > 0 \,, \qquad - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \mid_{\Gamma_1} = \alpha \, (k_1 \theta_1 - B) \quad \text{si } \theta \mid_{\Gamma_1} < 0 \,,$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro, conocido como coeficiente de transferencia de la pared Γ_1.

Ejercicio 2. (i) Si se realiza el cambio de función incógnita (5) en el problema (4bis) (dado por las condiciones (4i, ii, iiibis, iv)) entonces se obtiene :

$$(20) \qquad -\Delta u = g \ \text{ en } D'(\Omega) \,, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha\,(\,u - B\,) \,, \ -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \,, \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

(ii) La formulación variacional del problema (20) está dada por

$$(21) \qquad a_\alpha(u,v) = L_{\alpha qB}(v) \quad , \quad \forall v \in V \,, \qquad u \in V \,,$$

donde

$$(22) \qquad a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u\ v\ d\gamma \quad , \quad L_{\alpha qB}(v) = L_q(v) + \alpha \int_{\Gamma_1} B\ v\ d\gamma \quad .$$

(iii) Si $L_q \in V_0'$ y $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ entonces existe una única solución de la ecuación variacional (21).

(iv) La solución de la ecuación variacional (21) está caracterizada por el siguiente problema de mínimo

$$(23) \qquad G_{\alpha qB}(u) \le G_{\alpha qB}(v) \quad , \ \forall v \in V \,, \quad u \in V \quad ,$$

donde

$$(24) \qquad J_{\alpha qB}(v) = -\,\frac{1}{2}\, a_\alpha(v,v) - L_{\alpha qB}(v) \quad , \quad v \in V \,.$$

Ejercicio 3. La forma bilineal a_1 es coercivo sobre V, es decir

$$(25) \qquad \exists\, \lambda_1 > 0 \ \ / \ \ a_1(v,v) \ge \lambda_1 \,\|\, v \,\|_V^2 \quad , \quad \forall v \in V.$$

Más aún, también lo es la forma bilineal a_α debido al hecho

$$(26) \qquad a_\alpha(v,v) \ge \lambda_\alpha \,\|\, v \,\|_V^2 \quad , \quad \forall v \in V \,,$$

con

$$(27) \qquad \lambda_\alpha = \lambda_1\, \mathrm{Min}(1,\alpha) > 0 \quad .$$

TEOREMA 3. Si se suponen las hipótesis que garantizan la existencia y unicidad de las ecuaciones variacionales (11) y (21), cuyas soluciones se denotan por u y u_α respectivamente, entonces se tiene

(28) $$u_\alpha \to u \text{ en } V \text{ fuerte cuando } \alpha \to +\infty \; .$$

Demostración. Si se elige $v = u_\alpha - u \in V$ en (21), se suma a ambos miembros el término $-\,a(u,u_\alpha - u)$, se obtiene

(29) $$a_\alpha(\epsilon_\alpha,\epsilon_\alpha) = L_\alpha(\epsilon_\alpha) - a(u,\epsilon_\alpha)\ ,\quad \epsilon_\alpha = u_\alpha - u \in V \; .$$

Como α tenderá a $+\infty$, se puede suponer que $\alpha > 1$; entonces, por (25), se deduce

(30) $$\lambda_1 \| \epsilon_\alpha \|_V^2 + (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} \epsilon_\alpha^2 \, d\gamma \le a_\alpha(\epsilon_\alpha,\epsilon_\alpha) \le C_1 \| \epsilon_\alpha \|_V \; ,$$

donde $C_1 > 0$ es una constante independiente de α, y por ende

(31) $$\| \epsilon_\alpha \| \le C_2 \ ,\quad (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} \epsilon_\alpha^2 \, d\gamma \le C_3 \ ,$$

donde $C_2 = C_1/\lambda_1 > 0$ y $C_3 = C_1^2/\lambda_1 > 0$ son dos nuevas constantes independientes de α. De las estimaciones (31), se deduce que cuando $\alpha \to +\infty$, al menos por una subsucesión, se tiene

(32) $$u_\alpha \to \omega \text{ en } V \text{ débil},\ \omega \in V \; ,$$

(33) $$(\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha - B)^2 \, d\gamma \le C_3 \; .$$

