UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

I.S.S.N. 03268689

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 13 al 17 de OCTUBRE - 1986

14

Volumen 2

Rosario - República Argentina

–1987–

EL PROBLEMA DE STEFAN MULTIDIMENSIONAL A UNA FASE.

Domingo Alberto TARZIA.

I. INTRODUCCION.

En este cursillo se estudiará el problema de Stefan multidimensional a una fase a través de la teoría de las inecuaciones variacionales parabólicas (IVP) Esta formulación se debió a Duvaut en 1973 [Du1, Du2], previa transformación de la función incógnita temperatura. Esta brillante transformación dió origen a numerosos estudios posteriores, ya sea desde un punto de vista teórico, numérico o de las aplicaciones, algunos de los cuales serán mencionados al final del presente trabajo.

Merece también ser señalado el hecho de que dos años antes, es decir en 1971, Baiocchi en [Ba1, Ba2, BaCa] estudió el llamado problema del dique poroso (problema de frontera libre en hidráulica) a través de una inecuación variacional elíptica (IVE) realizando una transformación de función incógnita que hoy lleva su nombre.

Estos hechos permitieron que la teoría de las IV se transformara en una herramienta útil para el estudio de ciertos problemas de frontera libre, eliminando ciertas dificultades en el estudio del problema en su formulación original (por ejemplo, en la nueva formulación del problema, la frontera desaparece por completo). Una introducción a la teoría de las IV puede verse en el cursillo CG3 del presente Seminario, como así también en los libros [Du6, DuLi, EkTe, ElOc, Fri2, KiSt, Li, Ta2]; para el caso unidimensional, puede citarse [Ma].

Debido a la importancia del trabajo [Du1, Du2] y teniendo en cuenta el tiempo asignado, el presente cursillo se centralizará en dicha teoría, indicándose además nuevas propiedades y aplicaciones que se realizaron a posteriori; mas detalles podrán verse en [Ta3].

II. PLANTEO DEL PROBLEMA.

Siguiendo [Du1, Du2] se considera un cuerpo en estado sólido (hielo a 0 C) que ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera Γ regular. Se supone que Γ está compuesta de tres partes Γ_1, Γ_2 y Γ_3 con $\text{med}(\Gamma_3)>0$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \emptyset$.

Se busca la evolución del bloque de hielo suponiendo que Γ_2 es una pared impermeable al calor, sobre Γ_3 se impone una temperatura nula y sobre Γ_1 existe un flujo de calor del tipo de ley de Newton siendo $\theta_1 = \text{const.} > 0$ la temperatura exterior. Se

desprecia la variación de volumen debido a la fusión del hielo y se designa con $\Sigma_{(t)}$ la superficie de cambio de fase, la cual, debido a la monotonía del problema, está representada por la ecuación $t=R(x_1, x_2, x_3)$ que es una incógnita suplementaria del problema.

El problema consiste en hallar la temperatura $\theta=\theta(x,t)$ ($x=(x_1, x_2, x_3)$), definida en $Q=\Omega x(0,T)$ con $T>0$, por:

$$(1)\qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta(x,t)>0 & \text{si } t>R(x),\ x\in\Omega, \\ 0 & \text{si } t\leq R(x),\ x\in\Omega, \end{cases}$$

y la frontera libre $t=R(x)$ de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{i)} \quad \rho\, c\, \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - k\,\Delta\theta = 0, & \text{en } t>R(x),\ x\in\Omega, \\ \text{ii)} \quad \theta=0 & \text{sobre } t=R(x), \\ \text{iii)} \quad -k\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \rho\, l\, v_n & \text{sobre } t=R(x), \\ \text{iv)} \quad -k\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n}\Big/_{\Gamma_1} = \alpha\,(\theta-\theta_1), & \\ \text{v)} \quad \dfrac{\partial\theta}{\partial n}\Big/_{\Gamma_2} = 0, & \theta/_{\Gamma_3}=0, \\ \text{vi)} \quad \theta(x,0)=0, & x\in\Omega, \end{cases}$$

donde ρ es la densidad de masa, c el calor específico, k la conductividad térmica, l el calor latente y v_n la velocidad normal en $\mathbb{R}^3$ de la superficie $t=R(x)$.

<u>OBSERVACION 1.</u> Generalmente, cuando se estudia el problema de Stefan unidimensional, la frontera libre se representa por la ecuación $x=s(t)$; en nuestro caso, debido a la monotonía del problema, es preferible trabajar con $t=R(x)$, siendo R la función inversa de s ($R=s^{-1}$).

<u>OBSERVACION 2.</u> De ahora en adelante se supondrá que se ha realizado un cambio de variables de manera que $\rho=c=k=l=1$, donde $\alpha>0$ y $\theta_1>0$ son dos constantes dadas.

<u>OBSERVACION 3.</u> La condición de Stefan (iii) puede ser también escrita de la siguiente manera (EJERCICIO 1):

$$(3)\qquad -\nabla\theta\cdot\nabla R = 1, \quad \text{sobre } t=R(x).$$

Si se realiza el siguiente cambio de función incógnita (Transformación de Duvaut):

$$(4)\qquad u(x,t)=\int_0^t \Theta(x,\tau)\,d\tau=\begin{cases}\displaystyle\int_{R(x)}^{t}\Theta(x,\tau)\,d\tau & \text{si } t>R(x)\\ 0 & \text{si } t>R(x)\end{cases}$$

entonces se obtienen los siguientes resultados:

EJERCICIO 2. Si $t>R(x)$, se deduce que:

$$(5)\qquad \begin{cases} \text{i)}\quad u_{x_i}(x,t)=\displaystyle\int_{R(x)}^{t}\Theta_{x_i}(x,\tau)\,d\tau & (i=1,2,3)\\ \text{ii)}\quad u_{x_ix_i}(x,t)=\displaystyle\int_{R(x)}^{t}\Theta_{x_ix_i}(x,\tau)\,d\tau-\Theta_{x_i}(x,R(x))\,R_{x_i}(x)\\ \text{iii)}\quad \Delta u(x,t)=1+\Theta(x,t)\\ \text{iv)}\quad u_t(x,t)=\Theta(x,t). \end{cases}$$

EJERCICIO 3. i) La nueva función incógnita $u=u(x,t)$ satisface, en $\Omega\times(0,T)=Q$, al siguiente problema:

$$(6)\qquad \begin{cases} u=0, & t\le R(x),\ x\in\Omega,\\ u_t-\Delta u=-1, & t>R(x),\ x\in\Omega,\\ u=0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{sobre } t=R(x)\\ u\big/_{\Gamma_3}=0\quad ,\quad \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big/_{\Gamma_2}=0, & \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big/_{\Gamma_1}=\alpha\,(u-\Theta_1\ t) & \\ u(x,0)=0\ , & x\in\Omega \end{cases}$$

ii) Más aún, u satisface en Q al siguiente problema de complementaridad:

$$(7)\qquad \begin{cases} u_t-\Delta u+1\ge 0,\ u\ge 0 & \text{en } Q,\\ u(u_t-\Delta u+1)=0 & \text{en } Q. \end{cases}$$

iii) Por otra parte, si $v=v(x)\geq 0$ en Ω, entonces se verifica:

