UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

I.S.B.N. 83268690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 13 al 17 de OCTUBRE - 1986

Volumen 2

14

Rosario - República Argentina

-1987-

ESTUDIOS TEORICOS BASICOS EN EL
PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL
A DOS FASES

Domingo Alberto TARZIA

En este cursillo se realizarán estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases para un cuerpo semi-infinito o finito. Debido a la escasez de tiempo de exposición, se indicarán sólo las propiedades básicas remitiéndose al lector a la bibliografía citada donde encontrará mayores detalles; cabe destacarse que en [2, 36, 38] se ha realizado la formulación del problema y se han estudiado diversas soluciones exactas y diferentes métodos teóricos como así también propiedades básicas que se tendrán en cuenta en lo que se desarrollará a continuación.

Sin pérdida de generalidad se tomará que la temperatura del cambio de fase es nula. Además, se considerará que con el sub-índice $i=1$ ($i=2$) se referirán propiedades referentes a la fase sólida (líquida). La nomenclatura utilizada es la dada en [36].

I. Desarrollo en serie

En [11], se considera el siguiente problema de Stefan a dos fases:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} T_{2t} - \alpha_2 T_{2_{xx}} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ T_{1t} - \alpha_1 T_{1_{xx}} = 0, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = 0, \quad t > 0 \\ k_2 T_{2_x}(s(t), t) - k_1 T_{1_x}(s(t), t) = L \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ T_1(x, 0) = h(x), \quad x > 0 \quad \text{con} \quad h(0) = 0 \\ T_{2_x}(0, t) = g(t), \quad t > 0 \\ s(0) = 0, \end{array} \right.$$

entonces se tiene el siguiente

EJERCICIO 1. Si se supone que $g=g(t)$ y $h=h(x)$ son funciones expresables por su serie de Taylor alrededor de $t=0$ y $x=0$ respectivamente con un radio de convergencia infinito, entonces la serie que representa $s=s(t)$ está dada de la siguiente manera:

$$(2) \quad s(t) = C_1 t + \frac{C_2}{2} t^2 + \dots$$

donde

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = [k_2 g(0) - k_1 h'(0)] / L \\ C_2 = \frac{1}{L} \left[k_2 (g'(0) - \frac{g(0)}{\alpha_2} C_1^2) - k_1 (\alpha_1 h'''(0) + C_1 h''(0)) \right]. \end{array} \right.$$

OBSERVACION 1. En [33] se plantea un problema de solidificación a dos fases para un cuerpo semi-infinito con coeficientes térmicos constantes en cada fase que se encuentra inicialmente en estado líquido a una temperatura $V=V(x) \geq \theta_f$, y que en el borde fijo $x=0$ se le impone una temperatura $U=U(t) \leq \theta_f$ para $t > 0$, donde θ_f representa la temperatura de cambio de fase.

Si se supone que $U=U(t)$ y $V=V(x)$ son funciones analíticas de sus respectivos argumentos y que verifican algunas otras hipótesis complementarias, se pueden hallar las temperaturas de las fases sólida $T_1=T_1(x, t)$ y líquida $T_2=T_2(x, t)$ como series convergentes de las variables $x/2\sqrt{\alpha_1 t}$ y $x/2\sqrt{\alpha_2 t}$ respectivamente, y la frontera libre

$s(t) = 2\sqrt{\alpha_1 t} \chi(t)$ donde $\chi(t)$ viene dada por una serie de potencia convergente. Si en $x=0$ se impone una condición de flujo, el problema es tratado en [34].

Últimamente, se han estado realizando numerosos trabajos con la utilización de una metodología análoga a la descripta.

II. Problema de solidificación con densidades diferentes

Se considera el problema de Stefan a dos fases (caso solidificación) para un cuerpo semi-infinito con coeficientes térmicos constantes pero que tenga en cuenta el salto de densidad bajo un cambio de fase, es decir $\rho_1 \neq \rho_2$.