Teniendo en cuenta (33) y el hecho de que la aplicación

(34) $$v \in V \to \int_{\Gamma_1} v^2 \, d\gamma \in \mathbb{R}$$

es semi-continua inferiormente en V débil, entonces se deduce

(35) $$0 \le \int_{\Gamma_1} (\omega - B)^2 \, d\gamma \le \liminf_{\alpha \to +\infty} \int_{\Gamma_1} (u_\alpha - B)^2 \, d\gamma = 0 \; ,$$

es decir $\omega\,|_{\Gamma_1} = B$, con lo cual $\omega \in K$. Si se toma $v \in V_0 \subset V$ en (21), se tiene

$$(36) \qquad a(u_\alpha, v) = L_q(v) \ , \quad \forall v \in V_0 \ , \quad u_\alpha \in V \ ,$$

y por ende con el pasaje al límite $\alpha \to +\infty$, se obtiene

$$(37) \qquad a(\omega, v) = L_q(v) \ , \quad \forall v \in V_0 \ , \quad \omega \in K \ ,$$

es decir $\omega = u \in K$, por la unicidad de la solución de la ecuación variacional (11) que resulta trivialmente equivalente a la (37). Por otra parte y para $\alpha > 1$, se tiene

$$(38) \qquad \lambda_1 \| u_\alpha - u \|_V^2 \le a_\alpha(u_\alpha - u, u_\alpha - u) = L_q(u_\alpha - u) - a(u, u_\alpha - u) \ ,$$

obteniéndose (28).

A continuación se verá el comportamiento de la temperatura θ_α cuando $\alpha \to +\infty$.

LEMA 4. Se tiene

$$(39) \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} \| \theta_\alpha - \theta \|_H = 0 \ .$$

Demostración. Teniendo en cuenta (28) (y por ende la convergencia será en H fuerte) y el hecho siguiente

$$(40) \qquad \begin{aligned} \| u_\alpha - u \|_H^2 &= \| (u_\alpha^+ - u^+) - (u_\alpha^- - u^-) \|_H^2 = \\ &= \| u_\alpha^+ - u^+ \|_H^2 + \| u_\alpha^- - u^- \|_H^2 - 2\,(u_\alpha^+ - u^+, u_\alpha^- - u) = \\ &= \| u_\alpha^+ - u^+ \|_H^2 + \| u_\alpha^- - u^- \|_H^2 + 2\,(u_\alpha^+ , u^-) + 2\,(u^+ , u_\alpha^-) \ge \\ &\ge \| u_\alpha^+ - u^+ \|_H^2 + \| u_\alpha^- - u^- \|_H^2 \end{aligned}$$

se deduce

$$(41) \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} \| u_\alpha^+ - u^+ \|_H + \lim_{\alpha \to +\infty} \| u_\alpha^- - u^- \|_H = 0 \ .$$

De la desigualdad

$$(42) \qquad \| \theta_\alpha - \theta \|_H \le \frac{1}{k_2} \| u_\alpha^+ - u^+ \|_H + \frac{1}{k_1} \| u_\alpha^- - u^- \|_H \ ,$$

surge (39).

De ahora en más se considerá el caso

(43) $\qquad g = 0 \quad \text{en } \Omega \, ,$

es decir

(44) $$L_q(v) = -\int_{\Gamma_2} q \, v \, d\gamma \quad ,$$

y se analizarán las condiciones necesarias y/o suficientes para que los correspondientes problemas elípticos mixtos (8) (con formulación variacional (11)) (ver parte (A)) [Ta4] y (20) (con formulación variacional (21)) (ver parte (B)) [TaTa] tengan solución con un signo no-constante, es decir que representen casos estacionarios de problemas de Stefan a dos fases. El caso $g \neq 0$ se analiza en la Conferencia de G.G. Garguichevich en el presente Seminario (CUADERNOS N. 17, p.29—44 y en el trabajo [GaTa] .

Parte (A) :

Sea $u = u_q = u_{qB}$ la única solución de la ecuación variacional (11), con $g = 0$ en Ω, para datos $B = \text{const.} > 0$ sobre Γ_1 y $q = \text{const.} > 0$ sobre Γ_2 .

LEMA 5. Se tiene la siguiente expresión :

(45) $$a(u_q^-, u_q^-) = q \int_{\Gamma_2} u_q^- \, d\gamma$$

Demostración. Basta elegir $v = u_q^+ \in K$ en (11) .

Observación 5. De (45) y del hecho que $u_q^- \in V_0$, se deduce la equivalencia :

(46) $\qquad u_q^- \not\equiv 0 \ \text{ en } \Omega \Leftrightarrow u_q^- \not\equiv 0 \ \text{ sobre } \Gamma_2$

de la cual se obtiene que, para un dado valor de q , habrá en Ω un cambio de fase (u_q ó θ_q toman valores positivos y negativos en Ω) si y solamente si la función u_q toma valores negativos sobre la frontera Γ_2 ; dicho de otra forma, la función u_q comenzará a asumir valores negativos sobre Γ_2 .