(8) $\qquad (u_t-\Delta u+1)(v-u)\geq 0 \qquad$ en Q.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se deduce el

LEMA 1. La función vectorial $u=u(t)$ $(u(t):t\in[0,T]\to u=u(x,t)\in V)$ satisface a la siguiente IVP.

$$(9)\quad \begin{cases} (u'(t),v-u(t)) + a_\alpha(u(t),v-u(t))\geq L_\alpha(v-u(t)),\ \forall v\in K,\ t\in[0,T], \\ u(t)\in K,\ u(0)=0 \end{cases}$$

donde:

$$(10)\quad \begin{cases} V=\left\{v\in H^1(\Omega) \ / \ v/_{\Gamma_3}=0\right\}\ ,\ H=L^2(\Omega) \ \text{(Espacios de Hilbert)}, \\ K=\left\{v\in V \ / \ v\geq 0 \text{ en } \Omega\right\} \ \text{(Convexo cerrado)}, \\ a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\ dx\ ,\ a_\alpha(u,v)=a(u,v)+\alpha\int_{\Gamma_1} u\ v\ d\Gamma\ , \\ L(v)=-\int_\Omega v\ dx\ ,\quad (u,v)=\int_\Omega u\ v\ dx\ , \\ L_\alpha(v)=L(v)+\alpha\ \theta_1\ t\int_{\Gamma_1} v\ d\Gamma\ , \end{cases}$$

adoptándose como notación $u'=u_t$

DEMOSTRACION. Si se integra, en Ω, la desigualdad (8) utilizando la fórmula de Green

$$(11)\qquad -\int_\Omega \Delta u\ v\ dx = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\ dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\ v\ d\Gamma$$

y las condiciones (6) que u verifica sobre Γ_i (i=1, 2, 3), entonces se deduce la IVP (9) (EJERCICIO 4).

EJERCICIO 5. Si se reemplaza la condición (2 iv) para la temperatura sobre Γ_1 por la siguiente

$$(12)\qquad \theta/_{\Gamma_1}=\theta_1$$

quedando las otras condiciones inalteradas, entonces si se realiza el cambio de función incógnita (4) se obtiene para u la IVP siguiente:

$$(13)\quad \begin{cases} (u'(t),v-u(t)) + a(u(t),v-u(t)) \geq L(v-u(t)),\ \forall v \in K_1,\ t \in [0,T], \\ u(t) \in K_1,\ u(0)=0 \end{cases}$$

donde

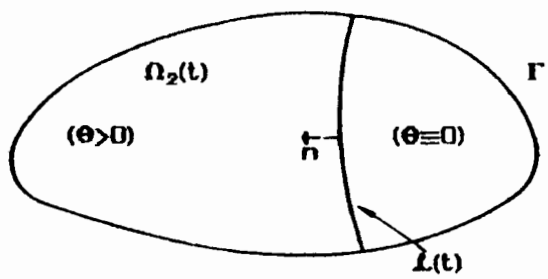
$$(14)\qquad K_1(t)=\left\{v \in K \ / \ v\big/_{\Gamma_1} = \theta_1\ t\right\}.$$

OBSERVACION 4. Es importante mencionar que con la condición (12), en lugar de la (2 iv), el convexo en la IVP, para la función u, depende del tiempo.

Cuando no se conoce a priori una cierta monotonía de la frontera libre, su ecuación no es de la forma t=R(x), sino que estará dada implicitamente por una ecuación del tipo S(x,t)=0. En este caso se puede utilizar una metodología general para la transformación del problema de la variable θ a la variable u.

Si se introducen los conjuntos:

$$(15)\quad \begin{cases} \Omega_2(t)=\left\{x \in \Omega \ / \theta(x,t)>0\right\}, \\ Q=\Omega x(0,T)\ ,\ Q_2= \bigcup_{0<t<T} [\Omega_2(t)\chi(t)], \\ \Sigma(t)=\partial\Omega_2(t) \cap \Omega, \end{cases}$$



entonces las condiciones (2 i–iii) pueden escribirse en la forma:

$$(16)\quad \begin{cases} C\ \theta_t - k\ \Delta\theta = 0 & \text{en } Q_2, \\ \theta=0 & \text{sobre } \Sigma(t), \\ -k\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} = L\ v \cdot n & \text{sobre } \Sigma(t), \end{cases}$$

donde $C=\rho\ c$, $L=\rho\ l$, v es la velocidad de la superficie $\Sigma(t)$ en $\mathbb{R}^3$, n es un versor normal a $\Sigma(t)$. Entonces se obtiene el:

TEOREMA 2. i) La temperatura Θ satisface en el sentido de las distribuciones en Q, la ecuación siguiente:

$$C\Theta_t - k\,\Delta\Theta = -L\,\frac{\partial \chi_{Q_2}}{\partial t} \quad \text{en } D'(Q_2) \tag{17}$$

donde con χ_A se simboliza la función característica del conjunto A.

ii) Si Θ satisface (17) y (2 iv–vi), y se define la nueva función incógnita:

$$\int_0^t k\,\Theta(x,\tau)\,d\tau\,, \quad x\in\bar{\Omega},\ t\in[0,T] \tag{18}$$

entonces se obtiene, para u, las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \text{i)} & \frac{C}{k}\,u'(t) - \Delta u(t) = -L\,\chi_{Q_2} \\ \text{ii)} & u\big/_{\Gamma_3}=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial n}\big/_{\Gamma_1}=\alpha\,(u-\Theta_1\ t), \\ \text{iii)} & \frac{\partial u}{\partial n}\big/_{\Gamma_2}=0\ ,\ u(0)=0, \end{cases} \tag{19}$$

cuya formulación variacional viene dada por la IVP siguiente:

$$\begin{cases} \left(\frac{C}{k}\,u'(t)\,,\,v-u(t)\right)+a\left(u(t)\,,\,v-u(t)\right)+\alpha\int_{\Gamma_1}(u(t)-\Theta_1\ t)(v-u)d\Gamma \geq \\ \qquad \geq(-L,\,v-u(t))\ ,\ \forall\ v\in K,\ t\in[0,T], \\ u(t)\in K\ ,\ u(0)=0. \end{cases} \tag{20}$$

DEMOSTRACION. La ecuación (17) se obtiene expresando $C\,\theta_t - k\,\Delta\Theta$ en el sentido de las distribuciones en Q y utilizando una fórmula de Green. Para obtener la ecuación que satisface u, se integra en el tiempo la de Θ. La IVP (20) se obtiene multiplicando (19 i) por v–u(t), con $v\in K$, integrando en Ω, utilizando la fórmula de Green (11) y el hecho siguiente (EJERCICIO 6):

$$\begin{aligned} (-L\,\chi_{Q_2}(t)\,,\,v-u(t)) &= \int_{\Omega_2(t)} -L(v-u(t))\,dx \geq \\ &\geq(-L,\,v-u(t))\ ,\ \forall v\in K\ ,\ t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{21}$$

OBSERVACION 5. La IVP (20) se reduce a (9) cuando C=L=k=1.