Si la temperatura inicial es $T_0 > 0$ y sobre el borde fijo $x=0$ se impone una temperatura $-D < 0$, entonces el problema consiste en hallar la frontera libre $s=s(t) > 0$, definida para $t > 0$, y la temperatura

$$(4) \quad T(x,t) = \begin{cases} T_1(x,t) < 0 & \text{si } 0 < x < s(t) \text{ , } t > 0 \\ 0 & \text{si } x = s(t) \text{ , } t > 0 \\ T_2(x,t) > 0 & \text{si } x > s(t) \text{ , } t > 0 \end{cases}$$

definida para $x > 0$ y $t > 0$, de manera que satisfagan las siguientes condiciones [3]:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \alpha_1 T_{1_{xx}} = T_{1_t} \text{ , } 0 < x < s(t) \text{ , } t > 0 \\ \text{ii) } \alpha_2 T_{2_{xx}} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} s(t) T_{2_x} = T_{2_t} \text{ , } x > s(t) \text{ , } t > 0 \\ \text{iii) } T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = 0 \text{ , } t > 0 \\ \text{iv) } k_1 T_{1_x}(s(t), t) - k_2 T_{2_x}(s(t), t) = \rho_1 l s(t) \text{ , } t > 0 \\ \text{v) } T_2(x, 0) = T_0 > 0 \text{ , } x > 0 \\ \text{vi) } s(0) = 0 \\ \text{vii) } T_1(0, t) = -D < 0 \text{ , } t > 0 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 2. Verificar que la solución del problema (5) está dada por:

$$(6) \begin{cases} T_1(x,t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(x/2a_1\sqrt{t}) \\ T_2(x,t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(\delta_1 + x/2a_2\sqrt{t}) \\ s(t) = 2\sigma\sqrt{t}, \quad \sigma > 0 \end{cases}$$

donde A_1 , A_2 , B_1 y B_2 están expresados en función del coeficiente σ de la siguiente manera:

$$(7) \begin{cases} A_1(\sigma) = -D, \quad B_1(\sigma) = \frac{D}{\operatorname{erf}(\sigma/a_1)} \\ A_2(\sigma) = -B_2(\sigma)\operatorname{erf}(\sigma/a_0), \quad B_2(\sigma) = \frac{T_0}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_0)} \\ \varepsilon = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2, \quad \delta_1 = \sigma|c|/a_2 \\ a_0 = a_2/(1+|\varepsilon|), \quad a_i^2 = \sigma_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i} \quad (i=1,2) \end{cases}$$

siendo σ la única solución de la ecuación no-lineal:

$$(8) \quad F(x) = lx, \quad x > 0$$

con

$$(9) \quad F(x) = \frac{k_1}{\rho_1 a_1 \sqrt{\pi}} B_1(x) \exp(-x^2/a_1^2) - \frac{k_2}{\rho_1 a_2 \sqrt{\pi}} B_2(x) \exp(-x^2/a_2^2)$$

que satisface las siguientes propiedades:

$$(10) \quad F(0^+) = +\infty, \quad F(+\infty) = -\infty, \quad F' < 0 \quad \blacksquare$$

Se define una nueva variable espacial, introduciendo la cantidad de materia μ que hay en el intervalo $(0,x)$, definida por [25]:

$$(11) \quad \mu = \begin{cases} \rho_1 x & \text{si } 0 < x < s(t) \\ \rho_1 s(t) + \rho_2 (x - s(t)) & \text{si } x > s(t) \end{cases}$$

cuya dimensión física es

$$[\mu] = \text{masa/área transversal}$$

y su transformación inversa está dada por:

$$(12) \quad x = \begin{cases} \mu/\rho_1 & \text{si } 0 < \mu < e(t) \\ [\mu + (\rho_2 - \rho_1)s(t)]/\rho_2 & \text{si } \mu > e(t) \end{cases}$$

con

$$(13) \quad e(t) = \rho_1 s(t) \quad , \quad t > 0 .$$

Si se realiza el cambio de variables (11), (13) y

$$(14) \quad \begin{cases} W_1(\mu, t) = T_1(\mu/\rho_1, t) \quad , \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ W_2(\mu, t) = T_2\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} s(t) + \frac{\mu}{\rho_2}, t\right) \quad , \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

entonces el problema (5) se transforma en (EJERCICIO 3.)

$$(15) \quad \begin{cases} D_1 W_{1\mu\mu} = W_{1t} \quad , \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ D_2 W_{2\mu\mu} = W_{2t} \quad , \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \\ W_1(e(t), t) = W_2(e(t), t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ K_1 W_{1\mu}(e(t), t) - K_2 W_{2\mu}(e(t), t) = 1 \dot{e}(t) \quad , \quad t > 0 \\ W_2(\mu, 0) = T_0 \quad , \quad \mu > 0 \\ e(0) = 0 \\ W_1(0, t) = -D \quad , \quad t > 0 \end{cases}$$

donde

$$(16) \quad D_i = k_i \rho_i / c_i \quad , \quad K_i = k_i \rho_i \quad (i=1,2)$$

son respectivamente los nuevos coeficientes de difusión y de conducción térmica.