LEMA 6. Si $u_i \equiv u_{q_i}$ es la solución de (11) para q_i ($i = 1, 2$), entonces se tienen las siguientes igualdades :

(47) $$a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = (q_1 - q_2)\int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1)\, d\gamma \;,$$

(48) $$a(u_2, u_2) - a(u_1, u_1) = a(u_2 + u_1, u_2 - u_1) = (q_1 + q_2)\int_{\Gamma_2} (u_1 - u_2)\, d\gamma$$

Además, se tienen las siguientes propiedades :

i) Si $q_2 \leq q_1$ entonces

(49) $$\text{(a)}\ u_1 \leq u_2 \ \text{ en } \Omega \;, \qquad \text{(b)} \int_{\Gamma_2} u_1\, d\gamma \leq \int_{\Gamma_2} u_2\, d\gamma \;.$$

ii) Además, las funciones $q \to u_q$ y $q \to \int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma$ son monótonas estrictamente decrecientes, es decir :

(50) $$q_2 < q_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{(a)}\ u_1 \leq u_2 \,,\ u_1 \not\equiv u_2 \ \text{ en } \Omega \;, \\ \text{(b)} \int_{\Gamma_2} u_1\, d\gamma < \int_{\Gamma_2} u_2\, d\gamma \;. \end{cases}$$

Demostración. Si se toma $v = u_2 \in K$ en la ecuación variacional correspoondiente a u_1 y $v = u_1 \in K$ en la correspondiente a u_2 , luego se suman y se restan ambas igualdades, entonces se obtienen (47) y (48) respectivamente.

i) La condición (49b) surge directamente de (47) Para demostrar (49a) se tendrá en cuenta la siguiente equivalencia :

(51) $$u_1 \leq u_2 \ \text{ en } \Omega \ \Leftrightarrow \ W = 0 \ \text{ en } \Omega \;,$$

donde

(52) $$W = (u_2 - u_1)^- \;.$$

Como $W \in V_0$, entonces si se utiliza $v = u_2 + W \in K$ en la ecuación variacional correspondiente a u_1 y $v = u_1 + W \in K$ en la correspondiente a u_2 y luego se suman ambas igualdades, se tiene :

(53) $$0 \leq (q_1 - q_2)\int_{\Gamma_2} W\, d\gamma = a(u_2 - u_1, W) = -\, a(W,W) \leq 0 \;,$$

es decir $W = 0$ en Ω .

ii) Para demostrar (50a,b) se utilizan los siguientes resultados :

(A) $$u_1 = u_2 \ \text{ en } \Omega \ \Rightarrow \ q_1 = q_2 \ \text{ ó } \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1)\, d\gamma = 0 \;.$$

$$\text{(B)} \qquad \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1)\, d\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{(Bi)} \quad u_2 = u_1 \ \text{ en } \Omega \ , \\ \\ \text{(Bii)} \quad q_1 = q_2 \end{array}$$

La condición (A) resulta directamente de (47) y la condición (Bi) se deduce de (47) y del hecho que $u_2 - u_1 \in V_0$. Teniendo en cuenta la hipótesis de (B), el resultado (Bi) y las ecuaciones variacionales correspondientes a u_2 y u_1 , se deduce :

$$\text{(54)} \qquad (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (v - u_1)\, d\gamma = 0 \ , \ \forall\, v \in K \ .$$

Tomando un elemento $v_0 \in V_0$ de manera que $\int_{\Gamma_2} v_0 \, d\gamma \neq 0$ y eligiendo $v = u_1 + v_0 \in K$, de (54) se deduce (Biii).

Sea la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera :

$$\text{(55)} \qquad f(q) = J(u_q) = \frac{1}{2}\, a(u_q, u_q) + q \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma \ .$$

LEMA 7. Para todo $q > 0$ y h , de manera que $q+h > 0$, se tienen las siguientes estimaciones :

$$\text{(56)} \qquad \| \frac{1}{h} (u_{q+h} - u_q) \|_V \leq C_1 = \frac{\| \gamma_0 \|}{\alpha_0} \, | \Gamma_2 |^{1/2} \ ,$$

$$\text{(57)} \qquad \| \frac{1}{h} (u_q - u_{q+h}) \|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_2 = C_1 \, \| \gamma_0 \| \quad ,$$

donde γ_0 es el operador traza (lineal y continuo, definido sobre V), y $\alpha_0 > 0$ es la constante de coercividad sobre V_0 de la forma bilineal a , i.e. :

$$\text{(58)} \qquad a(v,v) \geq \alpha_0 \, \| v \|_V^2 \ , \ \forall v \in V_0 \ .$$

Mas aún, para todo $q > 0$ y $h > 0$ se tiene :

$$\text{(59)} \qquad 0 < \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma - \int_{\Gamma_2} u_{q+h} \, d\gamma \leq C_3 \, h \quad (C_3 = C_2 \, | \Gamma_2 |^{1/2} > 0) \ ,$$

con lo cual la función $q > 0 \to \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma$ es continua.