OBSERVACION 6. Cuando θ_1 depende del tiempo, es decir $\theta_1=\theta_1(t)>0$, la IVP para u es la (9) o (13) reemplazando en la integral sobre Γ_1 el factor $(u(t)-\theta_1 t)$ por $(u(t)-u_1(t))$, donde u_1 viene definido por (EJERCICIO 7):

$$u_1(t)=\int_0^t \theta_1(\tau)\, d\tau. \tag{22}$$

OBSERVACION 7. Una metodología análoga a la desarrollada más arriba puede utilizarse para transformar el problema de Stefan a dos fases en una IVP [Du3, Du4, Tai1]

Antes de pasar al estudio de las IVP (9) y (13), se hará un resumen de resultados conocidos sobre las ecuaciones variacionales parabólicas de tipo monótono, que se explicitarán y se usarán con más detalles en este caso particular.

III. TEORIA DE LAS ECUACIONES E INECUACIONES VARIACIONALES PARABOLICAS DE TIPO MONOTONO.

Se consideran dos espacios de Hilbert V y H sobre los reales, de manera que V es denso en H y la inyección $V\to H$ es continua. Entonces, si se identifica H con su dual H', resulta $V\to H\equiv H'\to V'$. En este caso cada espacio es denso en el otro y las inyecciones son continuas. Este resultado surge del

EJERCICIO 8. i) Si $f\in H$, entonces la aplicación

$$\tilde{f} : V \to \mathbb{R} \;/\; \tilde{f}(v)=(f,v)_H\,, \quad \forall v\in V\,, \tag{23}$$

es lineal y continua en V, es decir $\tilde{f}\in V'$

ii) El operador

$$S : H \to V' \;/\; S(f)=\tilde{f}\,, \ \forall\, f\in H\,, \tag{24}$$

(donde $\tilde{f}$ está dada por (23) para cada $f\in H$) es lineal, continua e inyectiva.

iii) Se puede identificar H con un subespacio de V'.

iv) Un caso típico es el que se presenta cuando $V=H_0^1(\Omega)$ y $H=L^2(\Omega)$, siendo

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))'=H^{-1}(\Omega). \tag{25}$$

OBSERVACION 8. Con $\langle\ ,\ \rangle$ se simboliza la dualidad $V'xV$ como así también el producto escalar en H.

Se considera un operador $A : V \to V'$; y se introducen las siguientes definiciones:

i) A es un operador monótono si y sólo si

(26) $\langle Av - Au\ ,\ v-u\rangle \geq 0\ ,\quad \forall u\ ,\ v \in V.$

ii) A es un operador hemicontinuo si y sólo si la aplicación

(27) $\lambda \in \mathbb{R} \to \langle A(u+\lambda v)\ ,\ w\rangle \in \mathbb{R}$

es continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, cualesquiera sean $u,v,w \in V$.

iii) A es un operador acotado si y sólo si existen dos constantes c_1, $c_2 \geq 0$ de manera que

(28) $\|Av\|_{V'} \leq c_1\|v\|_V + c_2\ ,\quad \forall v \in V.$

iv) A es un operador coercitivo si y sólo si existen dos constantes $\alpha > 0$, $\lambda \geq 0$ de manera que

(29) $\langle Av,v\rangle \geq \alpha\ \|v\|_V^2 - \lambda\ \|v\|_H^2\ ,\quad \forall v \in V.$

EJERCICIO 9. Sean los espacios $H=L^2(\Omega)$ y $V=H_0^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$, y la forma bilineal y simétrica $a : VxV \to \mathbb{R}$ que satisface las hipótesis siguientes:

i) a es continua, es decir:

(30) $\exists\ M>0\ /\ |a(u,v)| \leq M\ \|u\|_1\ \|v\|_1\ ,\quad \forall\ u,v \in V\ ,$

donde $\|\ \|_1$ representa la norma en el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$, dada por

(31) $$\|v\|_1 = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\ dx + \int_\Omega v^2\ dx \right)^{1/2}\ ,\quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

ii) a es coercitiva, es decir:

(32) $\exists\ \alpha_0 > 0\ /\ a(v,v) \geq \alpha_0\ \|v\|_1^2\ ,\quad \forall\ u,v \in V.$

Entonces, el operador $A:V \to V'$ definido por

(33) $\langle Au,v\rangle = a(u,v)\ ,\quad \forall\ u,v \in V\ ,$

satisface las 4 definiciones anteriores. Más aún, A es fuertemente monótono, es decir

(34) $\langle Av - Au\ ,\ v-u\rangle \geq \alpha_0\ \|v-u\|_V^2\ ,\quad \forall\ u,v \in V.$

TEOREMA 3. Si $T>0$, $u_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;V')$ y el operador $A:V \to V'$ verifica las hipótesis anteriores, entonces existe una única función $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ con $u' \in L^2(0,T;V')$ de manera que se satisfaga

$$(35)\quad \begin{cases} u'(t) + A\,u(t) = f(t) \ , \quad t\in(0,T) \\ \\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

DEMOSTRACION. (EJERCICIO 10. [Ar, Du6, Li], ver Apéndice)

OBSERVACION 9. Como $u\in L^2(0,T;V)$ y $u'\in L^2(0,T;V')$, entonces la aplicación $t\in(0,T)\to u(t)\in H$ es continua, con lo cual $u(0)=u_0$ tiene sentido [LiMa].

A continuación se dará un resultado general referente a las IVP de tipo monótono.

TEOREMA 4. Sea $\phi\neq K\subset V$ un conjunto convexo y cerrado de manera que $0\in K$, y $u_0\in K$. El operador $A:V\to V'$ satisface las 4 definiciones anteriores y la hipótesis suplementaria

$$(36)\qquad \exists\alpha_1>0\ ,\ \lambda_1\geq 0\ /\ \langle Av-Au\ ,\ v-u\rangle \geq \alpha_1\,\|v-u\|_V^2 - \lambda_1\ \|v-u\|_V^2,\ \forall u,v\in V.$$

Si $T>0$ y $f,f'\in L^2(0,T;V')$ con $f(0)-Au_0\in H$, entonces existe una única solución $u\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$ con $u'\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$ de la IVP siguiente:

$$(37)\quad \begin{cases} (u'(t),v-u(t))_H+\langle Au(t),v-u(t)\rangle \geq \langle f(t),v-u(t)\rangle,\ \forall v\in K,\ t\in[0,T], \\ \\ u(t)\in K\ ,\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

DEMOSTRACION. a) Unicidad: Se supone que u_1 y u_2 son dos soluciones de la IVP (37). Si se reemplaza $v=u_2(t)$ en la IVP correspondiente a la de u_1 y $v=u_1(t)$ en la IVP correspondiente a la de u_2, se suman ambas desigualdades, se reemplaza $w=u_2-u_1$ y se utiliza (36), entonces se deduce que

$$(38)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\|w(t)\|_H^2\right) \leq \lambda_1\,\|w(t)\|_H^2\ ,\quad t\in[0,T]$$

A partir de la desigualdad anterior y utilizando una de las desigualdades de Gronwall se obtiene $w=0$ en $[0,T]$, es decir $u_1=u_2$.