OBSERVACION 2. Teniendo en cuenta (15) se observa que un problema de Stefan a dos fases con coeficientes térmicos $k_1, \alpha_1, l, \rho_1 \neq \rho_2$ se transforma en otro con coeficientes térmicos $K_1, D_1, l, \rho_1 = \rho_2 = 1$, es decir, con densidades iguales a 1.

EJERCICIO 4. Se considera el problema (5bis), en el cual se reemplaza la condición (5vii) por [1]:

$$(5viibis) \quad k_1 T_{1x}(0, t) = h_0 / \sqrt{t} \quad , \quad t > 0 \quad (h_0 > 0).$$

(i) Si

$$(17) \quad h_0 > k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi} = T_0 \sqrt{k_2 \rho_2 c_2 / \pi}$$

entonces el problema de solidificación (5bis) tiene por solución a

$$(18) \quad \begin{aligned} T_1(x,t) &= C_1 + D_1 \operatorname{erf}(x/2a_1 \sqrt{t}) \\ T_2(x,t) &= C_2 + D_2 \operatorname{erf}(\delta_2 + x/2a_2 \sqrt{t}) \\ s(t) &= 2 \omega \sqrt{t}, \quad \omega > 0 \end{aligned}$$

donde C_1, C_2, D_1, D_2 están expresados en función del coeficiente ω de la siguiente manera

$$(19) \quad \begin{cases} C_1(\omega) = -D_1(\omega) \operatorname{erf}(\omega/a_1) & , & D_1(\omega) = a_1 h_0 \sqrt{\pi} / k_1 \\ C_2(\omega) = D_2(\omega) \operatorname{erf}(\omega/a_0) & , & D_2(\omega) = \frac{T_0}{\operatorname{erfc}(\omega/a_0)} \\ \delta_2 = \omega |\epsilon| / a_2 \end{cases}$$

siendo ω la única solución de la ecuación no-lineal:

$$(20) \quad F_0(x) = x, \quad x > 0$$

con

$$(21) \quad F_0(x) = \frac{h_0}{l\rho_1} \exp(-x^2/a_1^2) - \frac{k_2 T_0}{l\rho_1 a_2 \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2/a_2^2)}{\operatorname{erfc}(x/a_0)}$$

que satisface las siguientes propiedades:

$$(22) \quad \begin{cases} F_0(0^+) = (h_0 - k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi}) / l\rho_1, \\ F_0(+\infty) = -\infty, \quad F_0' < 0. \end{cases}$$

(ii) Si $h_0 \leq k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi}$ no existe solución al problema de solidificación (5bis); se tiene realmente un problema de conducción del calor en la fase líquida inicial. Más aún, el caso $h_0 = k_2 T_0 / a_2 \sqrt{\pi}$ corresponde al caso límite del problema (5) cuando $l \rightarrow \infty$.

(iii) La desigualdad (17) también puede obtenerse como sigue: Se plantea el siguiente problema de conducción del calor para el material semi infinito, que inicialmente está en la fase líquida a la temperatura constante $T_0 > 0$, es decir [30]:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 T_{xx} = T_t, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ T(x, 0) = T_0, \quad x > 0 \\ k_2 T_x(0, t) = h_0/\sqrt{t}, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

La solución de (23) está dada por:

$$(24) \quad T(x, t) = T_0 - h_0 a_2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(x/2a_2\sqrt{t})/k_2$$

siendo la temperatura en el borde fijo

$$(25) \quad T(0, t) = T_0 - h_0 a_2 \sqrt{\pi}/k_2, \quad t > 0$$

la cual es constante en el tiempo. Por lo tanto, el material semi-infinito que está inicialmente a una temperatura T_0 , y que está siendo enfriado por un flujo de calor $h_0/\sqrt{t}$ en el borde fijo $x=0$, tendrá un cambio de fase si y sólo si vale la desigualdad (17).