Demostración. Teniendo en cuenta (58) y(47) con $q_1 = q + h$, y $q_2 = q$, la desigualdad de Cauchy–Schwarz y la continuidad de γ_0 se obtiene (56) y (57). Por otra parte, de (57) surge (59).

TEOREMA 8. i) La función f es derivable. Mas aún, f' es continua y estrictamente decreciente, dada por la siguiente expresión :

(60) $$f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma \; .$$

ii) Existe una constante $C > 0$ de manera que

(61) $$a(u_q,u_q) = C\, q^2 \; ,$$

(62) $$f(q) = -\frac{C}{2} q^2 + B \mid \Gamma_2 \mid q \, , \qquad B = k_2\, b > 0 \, .$$

iii) Si $q > q_0(B)$, entonces el problema (8) es a dos fases en Ω (i.e. u_q es una función de signo no-constant en Ω), donde

(63) $$q_0(B) = \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{C} \; .$$

iv) La constante $C = C(\Omega,\Gamma_1,\Gamma_2) > 0$ está dada por

(64) $$C = a(u_3,u_3) = \int_{\Gamma_2} u_3 \, d\gamma \; ,$$

donde u_3 es la solución ecuación variacional

(65) $$a(u_3,v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \;\; , \quad \forall v \in V_0 \;\; , \quad u_3 \in V_0 \; .$$

Mas aún, C puede ser calculada por

(66) $$C = \frac{1}{q} \int_{\Gamma_2} (B - u_q) \, d\gamma \;\; ,$$

para cualquier $q > 0$.

Demostración (i) De (48) se obtiene

(67) $$\frac{f(q+h) - f(q)}{h} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} u_{q+h} \, d\gamma \;\; ,$$

y por ende (60) pasando al límite $h \to 0$ en (67) y utilizando (59). Para demostrar el resto basta ver que (Ejercicio 4.) :

(68) $$u_q = B - q\, u_3 \quad \text{in } \Omega \ ,$$

(69) $$f'(q_0(B)) = 0 \ .$$

Observación 6. En el caso que por cuestiones de simetría se tenga que la función u_q es constante sobre Γ_2 entonces la condición suficiente (63) , dada por el Teorema 8, es también necesaria para que el problema (8), con $g = 0$, sea a dos fases.

Parte (B) :

Sea $u_\alpha = u_{\alpha q} = u_{\alpha q B}$ la única solución de la ecuación variacional (21), con $g=0$ en Ω, para datos $B = \text{const.} > 0$ sobre Γ_1 , $q = \text{const.} > 0$ sobre Γ_2 y $\alpha=\text{const.} > 0$ sobre Γ_1 .

LEMA 9. Si $u = u_{\alpha q B}$ es la solución del problema (21) para datos q , B, $\alpha > 0$, entonces se tienen las siguientes propiedades :

(70)
$$\begin{aligned}
&\text{(i) } u_{\alpha q B} \leq B \text{ en } \Omega \ , \ \forall\, \alpha > 0 \ , \ \forall\, q > 0 \ ,\\
&\text{(ii) } u_{\alpha q B} \leq u_{qB} \leq B \text{ en } \Omega \ , \ \forall\, \alpha > 0 \ , \ \forall\, q > 0 \ ,\\
&\text{(iii) } u_{\alpha_1 q_1 B} \leq u_{\alpha_2 q_2 B} \text{ en } \Omega \ , \ \forall\, \alpha_1 \leq \alpha_2 \ , \ \forall\, q_2 \leq q_1 \ ,\\
&\text{(iv) } M_2 \leq u_{\alpha q B} \leq M_1 \text{ en } \Omega \ , \ \forall\, \alpha > 0 \ , \ \forall\, q > 0 \ ,
\end{aligned}$$

donde

(71) $$M_2 = M_2(\alpha,q,B) = \operatorname*{Min}_{\Gamma_2} u_{\alpha q B} = \operatorname*{Min}_{\bar\Omega} u_{\alpha q B} \quad , \quad M_1 = M_1(\alpha,q,B) = \operatorname*{Max}_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} = \operatorname*{Max}_{\bar\Omega} u_{\alpha q B} \ .$$

Demostración. Ejercicio 5.