b) Existencia: Sea $\beta:V\to V'$ un operador de penalización del convexo K, es decir que β es un operador acotado, monótono, hemicontinuo que tiene la siguiente propiedad [Li]:

$$(39)\qquad \beta(v)=0 \Leftrightarrow v\in K$$

Se define para cada $\varepsilon>0$ (parámetro destinado a tender a cero) el problema penalizado (aproximado de (37)) siguiente:

$$(40)\qquad \begin{cases} u_\varepsilon'(t) + A\,u_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u_\varepsilon(t)) = f(t)\ ,\ t\in[0,T]\ , \\ \\ u_\varepsilon(0)=u_0 \end{cases}$$

que es utilizado en tres pasos (EJERCICIO 11. [Du6,Li]) para obtener la existencia de solución:

i) Existe una única solución u_ε de (40) por la teoría de las EVP de tipo monótono.

ii) Se obtienen las siguientes estimaciones a priori:

a) $(u_\varepsilon)\subset$ conj. acotado de $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$,

b) $(u_\varepsilon')\subset$ conj. acotado de $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$.

iii) Cuando $\varepsilon\to 0$ se tiene $u_\varepsilon\to u$ y se deduce que u satisface la IVP (37).

Se verá un ejemplo de operador de penalización en el

EJERCICIO 12. Sea V un espacio de Hilbert y $\phi\neq K\subset V$ un conjunto convexo y cerrado. Entonces $\beta:V\to V$, definido por $\beta=I-P_K$, donde I es la identidad y P_K es el operador de proyección sobre K, es un operador de penalización de K. Más aún, β es un operador continuo, pues verifica:

$$(41)\qquad \|\beta(v)-\beta(u)\| \le 2\,\|v-u\|\ ,\ \forall\ u,v\in V.$$

EJERCICIO 13. i) Si $\mathrm{med}(\Gamma_3) > 0$, entonces la forma bilineal a es coercitiva sobre V.

ii) Si $\mathrm{med}(\Gamma_3)=0$, pero además se cumple que $\mathrm{med}(\Gamma_1)>0$, entonces la forma bilineal a_1, definida para $\alpha=1$ en (10), es coercitiva sobre $V=H^1(\Omega)$, es decir que existe una constante $\lambda_1>0$ tal que

$$(42)\qquad a_1(v,v)\ge\lambda_1\,\|v\|_1^2\ ,\ \forall\ v\in V.$$

Más aún, la forma bilineal a_α es coercitiva sobre V, obteniéndose

$$(43)\qquad \begin{cases} a_\alpha(v,v)\ge\lambda_\alpha\,\|v\|_1^2\ ,\ \forall v\in V, \\ \\ \lambda_\alpha=\lambda_1\,\min(1,\alpha)>0. \end{cases}$$

IV. ESTUDIO DE LA IVP (9).

Se dará a continuación el

TEOREMA 5. Para cada $\alpha>0$ fijo, existe una única solución $u=u_\alpha(x,t)$ de la IVP (9) que satisface

$$(44)\qquad u_\alpha,u_\alpha'\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H).$$

DEMOSTRACION. a) Unicidad: Si se supone que u_1 y u_2 son dos soluciones de la IVP (9), reemplazando $v=u_2(t)$ y $v=u_1(t)$ en las IVP correspondientes a la de u_1 y u_2 respectivamente, sumando ambas desigualdades y reemplazando $w=u_2-u_1$, entonces resulta:

$$(45)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + a(w(t),w(t)) + \alpha\int_{\Gamma_1} w^2(t)\,d\Gamma \le 0 \quad , \quad t\in[0,T]$$

Integrando en el intervalo (0,t) se obtiene que $w=0$ en $[0,T]$, es decir $u_1=u_2$.

b) Existencia: Se utilizará una metodología que es general en este tipo de IVP, consistente en penalizar el convexo, realizar estimaciones a priori sobre la solución aproximada y pasar al límite sobre el parámetro de penalización para hallar la solución del problema en cuestión.

i) Se utiliza el siguiente operador de penalización:

$$(46)\qquad \beta(v) = v \quad , \quad \forall\, v\in H,$$

y se define $u=u_\varepsilon$ (para cada $\alpha>0$) como la solución del problema penalizado (cuando no haya confusión es útil evitar el uso innecesario de los subíndices $\alpha>0$ y $\varepsilon>0$ para la función u):

$$(47)\qquad \begin{cases} (u'(t),v) + a_\alpha(u(t),v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u(t),v) = L_\alpha(v), \quad \forall\, v\in V,\ t\in[0,T], \\ u(0)=0, \quad u(t)\in V \end{cases}$$

Se sabe que la función $u=u_\varepsilon$ (para cada $\alpha>0$) existe y es única, por lo demostrado en §III. El operador A está definido en este caso por:

$$(48)\qquad \langle Au,v\rangle = a(u,v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta u,v) + \alpha\int_{\Gamma_1} u\,v\,d\Gamma$$

ii) Se obtendrán, en dos etapas, estimaciones a priori para $u=u_\varepsilon$.

En primer lugar, se reemplaza $v=u(t)$ en (47), teniendo en cuenta

$$(49)\qquad \begin{cases} \text{a) } \exists\ \alpha_0>0 \ /\ a(v,v)\ge\alpha_0\|v\|_1^2 \quad , \quad \forall\, v\in V\ , \\ \text{b) } (\beta(u(t)),u(t))\ge 0 \quad , \quad \forall\, t\in[0,T]\ , \\ \text{c) } \displaystyle\int_{\Gamma_1} u^2(t)\,d\Gamma \ge 0 \quad , \forall\, t\in[0,T]\ , \\ \text{d) } \displaystyle-\int_{\Omega} u(t)\,dx \le \sqrt{\text{med}(\Omega)}\,\|u(t)\|_H\ , \\ \text{e) } \alpha\,\theta_1\,t\displaystyle\int_{\Gamma_1} u(t)\,d\Gamma \le \alpha\,\theta_1\,T\,\sqrt{\text{med}\Gamma_1)}\,\|\gamma_0\|\,\|u(t)\|_1 \end{cases}$$

donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to \Gamma$ es el operador traza, y utilizando la desigualdad

$$x\,y \le \frac{\lambda^2}{2}\,x^2 + \frac{1}{2\lambda^2}\,y^2 \quad , \quad \forall\ \lambda > 0 \ , \tag{50}$$

al integrar en el intervalo $(0,t)$, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\,\|u(t)\|_1^2 + \frac{\alpha_0}{2}\int_0^t \|u(s)\|_1^2\,ds \le C_1 \quad , \quad \forall\ t \in [0,T], \tag{51}$$

donde C_1 es una adecuada constante independiente de $\varepsilon > 0$. En virtud de lo anterior resulta

$$\{u_\varepsilon\} \text{ C conj. acotado de } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{52}$$

Es importante señalar que si $\mathrm{med}(\Gamma_3) = 0$ la condición a) no es válida, pero siguen siéndolo las acotaciones realizadas debido a la coercitividad de a_α sobre $H^1(\Omega)$.