(iv) Otro método para obtener la desigualdad (17) consiste en realizar el cambio de variables (11), (13) y (14), y luego aplicar la desigualdad válida para el caso en que las densidades de masa sean iguales [35]. Más aún, la condición (5viibis) se transforma en

$$(26) \quad K_1 W_{1\mu}(0, t) = h_0/\sqrt{t}, \quad t > 0.$$

(v) Si se relacionan los problemas (5) y (5bis), se obtiene para el coeficiente σ de la frontera libre (6) la siguiente desigualdad:

$$(27) \quad \operatorname{erf}(\sigma/a_1) < \frac{D}{T_0} \frac{\rho_1 c_1 k_1}{\rho_2 c_2 k_2}.$$

EJERCICIO 5. Se realiza el cambio de variables (11), (13) y

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1(\mu, t) = c_1 T_1(\mu/\rho_1, t), \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ V_2(\mu, t) = c_2 T_2\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} s(t) + \frac{\mu}{\rho_2}, t\right), \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \end{array} \right.$$

entonces [25]:

(1) problema (5) se transforma en

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} D_1 V_{1\mu\mu} = V_{1t}, \quad 0 < \mu < e(t), \quad t > 0 \\ D_2 V_{2\mu\mu} = V_{2t}, \quad \mu > e(t), \quad t > 0 \\ V_1(e(t), t) = V_2(e(t), t) = 0, \quad t > 0 \\ D_1 V_{1\mu}(e(t), t) - D_2 V_{2\mu}(e(t), t) = 1 \dot{e}(t), \quad t > 0 \\ V_2(\mu, 0) = c_2 T_0, \quad \mu > 0 \\ e(0) = 0 \\ V_1(0, t) = -c_1 D, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

Más aún, si se considera la condición (5viibis), ésta se transforma en

$$(30) \quad D_1 V_{1\mu}(0, t) = h_0 / \sqrt{t}, \quad t > 0.$$

(ii) Si un material semi-infinito tiene sus coeficientes térmicos distintos en la transición de fase, es decir $k_1 \neq k_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ y $\rho_1 \neq \rho_2$ pero verifican que $\frac{k_1 \rho_1}{c_1} = \frac{k_2 \rho_2}{c_2}$ entonces el problema de Stefan a dos fases correspondiente se transforma en uno con los tres coeficientes térmicos iguales.

(iii) Si se tiene en cuenta (i) y (ii), se puede deducir la desigualdad (17) para el coeficiente h_0 para que el problema (5bis) tenga una solución que represente un problema con cambio de fase.

III. Sobre un modelo de solidificación de una aleación binaria

Se considera un material semi-infinito de una aleación binaria consistente en dos componentes A y B. Sea C la concentración del componente A. Se supone que la solidificación de la aleación está gobernada por un diagrama de equilibrio de fase consistente en una curva "liquidus" $T=f_L(C)$ y una curva "solidus" $T=f_S(C)$ con $0 < C < 1$. Se asume que f_L y f_S son funciones crecientes de la variable C con

$$(31) \quad \begin{cases} f_S(C) < f_L(C), \quad \forall C \in (0,1) \\ f_L(0) = f_S(0) = T_{cr}^A, \quad f_L(1) = f_S(1) = T_{cr}^B. \end{cases}$$

El material se encuentra en la fase sólida (líquida) si $T \leq f_S(C)$ ($T \geq f_L(C)$). Si se tiene que $f_S(C) < T < f_L(C)$, entonces el estado del material no está bien definido; se lo conoce con el nombre de zona pastosa (en inglés: mushy zone). (Ver más detalles en [12]).

Se considera que la aleación se encuentra inicialmente en estado líquido a la temperatura constante T_{in} y a la concentración constante C_{in} con $T_{in} \geq f_L(C_{in})$. Luego una temperatura $T_B < T_{cr}^A$ es impuesta en el borde fijo $x=0$ con lo cual un frente de solidificación $x=s(t)$ comienza separando la aleación en estado sólido ($x < s(t)$) del estado líquido ($x > s(t)$). La formulación matemática de este proceso de solidificación consiste en hallar la temperatura $T=T(x,t)$ y la concentración $C=C(x,t)$, ambas definidas para $x > 0$ y $t > 0$, y la frontera libre $s=s(t)$, definida para $t > 0$, de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{1t} = D_1 C_{1xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ C_{2t} = D_2 C_{2xx}, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ T_{1t} = \alpha_1 T_{1xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ T_{2t} = \alpha_2 T_{2xx}, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ T_{cr} = T_1(s(t), t) = f_S[C_1(s(t), t)], \quad t > 0 \\ T_{cr} = T_2(s(t), t) = f_L[C_2(s(t), t)], \quad t > 0 \\ D_2 C_{2x}(s(t), t) - D_1 C_{1x}(s(t), t) = \\ = [C_1(s(t), t) - C_2(s(t), t)] \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ k_1 T_{1x}(s(t), t) - k_2 T_{2x}(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} T_1(0,t) = T_B < T_{cr}^A, \quad t > 0 \\ T_2(x,0) = T_{in} > f_L(C_{in}), \quad t > 0 \\ C_2(x,0) = C_{in}, \quad x > 0 \\ C_{1x}(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ s(0) = 0. \end{array} \right.$$