Se considerará que el dominio Ω y los datos b (ó B) sobre Γ_1 y q sobre Γ_2 son suficientemente regular para tener la regularidad $u_{\alpha q B} \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$. Mas aún, en los tres ejemplos (Ver (97)-(101)) la solución $u_{\alpha q B}$ satisface este requerimiento.

TEOREMA 10. (i) Para todo $B > 0$, se tienen las siguientes expresiones :

(72) $$\int_{\Gamma_1} u_{\alpha q B} \, d\gamma = B \mid \Gamma_1 \mid - \frac{q}{\alpha} \mid \Gamma_2 \mid \ , \quad \forall \alpha, q > 0 \ ,$$

(73) $$a(u_{qB}, u_{qB}) = L_q(u_{qB}) + B\, q\, |\Gamma_2| \quad , \quad \forall q > 0 \, ,$$

(74) $$a(u_{\alpha qB}, u_{qB}) = a(u_{qB}, u_{qB}) \quad , \quad \forall \alpha, q > 0 \, .$$

(ii) Si $q > q_0(B)$, entonces el problema (21), con $g = 0$, es a dos fases en Ω para todo $\alpha > \alpha_0(q,B)$, donde :

(75) $$\alpha_0(q,B) = \frac{q\, |\Gamma_2|}{B\, |\Gamma_1|} \, .$$

Demostración. Se utiliza la formulación variacional (21) y el hecho siguiente (Ejercicio 6.) :

(76) $$\int_{\Gamma_1} u_{\alpha qB}\, d\gamma > 0 \iff \alpha > \alpha_0(q,B),$$

Sea $g : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

(77) $$\begin{aligned} g(\alpha,q,B) &= G_{\alpha qB}(u_{\alpha qB}) = -\tfrac{1}{2}\, a_\alpha(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) = -\tfrac{1}{2}\, L_{\alpha qB}(u_{\alpha qB}) = \\ &= \frac{q}{2}\int_{\Gamma_2} u_{\alpha qB}\, d\gamma - \frac{\alpha\, B}{2}\int_{\Gamma_1} u_{\alpha qB}\, d\gamma \le 0 \quad , \quad \alpha, q, B > 0 \, . \end{aligned}$$

TEOREMA 11. (i) La función g tiene derivadas parciales con respecto a las variables α, q y B, las cuales vienen dadas por las siguientes expresiones para todo $\alpha, q, B > 0$:

(78) $$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha,q,B) = \int_{\Gamma_1} \left(\tfrac{1}{2}\, u^2_{\alpha qB} - B\, u_{\alpha qB} \right) d\gamma \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial q}(\alpha,q,B) = \int_{\Gamma_2} u_{\alpha qB}\, d\gamma \quad ,$$

(79) $$\frac{\partial g}{\partial B}(\alpha,q,B) = -\alpha \int_{\Gamma_1} u_{\alpha qB}\, d\gamma \, .$$

(ii) Existe una función $A = A(\alpha) > 0$, definida para $\alpha > 0$, de manera que se satisfacen las siguientes relaciones :

(80) $$g(\alpha,q,B) = -\frac{A(\alpha)}{2}\, q^2 + B\, q\, |\Gamma_2| - \frac{B^2 \alpha}{2}\, |\Gamma_1| \, ,$$

(81) $$\int_{\Gamma_2} u_{\alpha qB}\, d\gamma = B\, |\Gamma_2| - q\, A(\alpha) \quad , \quad \forall q, B > 0 \, .$$

(iii) La función $A = A(\alpha)$ es decreciente en α, y verifica las condiciones siguientes :

$$A(\alpha) > \frac{|\Gamma_2|^2}{|\Gamma_1|} \frac{1}{\alpha} \quad (\text{ luego : } A(0^+) = +\infty),$$

(82) $$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = C \ , \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha A'(\alpha) = 0 \ ,$$

$$(\alpha A(\alpha))' = \frac{1}{q^2} a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) \ ,$$

donde $C > 0$ es la constante definida en el Teorema 8.