En segundo lugar, sean $t \in [0,T)$ y $h > 0$ de manera que $t+h \in [0,T]$. Si en la IVP (47) al instante t $(t+h)$ se reemplaza $v = u(t+h) - u(t) \in V$ $(v = u(t) - u(t+h) \in V)$, se suman ambas desigualdades, se utiliza la monotonía del operador β, se divide ambos miembros por h^2 y se pasa al límite $h \to 0$, entonces se deduce que

$$\frac{1}{2}\,\|u'(t)\|_1^2 + \int_0^t a(u'(s),u'(s))\,ds + \alpha \int_0^t \int_{\Gamma_1} (u'(s))^2\,ds\,d\Gamma \le \tag{53}$$

$$\le \alpha\,\Theta_1 \int_0^t \int_{\Gamma_1} u'(s)\,ds\,d\Gamma + \frac{1}{2}\,\|u'(0)\|_1^2 \ , \quad t \in [0,T]$$

Tomando $t = 0$ en (47), se obtiene

$$(u_\varepsilon'(0),v) = L(v) \ , \quad \forall\ v \in V, \tag{54}$$

con lo cual $\|u'_\varepsilon(0)\|_1 \le C_2$, donde C_2 es una constante independiente de ε. Si se utiliza en (53) la desigualdad (50), se obtienen las siguientes estimaciones:

$$\{u_\varepsilon'\} \text{ C conj. acotado de } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{55}$$

De (47), resulta

$$\frac{1}{\varepsilon}\,(\beta(u_\varepsilon(t)),v) = -(u_\varepsilon'(t),v) - a_\alpha(u_\varepsilon(t),v) + L_\alpha(v) \ , \quad \forall\ v \in V, \quad t \in [0,T], \tag{56}$$

y, por lo tanto

$$\left\{\frac{1}{\varepsilon}\,\beta(u_\varepsilon)\right\} \text{ C conj. acotado de } L^2(0,T;V'). \tag{57}$$

iii) Debido a las estimaciones (52), (55) y (57) puede deducirse, por aplicación de teoremas clásicos del análisis funcional que existe una sub-sucesión (por conveniencia, será igualmente notada por u_ε) tal que, cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene

$$(58)\qquad \begin{cases} u_\varepsilon \to u \ \text{ en } \ L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ débil,} \\ u'_\varepsilon \to u' \ \text{ en } \ L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ débil y en } L^\infty(0,T;H) \text{ débil estrella,} \\ \beta(u_\varepsilon) \to 0 \ \text{ en } \ L^2(0,T;V') \text{ fuerte.} \end{cases}$$

De (58) se deduce que $u(0)=0$ y $u(t)\in K$, $\forall\ t\in[0,T]$.

Sea el conjunto $\mathcal{K}$, definido por:

$$(59)\qquad \mathcal{K}=\left\{w\in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \ / \ w(t)\in K,\ \forall\ t\in[0,T]\right\}$$

Si se elige $v\to v(t)-u_\varepsilon(t)$ en (47), con $v\in\mathcal{K}$, se utiliza el hecho que $\beta(v(t))\geq 0$ y que el operador β es monótono, se integra en el intervalo $[0,T]$ y se tienen en cuenta las estimaciones siguientes:

$$(60)\qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T (u'_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(T)\|_H^2 \geq \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 = \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^T (u'(t),u(t))\,dt, \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T a_\alpha(u_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\,dt \geq \int_0^T a_\alpha\,(u(t),u(t))\,dt. \end{cases}$$

pasando al límite inferior en los dos miembros, se obtiene

$$(61)\qquad \int_0^T (u'(t),w(t)-u(t))\,dt + \int_0^T a_\alpha(u(t),w(t)-u(t))\,dt \geq$$

$$\geq \int_0^T L_\alpha(w(t)-u(t))\,dt\ ,\quad \forall\ w\in\mathcal{K}.$$

Sean $v\in K$, $t\in(0,T)$ y $w\in\mathcal{K}$ definido por:

$$(62)\qquad w(s)=\begin{cases} v & \text{si } \ s\in(t-h,t+h)\ , \\ u(s) & \text{si } \ s\notin(t-h,t+h)\ , \end{cases}$$

donde $h>0$ es un parámetro destinado a tender a cero.

Entonces, si se utiliza w en (61), se divide por $2h$ y se pasa al límite $h\to 0$ aplicando un teorema de Lebesgue, se deduce (9) excepto posiblemente en un conjunto de medida nula.

EJERCICIO 14. Completar las demostraciones no realizadas en el Teorema 5 [Du2].

A continuación se estudiará el comportamiento de la solución u_α de (9), recientemente obtenida, en función del parámetro real $\alpha>0$ y se verá que cuando $\alpha\to+\infty$ la función u_α converge a la solución de la IVP (13).

V. ESTUDIO DE LA IVP (13).

Se demostrará el siguiente

TEOREMA 6. Sea $u_\alpha=u_\alpha(x,t)$ la solución de la IVP (9) para cada $\alpha>0$, dada por el Teorema 5.

i) Si $0<\alpha_1\leq\alpha_2$ entonces:

(63) $$0 \leq u_{\alpha_1}(x,t) \leq u_{\alpha_2}(x,t) \leq t\, H(x) \quad \text{en } \bar{Q},$$

donde $H=H(x)\geq 0$ es la solución del siguiente problema:

(64) $$\begin{cases} \Delta H=0 \quad \text{en } \Omega, \\ H\big/_{\Gamma_1}=\theta_1 \ , \ \dfrac{\partial H}{\partial n}\Big/_{\Gamma_2}=0 \ , \ H\big/_{\Gamma_3}=0. \end{cases}$$

ii) Se tiene que:

(65) $$0 \leq u'_\alpha(x,t) \leq H(x) \quad \text{en } \bar{Q}.$$

iii) Cuando $\alpha\to+\infty$, la sucesión u_α converge a la única solución u de la IVP (13).

DEMOSTRACION. i) a) En primer lugar, se verá que $u_\alpha(x,t)\leq t\, H(x)$ en $\bar{Q}$, $\forall\ \alpha>0$, lo cual es equivalente a que $w\equiv 0$, donde

(66) $$w(x,t)=(u_\alpha(x,t)-t\, H(x))^+.$$

Se sabe que $0\leq w\leq u_\alpha$ en $\bar{Q}$, $w\big/_{\Gamma_3}=0$ y por ende $w\in V$. Si en (9) se pone $v=u_\alpha-w\in K$, se obtiene:

(67) $$(u'_\alpha(t),w(t)) + a\,(u_\alpha(t),w(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t)-t\,\theta_1)\, w(t)\, d\Gamma \leq$$

$$\leq L(w(t)) \leq 0 .$$

Teniendo en cuenta que:

$$
(68)\quad \begin{cases}
a_1)\ a(u_\alpha(t),w(t)) = a(u_\alpha(t) - H\,t\ ,\ w(t)) + a(H\,t\ ,\ w(t)) = \\
\qquad\qquad = a(w(t)\ ,\ w(t)) + t\ a(H\ ,\ w(t)) = \\
\qquad\qquad = a(w(t)\ ,\ w(t)) + t \int_{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial n}\, w(t)\ d\Gamma \geq \\
\qquad\qquad \geq a(w(t)\ ,\ w(t)), \\
a_2) \int_{\Gamma_1} (u_\alpha(t) - t\ \Theta_1)\ w(t)\ d\Gamma = \int_{\Gamma_1} w^2(t)\ d\Gamma\ , \\
a_3)\ (u'_\alpha(t)\ ,w(t)) = (w'(t),w(t)) + (H,w(t)) \geq (w'(t),w(t)),
\end{cases}
$$

entonces se deduce que

$$
(69)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_H + a(w(t),w(t)) + \alpha \int_{\Gamma_1} w^2(t)\ d\Gamma \leq 0,\quad t\in[0,T]\ ,
$$

que, conjuntamente con la condición $w(0)=0$, se obtiene que $w\equiv 0$ en Q.

b) En segundo lugar se verá que $u_1 \leq u_2$ en $\overline{Q}$, donde $u_i = u_{\alpha_i}$ para $i=1, 2$.