PROPIEDAD 1. Existe una solución del problema (32) cualesquiera sean los datos inicial y de borde, y parámetros térmicos y de difusión. Más aún, para esta solución las concentraciones solidus y liquidus

$$(33) \quad C_S = C_1(s(t),t), \quad C_L = C_2(s(t),t)$$

como así también la temperatura de cambio de fase

$$(34) \quad T_{cr} = T_1(s(t),t) = T_2(s(t),t)$$

son constantes en el tiempo.

DEMOSTRACION. (EJERCICIO 6.) Verificar que esta solución viene dada de la siguiente manera:

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} C_1(x,t) = C_S, \quad T_{cr} = f_S(C_S) = f_L(C_L), \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_1 t} \\ C_2(x,t) = C_{in} + (C_L - C_{in}) \frac{\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{D_2 t})}{\operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\alpha_1/D_2})} \\ T_1(x,t) = T_B + (T_{cr} - T_B) \frac{\operatorname{erf}(x/2\sqrt{\alpha_1 t})}{\operatorname{erf}(\lambda)} \\ T_2(x,t) = T_{in} + (T_{cr} - T_{in}) \frac{\operatorname{erfc}(x/2\sqrt{\alpha_2 t})}{\operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\alpha_1/\alpha_2})} \end{array} \right.$$

donde λ y T_{cr} (ó C_S y C_L) satisfacen las siguientes condiciones

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_{in} - C_L}{C_S - C_L} = G(\lambda\sqrt{\alpha_1/D_2}) \\ T_{cr} = W_1(\lambda) \end{array} \right.$$

donde

$$(37) \begin{cases} G(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad , \quad A = \rho l \alpha_2 / k_2 \\ W_1(x) = T_B + \left[(T_{in} - T_B) + A G(x\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}) \right] \frac{\phi(x)}{1+\phi(x)} \\ \phi(x) = \frac{k_2 \alpha_1 \sqrt{\pi}}{k_1 \alpha_2} \frac{x \exp(x^2) \operatorname{erf}(x)}{G(x\sqrt{\alpha_1/\alpha_2})} . \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones (36) tiene una solución [27, 30], teniendo en cuenta las propiedades:

$$(38) \quad W_1(0^+) = T_B \quad , \quad W_1(+\infty) = T_{in} + \frac{1}{c_2} \quad , \quad W_1' > 0 .$$

IV. Solución autosemejante de un problema de Stefan multifase

Siguiendo [39] se considera un cuerpo semi-infinito ocupando la región $x > 0$. En el rango de temperaturas (T_{i-1}, T_i) ($i=1, 2, \dots, n$) el material existe en una fase con conductividad y difusividad térmica k_i y α_i respectivamente. En el instante inicial $t=0$ todo el cuerpo se encuentra a la temperatura uniforme T_n , y para $t > 0$ el borde fijo $x=0$ es mantenido a la temperatura constante T_0 (T_0 y T_n no son necesariamente temperaturas de cambio de fase). En la frontera libre $s_i = s_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), que separa las fases i y $(i+1)$, se genera calor de acuerdo a la condición de Stefan correspondiente, teniendo en cuenta al calor latente por unidad de volumen L_i del pasaje de la fase $(i+1)$ en la fase i .

Si, por conveniencia de notación, se introducen $y_0(t)=0$, $y_n(t)=+\infty$, entonces el problema consiste en hallar la temperatura $u_i = u_i(x, t)$ de la fase i ($i=1, 2, \dots, n$) y la frontera libre $s_j = s_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} u_{i_t} - \alpha_i u_{i_{xx}} = 0, \quad s_{i-1}(t) < x < s_i(t), \quad t > 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ u_i(s_{i-1}(t), t) = T_{i-1}, \quad t > 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ u_i(s_i(t), t) = T_i, \quad t > 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ k_i \frac{\partial u_i}{\partial x}(s_i(t), t) - k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}(s_i(t), t) = L_i \dot{s}_i(t), \quad t > 0, \\ \hspace{20em} (i=1, \dots, n-1) \\ u_n(x, 0) = T_n, \quad x > 0. \end{array} \right.$$