(iv) Mas aún, la función $u_{\alpha qB}$ puede ser expresada como

(83) $$u_{\alpha qB} = B - q U_\alpha \quad \text{in } \Omega \ ,$$

donde U_α está definida por

(84) $$\Delta U_\alpha = 0 \ \text{ in } \Omega \ , \ -\frac{\partial U_\alpha}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha U_\alpha \ , \ \frac{\partial U_\alpha}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 1 \ , \ \frac{\partial U_\alpha}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3} = 0 \ ,$$

cuya formulación variacional está dada por

(85) $$a_\alpha(U_\alpha, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \ , \ \forall v \in V \ , U_\alpha \in V \ ,$$

y que verifica $U_\alpha > 0$ en $\bar{\Omega}$ y las siguientes propiedades :

(86) $$\int_{\Gamma_1} U_\alpha \, d\gamma = \frac{|\Gamma_2|}{\alpha} \ , \int_{\Gamma_2} U_\alpha \, d\gamma = A(\alpha) \ , \ a(U_\alpha, U_\alpha) = C \ , \ \forall \alpha > 0 \ .$$

Demostración. Ejercicio 7.

TEOREMA 12. (i) Sean las funciones $q_m = q_m(\alpha,B)$ y $q_M = q_M(\alpha,B)$, definidas para α, $B > 0$, por las siguientes expresiones

(87) $$q_m(\alpha,B) = \frac{B \, |\Gamma_2|}{A(\alpha)} \ , \ q_M(\alpha,B) = \frac{B \, \alpha \, |\Gamma_1|}{|\Gamma_2|} \ ,$$

que verifican las condiciones

(88) $$\begin{aligned} & q_m(0^+,B) = q_M(0^+,B) = 0 \ , \ q_m(\alpha,B) < q_M(\alpha,B) \ , \ \forall \alpha > 0, B > 0 \ , \\ & \lim_{\alpha \to +\infty} q_m(\alpha,B) = q_0(B) \ , \\ & q_m \text{ es una función creciente de la variable } \alpha \ . \end{aligned}$$

(ii) El conjunto

(89) $$S^{(2)}(B) = \left\{(\alpha,q) \in (R^+)^2 \;/\; q_m(\alpha,B) < q < q_M(\alpha,B)\;,\; \alpha > 0 \right\}$$

es no vacío para todo $B > 0$.

(iii) Se tienen las siguientes equivalencias

(90) $$\text{i)} \int_{\Gamma_1} u_{\alpha qB}\, d\gamma > 0 \;\Leftrightarrow\; q< q_M(\alpha,B)\;,\quad \text{ii)} \int_{\Gamma_2} u_{\alpha qB}\, d\gamma < 0 \;\Leftrightarrow\; q > q_m(\alpha,B)\;.$$

(iv) Si $(\alpha,q) \in S^{(2)}(B)$, entonces el problema (20) con $g = 0$ es a dos fases.

Demostración. Ejercicio 8.

A continuación se considerará un <u>caso particular</u> para el cual la función $A=A(\alpha)$, definida para $\alpha > 0$, podrá ser evaluada explicitamente. Se considera que $u_{\alpha qB}$ verifica la condición [TaTa] :

(91) $$\frac{1}{q^2}\, a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) = \text{Const.}\ (= \text{Const}(\alpha,q,B)\ )\ ,\ \forall\alpha,\ q,\ B > 0\ ,$$

o en forma equivalente por

(92) $$(\ \alpha\ A(\alpha)\ )' = A(\alpha) + \alpha\ A'(\alpha) = C\ ,\ \forall\alpha > 0\ .$$

Se pueden deducir las siguientes propiedades :

TEOREMA 13. (i) Se tiene la siguiente equivalencia :

(93) $$u_{qB} - u_{\alpha qB} \text{ es constante en } \Omega \;\Leftrightarrow\; (\ \alpha\ A(\alpha)\ )' = C\ .$$

(ii) Para el caso particular (91), se tienen las siguientes propiedades:

(94) $$u_{qB} - u_{\alpha qB} = \frac{q\ |\Gamma_2|}{\alpha\ |\Gamma_1|} \text{ en } \Omega\ ,\quad u_{\alpha qB}\,|_{\Gamma_1} = B - \frac{q\ |\Gamma_2|}{\alpha\ |\Gamma_1|}\ ,$$

(95) $$\frac{\partial u_{\alpha qB}}{\partial n}\,|_{\Gamma_1} = \frac{q\ |\Gamma_2|}{|\Gamma_1|}\ ,\quad \frac{\partial u_{qB}}{\partial n}\,|_{\Gamma_1} = \text{const.}$$

(iii) Mas aún, la función $A(\alpha)$ está dada por la expresión

(96) $$A(\alpha) = C + \frac{1}{\alpha}\,\frac{|\Gamma_2|^2}{|\Gamma_1|}\ .$$

Demostración (i) Se tienen las equivalencias

$u_{qB} - u_{\alpha qB}$ es constante en Ω $\Leftrightarrow$ $a(u_{qB} - u_{\alpha qB}, u_{qB} - u_{\alpha qB}) = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) = a(u_{qB}, u_{qB})$ $\Leftrightarrow$ $a(u_{\alpha qB}, u_{\alpha qB}) = C\, q^2$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha\, A(\alpha))' = C$.