Sea $w=(u_1-u_2)^+ \in K$. Si en las IVP (9) correspondientes a u_1 y u_2 se reemplazan $v=u_1-w \in K$ y $v=u_2+w \in K$ respectivamente (siempre al instante t), se suman ambas desigualdades, entonces se obtiene

$$
(70)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_H + a(w(t),w(t)) + \int_{\Gamma_1} w(t)\,[\alpha_1\,(u_1(t) - \Theta_1\,t) - \alpha_2\,(u_2(t) - \Theta_1\,t)]\ d\Gamma \leq 0\ ,\ t\in[0,T].
$$

Como el integrando en la integral sobre Γ_1 es no-negativo, y w verifica la condición $w(0)=0$, entonces resulta $w\equiv 0$.

ii) a) Sean $t\in[0,T)$ y $h>0$ de manera que $t+h\in[0,T]$. Se verifica además $0 \leq w(x,t) = [u_\alpha(x,t+h) - u_\alpha(x,t)]^- \in K$.

Si en la IVP (9) al instante t se pone $v=u_\alpha(t) - w(t) \in K$ y en la correspondiente al instante $t+h$ se pone $v=u(t+h) - w(t) \in K$, sumando ambas desigualdades, resulta:

$$
(71)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_H + a(w(t),w(t)) \leq -\alpha \int_{\Gamma_1} w^2(t)\ d\Gamma \leq 0,\quad t\in[0,T).
$$

Teniendo en cuenta que $w(0)=u^-(x,h)=0$ en Ω, entonces $w(t)\equiv 0$ en Ω, es decir $u_\alpha(x,t) \leq u_\alpha(x,t+h)$, y por lo tanto $u'_\alpha \geq 0$.

b) Sea $U(x,t) = t\,H(x) - u_\alpha(x,t) \geq 0$. Sean $t\in[0,T)$ y $h>0$ de manera que $t+h\in[0,T]$. Se considera $w(x,t) = [U(x,t+h) - U(x,t)]^-$. De una manera análoga a lo anterior se concluye que $w\equiv 0$ con lo cual $U' \geq 0$, es decir $u'_\alpha \leq H$.

iii) La unicidad de solución de la IVP (13) se demuestra en forma

similar a lo utilizado para la IVP (9). Se verá, a continuación, que la existencia de solución de la IVP (13) se calculará como el límite de la sucesión u_α cuando $\alpha \to +\infty$. Para ello se obtendrán estimaciones a priori sobre u_α que permitirán el pasaje al límite.

Sea $w(x,t)=u_\alpha(x,t)-t\,H(x)$. Si se reemplaza $v=t\,H(x)$ en (9), suponiendo $\alpha>1$ (al estar destinado a tender a infinito), y utilizando la igualdad

$$a_\alpha(u,v) = a_1(u,v) + (\alpha-1)\int_{\Gamma_1} u\,v\,d\Gamma, \tag{72}$$

al integrar en el intervalo $[0,t]$, utilizando la coercitividad de a_1 y la desigualdad (50), resulta

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_1^2 + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^t \|w(s)\|_1^2\,ds + (\alpha-1)\int_0^t\int_{\Gamma_1} w^2(s)\,ds \le C\,, \quad t\in[0,T]\,, \tag{73}$$

donde C es una constante adecuada independiente de α. De (73), se obtienen para w (y por ende para u_α) las siguientes estimaciones a priori:

$$\text{(74)}\quad \begin{cases} (u_\alpha) \text{ C conj. acotado de } L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H), \\ (\alpha-1)\displaystyle\int_0^t\int_{\Gamma_1} (u_\alpha(s)-\theta_1\,s)^2\,d\Gamma\,ds \le C. \end{cases}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (63) y (65), se tiene que

$$\text{(75)}\quad \begin{cases} (u_\alpha) \text{ es creciente en } \alpha \text{ y acotada por } t\,H(x), \\ (u'_\alpha) \text{ C conj. acotado de } L^\infty(Q). \end{cases}$$

En virtud de las estimaciones precedentes se puede pasar al límite $\alpha\to+\infty$, obteniéndose la existencia y unicidad de la solución de la IVP (13) en la clase

$$\text{(76)}\quad \begin{cases} u \in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H), \\ u' \in L^2(0,T;H). \end{cases}$$

Además, $u_\alpha \to u$ en $L^2(0,T;H)$ fuerte y en $L^2(0,T;V)$ débil, y $u'_\alpha \to u'$ en $L^\infty(Q)$ débil estrella cuando $\alpha\to+\infty$.

EJERCICIO 15. Completar las demostraciones no realizadas en el Teorema 6 [D-L2]. Más aún, demostrar que la solución u de (13) verifica que $0\le u(x,t)\le t\,H(x)$ en $\bar{Q}$ y que $0\le u'(x,t)\le H(x)$ en $\bar{Q}$.

VI. GENERALIZACIONES, APLICACIONES Y COMENTARIOS FINALES.

A continuación se indicarán trabajos desarrollados como consecuencia de los visto anteriormente (la lista no pretende ser completa; en cada ítem se citan en general, los primeros trabajos realizados; pueden obtenerse más referencias en la bibliografía de los trabajos dados, en particular en [Ta4]):

A) Sobre el problema de Stefan multidimensional a una fase:

i) En [FrKi] se extienden los resultados al caso en que $\theta/_{\Gamma_1}=\theta_1(x,t)$ y $\theta(x,0)=\theta_0(x)$.

ii) Estudio de la regularidad de solución: En [Ca] se prueba que la frontera libre $t=R(x)$ está representada por una función localmente Lipschitz, cuya constante de Lipschitz depende de la propia solución, y que para el caso bidimensional la temperatura $\theta=u_t$ es una función continua a través de la frontera libre. En [CaFr] se extiende este último resultado para cualquier dimensión. En [Ya] se demuestra que $t=R(x)$ es uniformemente Lipschitz continua con una constante que depende solamente de los datos.