(ii)-(iii) Ejercicio 9.

A continuación se darán tres ejemplos [Ta2] en los cuales la solución puede calcularse explícitamente, como asimismo otras propiedades y funciones auxiliares (Cabe destacar que para estos ejemplos las condiciones suficientes, vistas anteriormente, resultan ser también necesarias y que además verifican la hipótesis de caso particular (91)).

Ejemplo 1. Se consideran los siguientes datos :

(97)
$$n = 2 \quad , \quad \Omega = (0,x_0) \times (0,y_0) \quad , \quad x_0 > 0 \quad , \quad y_0 > 0 \quad ,$$
$$\Gamma_1 = \{0\} \times [0,y_0] \quad , \quad \Gamma_2 = \{x_0\} \times [0,y_0] \quad ,$$
$$\Gamma_3 = (0,x_0) \times \{0\} \;\cup\; (0,x_0) \times \{y_0\} \; ,$$

y se obtienen :

(98)
$$|\Gamma_2| = |\Gamma_1| = y_0 \quad , \quad C = x_0\, y_0 \quad ,$$
$$u = u_{qB}(x,y) = B - q\,x \quad , \quad u_\alpha = u_{\alpha qB}(x,y) = B - \frac{q}{\alpha} - q\,x \quad ,$$
$$u_3(x,y) = x \quad , \quad U_\alpha(x,y) = \frac{1}{\alpha} + x \quad ,$$
$$M_1(\alpha,q,B) = B - \frac{q}{\alpha} \quad , \quad M_2(\alpha,q,B) = B - \frac{q}{\alpha} - q\,x_0 \quad ,$$
$$q_0(B) = \frac{B}{x_0} \quad , \quad \alpha_0(q,B) = \frac{q}{B} \quad , \quad A(\alpha) = y_0\,\left(x_0 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad ,$$
$$q_m(\alpha,B) = \frac{B}{x_0 + \frac{1}{\alpha}} \quad , \quad q_M(\alpha,B) = B\,\alpha \quad ,$$
$$\mathcal{L} : \left\{ x = \frac{B}{q} \right\} \quad , \quad \mathcal{L}_\alpha : \left\{ x = \frac{B}{q} - \frac{1}{\alpha} \right\} \quad \text{(cuando existe).}$$

Ejemplo 2. Se consideran los siguientes datos :

(99)
$$n = 2 \quad , \quad 0 < r_1 < r_2 \quad , \quad \Gamma_3 = \phi \; ,$$

Ω : corona circular de radios r_1 y r_2 , centrado en $(0,0)$,

Γ_1 : circunferencia de radio r_1 y centrado en $(0,0)$,

Γ_2 : circunferencia de radio r_2 y centro en $(0,0)$,

y se obtiene ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) :

$$|\Gamma_1| = 2\pi r_1 \quad , \quad |\Gamma_2| = 2\pi r_2 \quad , \quad C = 2\pi r_2^2 \log\frac{r_2}{r_1} \quad ,$$

$$u = u_{qB}(r) = B - q\, r_2 \log\frac{r}{r_1} \ , \quad u_\alpha = u_{\alpha qB}(r) = B - \frac{q\, r_2}{\alpha\, r_1} - q\, r_2 \log\frac{r}{r_1} \ ,$$

$$u_0(r) = r_2 \log\frac{r}{r_1} \quad , \quad U_\alpha(r) = r_2\left(\frac{1}{\alpha\, r_1} + \log\frac{r}{r_1}\right) \ ,$$

$$M_1(\alpha,q,B) = B - \frac{q\, r_2}{\alpha\, r_1} \quad , \quad M_2(\alpha,q,B) = B - \frac{q\, r_2}{\alpha\, r_1} - q\, r_2 \log\frac{r_2}{r_1} \quad ,$$

(100)

$$q_0(B) = \frac{B}{r_2 \log\frac{r_2}{r_1}} \ , \ \alpha_0(q,B) = \frac{q\, r_2}{B\, r_1} \ , \ A(\alpha) = 2\pi r_2^2\left(\frac{1}{\alpha\, r_1} + \log\frac{r_2}{r_1}\right) \ ,$$

$$q_m(\alpha,B) = \frac{B}{r_2\left(\frac{1}{\alpha\, r_1} + \log\frac{r_2}{r_1}\right)} \ , \quad q_M(\alpha,B) = \frac{B\, r_1\, \alpha}{r_2} ,$$

$$\mathcal{L} : \left\{ r = r_1 \exp\left(\frac{B}{q\, r_2}\right) \right\} \ , \ \mathcal{L}_\alpha : \left\{ r = r_1 \exp\left(\frac{B}{q\, r_2} - \frac{1}{\alpha\, r_1}\right) \right\} \text{ (cuando existe).}$$

Ejemplo 3. Se consideran los mismos datos que en el Ejemplo 2, pero para el caso tridimensional, es decir $n=3$, obteniéndose ($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) :

$$C = 4\pi r_2^3 \ \frac{r_2 - r_1}{r_1} \quad , \quad |\Gamma_1| = 4\pi r_1^2 \quad , \ |\Gamma_2| = 4\pi r_2^2 \quad ,$$

$$u = u_{qB}(r) = B - q\, r_2^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right), \quad u_\alpha = u_{\alpha qB}(r) = B - \frac{q\, r_2^2}{\alpha\, r_1^2} - q\, r_2^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right),$$

$$u_0(r) = r_2^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \quad , \quad U_\alpha(r) = r_2^2\left(\frac{1}{\alpha\, r_1^2} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \ ,$$

(101)

$$M_1(\alpha,q,B) = B - \frac{q\, r_2^2}{\alpha\, r_1^2} \ , \ M_2(\alpha,q,B) = B - \frac{q\, r_2^2}{\alpha\, r_1^2} - \frac{q\, r_2}{r_1}\,(r_2 - r_1) \ ,$$

$$q_0(B) = \frac{B\, r_1}{r_2\,(r_2 - r_1)} \ , \ \alpha_0(q,B) = \frac{q\, r_2^2}{B\, r_1^2} \ , \ A(\alpha) = 4\pi r_2^4\left(\frac{1}{\alpha\, r_1^2} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \ ,$$

$$q_m(\alpha,B) = \frac{B}{r_2^2\left(\frac{1}{\alpha\, r_1^2} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad , \quad q_M(\alpha,B) = \frac{B\, r_1^2\, \alpha}{r_2^2} \quad ,$$

$$\mathcal{L} : \left\{ r = \frac{q\, r_2^2\, r_1}{q\, r_2^2 - B\, r_1} \right\} \ , \ \mathcal{L}_\alpha : \left\{ \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha\, r_1^2} + \frac{q\, r_2^2 - B\, r_1}{q\, r_2^2\, r_1} \right\} \text{ (cuando existe).}$$

REFERENCIAS

[BC] C. BAIOCCHI - A. CAPELO, "Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariazionali, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, N 4, 7, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[Du2] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N° 185, LABORIA - IRIA, Rocquencourt (1976).

[GaTa] G.G. GARGUICHEVICH – D.A. TARZIA, "Sobre un problema de conducción del calor estacionario con una fuente de energía. Condiciones necesarias y suficientes para que se presenten dos fases", en Mecánica Computacional, Vol.8, MECOM'88, L.A.Godoy- F.Flores (Eds.); AMCA, Santa Fe (1989), 87-100. Ver también "The steady-state two-phase Stefan problem with an internal energy and some related problems", Por aparecer.

[KS] D. KINDERLEHRER – G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[Ro] J.F. RODRIGUES, "Obstacle problems in mathematical physics", North-Holland Mathematics Studies N_0 134, North-Holland, Amsterdam (1987).

[TT] E.D. TABACMAN - D.A. TARZIA, "Sufficient and/or necessary conditions for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", J. Differential Equations, 77(1989), 16-37.

[Ta1] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Mars 1979). See also C.R. Acad. Sc. Paris, 288A(1979), 941-944; Math. Notae, 27(1979/80), 145-156 and 157-165.

[Ta2] D.A. TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28(1980/81), 73-89.

[Ta3] D.A. TARZIA, "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI - CONICET, No. 5, Buenos Aires (1981). "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computacão Científica, Vol. 5, SBMAC, Gramado (1987).

[Ta4] D.A. TARZIA, "Una desigualdad para el flujo de calor constante a fin de obtener un problema estacionario de Stefan a dos fases", Mecánica Computacional, Vol. 2, S.R. Indelsohn (Ed.), EUDEBA, Santa Fe (1985), 359-370. "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Engineering Analysis, 5(1988), 177-181.

PROMAR (CONICET-UNR),
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agr.,
Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.