OBSERVACION 10. Lo realizado para el problema de Stefan a una fase fue extendido al de dos fases utilizando el siguiente cambio de función incógnita:

$$(77) \qquad \int_0^t [k_2\,\theta^+(x,s) - k_1\,\theta^-(x,s)]\,ds,$$

donde k_2 y k_1 son la conductividad térmica de la fase líquida y sólida respectivamente, y $\theta=\theta(x,t)$ representa la temperatura. Cabe señalar que la IVP que se obtiene para u es de tipo II, pues en ella aparece $(v-u'(t))$ en lugar de $(v-u(t))$, y además, es ahora $u'(t)$ la función que pertenece al conjunto convexo en cuestión.

B) Sobre el problema de Stefan multidimensional a dos fases:

i) Planteo del problema a través de la teoría de las IVP [Da, Du3, Du4, Fre1, Pa1, Ta1].

ii) Planteo con región pastosa (mushy region): [AeFr, Fre2].

iii) Planteo a través de una formulación débil [Fri1, Ka, Ol].

C) Sobre algunas aplicaciones:

i) Problema de la colada continua [Br1, Br2, Ro1, Ro2, Ru, Sa2].

ii) Problema de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos [Du4, Du5].

iii) Flujo en una celda de Hele-Shaw [ElJa].

iv) Problema de mecanismo electroquímico [El].

v) Problemas de control óptimo con cambio de fase [Bar, Pa2, Sa1, Sa2].

vi) Análisis numérico de iv (teria general) [Ci, Gl, GlLiTr], aplicación al problema de Stefan [Bo, Fe, IcKi, Je, JeRo, Kilc, NiPa, No, OdKi, PiVe].

APENDICE

ESPACIO DE FUNCIONES A VALORES VECTORIALES

Sea V un espacio de Banach sobre el conjunto de los números reales con norma $\|\cdot\|_V$. Se define al espacio $(1\le p\le+\infty)$:

$$(A_1)\qquad L^p(0,T;V)=\{f:(0,T)\to V \ / \ f \text{ es medible, } \|f\|<+\infty\}$$

donde

$$(A_2)\qquad \begin{cases} \|f\|=\left(\displaystyle\int_0^T \|f(t)\|_V^p\, dt\right)^{1/p}, \ 1\le p<+\infty, \\ \|f\|=\operatorname{Sup\,Es}_{t\in(0,T)} \|f(t)\|_V, \ p=+\infty \end{cases}$$

Puede notarse que $L^p\left(0,T;L^p(\Omega)\right)=L^p((0,T)x\Omega)$.

Se demuestra que $L^p(0,T;V)$ es un espacio de Banach; para $1<p<+\infty$, es además, reflexivo, si V lo es, y su dual puede identificarse con $L^q(0,T;V')$, donde $q^{-1}+p^{-1}=1$.

Se define el espacio de las distribuciones sobre (0,T) a valores en V como

$$(A_3)\qquad D'(0,T;V)=\{f:D(0,T)\to V \ / \ f \text{ es lineal y continua}\},$$

donde D(0,T) representa el espacio de las distribuciones sobre el intervalo (0,T).

Se puede definir el siguiente operador:

$$(A_4)\qquad F:L^p(0,T;V)\to D'(0,T;V) \ / \ F(f)=\tilde{f}$$

donde

$$(A_5)\qquad \tilde{f}(\phi)=\int_0^t f(t)\,\phi(t)\,dt, \ \forall\ \phi\in D(0,T).$$

El operador F es lineal e inyectivo y, por lo tanto se puede identificar $f\in L^p(0,T;V)$ con la distribución $\tilde{f}\in D'(0,T;V)$, es decir que:

$$(A_6)\qquad L^p(0,T;V)\subset D'(0,T;V).$$

Para toda distribución $f\in D'(0,T;V)$ se define su derivada n-ésima con respecto a

la variable t de la siguiente manera:

$$(A_7) \qquad f^{(n)}(\phi)\left(=\frac{d^n f}{dt^n}(\phi)\right)=(-1)^n\, f\left(\frac{d^n \phi}{dt^n}\right),\ \forall\ \phi\in D(0,T).$$

Se definen los espacios de Sobolev a valores vectoriales por (m=0, 1, . . .):

$$(A_8) \qquad H^m(0,T;V)=\{f:(0,T)\to V \text{ medibles } /\ f^{(i)}\in L^2(0,T;V),\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ m\},$$

que resultan ser espacios de Hilbert con el producto escalar siguiente:

$$(A_9) \qquad (f,g)_{H^m(0,T;V)}=\sum_{i=0}^{m}\int_0^T \left(f^{(i)}(t),g^{(i)}(t)\right)_V\, dt.$$

En el caso en que sea m=0 se utiliza la notación $L^2(0,T;V)$.

REFERENCIAS

[Ar] M. ARTOLA: "Evolution equations: First order linear equations and monotonic parabolic problems", in Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, ICTP, Trieste (Sept.–Nov. 1976).

[Ag Fr] J. AGUIRRE PUENTE—M. FREMOND: "Frost propagation in wet porous media", in Lecture Notes in Mathematics, N° 503, Springer–Verlag, Berlin (1976), 137–147.

[Bai 1] C. BAIOCCHI: "Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux", C.R. Acad. Sc. Paris, 273A (1971), 1215–1217.

[Bai 2] C. BAIOCCHI: "Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica", Annali Mat. Pura Appl., 92 (1972), 107–127.

[Ba Ca] C. BAIOCCHI—A. CAPELO: "Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Aplicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1, 2, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

[Bar] V. BARBU: "Optimal control of variational inequalities", Research Notes in Mathematics N° 100, Pitman, London (1984).

[Bo] J. F. BOURGAT: "Résolution du problème de Stefan à deux phases par une inéquation variationnelle", Travail inédit.

[Br 1] T. BRIERE: "Application des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un metal fondu s'écoulant dans une gaine de refroidissement", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI, Paris (Juin 1976).

[Br 2] T. BRIERE: "Application des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un metal par passage dans une gaine de refroidissement", Ann. Fac. Sc. Toulouse, 2 (1980), 219–247.

[Ca] L.A. CAFFARELLI: "Some aspects of the one–fhase Stefan problem", Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 73–77.

[Ca Fr] L.A. CAFFARELLI—A. FRIEDMAN: "Continuity of the temperature in the Stefan Problem", Indiana Univ. Math. J., 28 (1979), 53–70.

[Ci] P.G. CIARLET: "The finite element method for elliptic problems", North–Holland, Amsterdan (1978).

[Da] A. DAMLAMIAN: "Problèmes aux limites non linéaires du type du problème de Stefan, et inéquations variationnelles d'évolution", dans Thèse d'Etat "Résolution de certaines inéquations variationnelles stationnaires et d'évolution", Univ Paris VI, Paris (Mai 1976).

[Du 1] G. DUVAUT: "Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zéro degré)", C.R. Acad. Sc. Paris, 276A (1973), 1461–1463.

[Du 2] G. DUVAUT: "Etude de problèmes unilatéraux en mécanique par des méthodes variationnelles", in New Variational Techniques in Mathematical Physics, CIME, Bressanone (16–17 June 1973), 45–102.

[Du 3] G. DUVAUT: "The solution of a two–phase Stefan Problem by a variational inequality", in Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, J.R. Ockendon–W.R. Hodgkins (Eds.), Clarendon Press, Oxford (1975), 173–181.

[Du 4] G. DUVAUT: "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", 2ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1975). Rapport de Recherche N° 185, LABORIA–IRIA, Le Chesnay (1976).

[Du 5] G. DUVAUT: "Diffusion de l'oxygène dans les tissus vivants", C.R. Acad. Sc. Paris, 282A (1976), 33–36.

[Du 6] G. DUVAUT: "Méthodes variationnelles, initiation et applications", Cours du D.E.A., Univ. Pierre–et–Marie–Curie (Paris VI), Paris (1979).

[Du Li] G. DUVAUT—J.L. LIONS: "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod, Paris (1972).

[Ek Te] I. EKELAND—R. TEMAN: "Analyse convexe et problèmes variationnels", Dunod–Gauthier Villars, Paris (1973).

[El] C.M. ELLIOTT: "On a variational inequality formulation of an electrochemical machining moving boundary problem and its approximation by the finite element method", J. Inst. Math. Appl., 25 (1980), 121–131.

[El Ja] C.M. ELLIOTT—V. JANOVSKY: "A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary", Proc. Royal Soc. Edinburgh, 88A (1981), 93-107.

[El Oc] C.M. ELLIOTT—J.R. OCKENDON: "Weak and variational methods for moving problems", Research Notes in Mathematics N° 59, Pitman, London (1982).

[Fe] L. FERRAGUT: "Resolución del problema de Stefan mediante métodos variacionales", Tesis, Univ. de Zaragoza, Zaragoza (setiembre 1982).

[Fre 1] M. FREMOND: "Variational formulation of the Stefan problem. Coupled Stefan problem-frost propagation in porous media", in Computational Methods in Non-linear Mechanics, J.T. Oden et. al. (Eds), The Texas Inst. for Computational Mechanics (Sept. 1974), 341-350.

[Fre 2] M. FREMOND: "Diffusion problems with free boundaries", in Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, I.C.T.P., Trieste (1976).

[Fri 1] A. FRIEDMAN: "The Stefan problem in several space variables", Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968), 51-87.

[Fri 2] A. FRIEDMAN: "Variational principes and free-boudary problems", J. Wiley, New York (1982).

[Fr Ki] A. FRIEDMAN—D. KINDERLEHRER: "A one-phase Stefan problem", Indiana Univ. Math. J., 24 (1975), 1005-1035.

[Gl] R. GLOWINSKI: "Numerical methods for nonlinear variational problems", Springer-Verlag, Berlin (1984).

[Gl Li Tr] R. GLOWINSKI—J.L. LIONS—R. TREMOLIERES: "Analyse numérique des inéquations variationnelles", Tome 1, 2, Dunod, Paris (1976).

[Ic Ki] Y. ICHIKAWA—N. KIKUCHI: "A one-phase multidimensional Stefan problem by the method of variational inequalities", Int. J. Numer. Meth. Eng., 14 (1979), 1197-1220.

[Je] J.W. JEROME: "Approximation of nonlinear evolution systems", Academic Press, New York (1983).

[Je Ro] J.W. JEROME—M. ROSE: "Error estimates for the multidimensional two-phase Stefan problem", Math. Comp., 39 (1982), 377-414.

[Ka] S.L. KAMENOMOSTSKAJA: "On the Stefan problem", Mat. Sb., 53 (1961), 489-514 (in Russian).

[Ki Ic] N. KIKUCHI—Y. ICHIKAWA: "Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities", Int. J. Numer. Meth. Eng., 14 (1979), 1221-1239.

[Ki St] D. KINDERLEHRER-G. STAMPACCHIA: "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[Li] J.L. LIONS: "Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires", Dunod-Gauthier Villars, Paris (1969).

[Li Ma] J.L. LIONS—E. MAGENES: "Problèmes aux limites non homogènes et applications", Vol. I, Dunod, Paris (1968).

[Ma] E. MAGENES: "Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems", in Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations, H.G. Garnier (Ed.), R. Reidel Publ. Comp., Dordrecht (1976), 239-312.

[Ni Pa] M. NIEZGODKA—I. PAWLOW: "Numerical analysis of degenerate Stefan problems", Control and Cybernetics, 14 (1985), 119-143.

[No] R.H. NOCHETTO: "Análisis numérico del problema de Stefan multidimensional a dos fases por el método de regularización", Tesis, Univ. de Buenos Aires, Buenos Aires (Setiembre 1983).

[Od Ki] J.T. ODEN, N. KIKUCHI: "Finite element methods for certain free boundary-value problems in mechanics", in Moving Boundary Problems, D.G. Wilson-A.D. Solomon-B.T. Boggs (Eds.), Academic Press, New York (1978), 147-164.

[Ol] D.A. OLEINIK: "A method of solution of the general Stefan problem", Soviet Math. Dokl, 1 (1960), 1350-1354.

[Pa 1] I. PAWLOW: "A variational inequality approach to generalized two-phase Stefan problen in several space variables", Ann. Mat. Pura Appl, 131 (1982), 333-373.

[Pa 2] I. PAWLOW: "Variational inequality formulation and optimal control of nonlinear evolution systems governed by free boundary problems", in Applied Nonlinear Functional Analysis, K.H. Hoffmann-R. Gorenflo (Eds.), Verlag Peter Lang, Franckfurt (1983), 213-250.

[Pi Ve] P. PIETRA—C. VERDI: "Convergence of the approximated free boundary for the multidimensional one-phase Stefan problem", Publicazione N° 440, Instituto di Analisi Numerica, Pavia (1985).

[Ro 1] J.F. RODRIGUES: "Sur un problème à frontière libre stationnaire traduisant la cristallisation d'un métal", C.R. Acad. Sc. Paris, 290A (1980), 823-825.

[Ro 2] J.F. RODRIGUES: "Sur la cristallisation d'un métal en coulée continue par des méthodes variationnelles", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI, Paris (Octobre 1980).

[Ru] L.I. RUBINSTEIN: "The Stefan problem", Trans. Math. Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).

[Sa 1] C. SAGUEZ: "Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Applications à des problèmes de frontière libre", Rapport de Recherche N° 191, IRIA, Rocquencourt (Octobre 1976).

[Sa 2] C. SAGUEZ: "Contrôle optimal de systèmes à frontière libre", Thèse d'Etat, Univ. de Compiègne, Compiègne (Septembre 1980).

[Ta 1] D.A. TARZIA: "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI, Paris (Mars 1979); C.R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941--944.

[Ta 2] D.A. TARZIA: "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI-CONICET, N° 5, Buenos Aires (1981).

[Ta 3] D.A. TARZIA: "Introducción a las inecuaciones variacionales parabólicas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", en preparación.

[Ta 4] D.A. TARZIA: "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981/82), 147-241. Ver también "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan problem", Technical Report of Instituto Matemático "U. Dini", Univ. di Firenze, Florence (1987), con 2500 referencias.

[Ya] C. YA-ZHE: "Global Lipschitz continuity of free boundaries in the one-phase Stefan problem", Annali Mat. Pura Appl., 142 (1985), 197-213.

PROMAR (CONICET - UNR),
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,
Unviversidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
(2000) Rosario - Argentina.