EJERCICIO 7. Verificar que

$$(40) \quad \begin{aligned} u_i(x, t) &= B_i + A_i \operatorname{erf}(\beta_i x / \sqrt{t}) \quad (i=1, \dots, n) \\ s_i(t) &= C_i \sqrt{t} \quad (i=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

es solución de (39), con

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i = (T_i - T_{i-1}) / \delta_i \\ B_i = T_{i-1} \operatorname{erf}(C_i \beta_i) - T_i \operatorname{erf}(C_{i-1} \beta_i) / \delta_i \\ \delta_i = \operatorname{erf}(C_i \beta_i) - \operatorname{erf}(C_{i-1} \beta_i) \\ \beta_i = 1 / 2\sqrt{\alpha_i} \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right.$$

donde las constantes C_i deben satisfacer el siguiente sistema de $(n-1)$ ecuaciones no-lineales:

$$(42) \quad \begin{aligned} k_i \beta_i A_i \exp(-C_i^2 \beta_i^2) - \frac{k_{i+1} \beta_{i+1} (T_{i+1} - T_i) \exp(-C_{i+1}^2 \beta_{i+1}^2)}{\delta_{i+1}} = \\ = \frac{L_i C_i \sqrt{\pi}}{4} \quad (i=1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

OBSERVACION 3. En [39] no fue considerada la cuestión de existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones (42) con $0 < C_i < C_{i+1}$.

Este problema fue estudiado en [40] y [41] para densidades de masa iguales y diferentes respectivamente. Más aún, se considera un salto Δ_i en

la transición de fases ($i=1, \dots, n-1$) para la temperatura.

El presente análisis de problemas con multifases aparecen generalmente en aleaciones.

V. Función de error modificada

La función de error, definida por

$$(43) \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

es bien conocido que resulta ser la única función que es solución del problema:

$$(44) \quad \begin{cases} y''(x) + 2x y'(x) = 0, & x > 0 \\ y(0) = 0, & y(+\infty) = 1. \end{cases}$$

Se define la función de error modificada de parámetro $\beta > 0$ como la única función solución del problema [10, 22]:

$$(45) \quad \begin{cases} \text{i) } \left\{ [1 + \beta y(x)] y'(x) \right\}' + 2x y'(x) = 0, & x > 0 \\ \text{ii) } y(0) = 0, & y(+\infty) = 1. \end{cases}$$

A dicha función se la nota por

$$(46) \quad y = \Phi_\beta(x)$$

que para $\beta=0$ se reduce a la función de error ($\Phi_0 = \text{erf}$).

EJERCICIO 8. Verificar que la función

$$(47) \quad T(x) = T_0 + (T_\infty - T_0) \Phi_\delta \left(\frac{x}{\sqrt{1 + \beta T_0}} \right)$$

con

$$(48) \quad 1 + \beta T_0 > 0, \quad \delta = \frac{\beta(T_\infty - T_0)}{1 + \beta T_0} (\geq -1)$$

satisface la ecuación diferencial (45i) con las condiciones de contorno siguientes:

$$(49) \quad T(0) = T_0, \quad T(+\infty) = T_\infty.$$

Una generalización del Ejercicio anterior puede darse

por

EJERCICIO 9. Se designa con $y = \phi_{\beta\gamma n}(x)$ la solución del problema

$$(50) \quad \begin{cases} \text{i) } (D(y) y'(x))' + 2x y'(x) = 0 \\ \text{ii) } y(0) = 0, \quad y(+\infty) = 1 \end{cases}$$

donde

$$(51) \quad D(y) = (1 + \beta y + \gamma y^2)^n$$

Entonces la función, definida por

$$(52) \quad T(x) = T_0 + (T_\infty - T_0) \phi_{\delta \epsilon n}(\alpha x)$$

donde

$$(53) \quad \begin{cases} \delta = \frac{(\beta + 2\gamma T_0)(T_\infty - T_0)}{1 + \beta T_0 + \gamma T_0^2}, & \epsilon = \frac{\gamma(T_\infty - T_0)^2}{1 + \beta T_0 + \gamma T_0^2} \\ \alpha = (1 + \beta T_0 + \gamma T_0^2)^{-n/2} \end{cases}$$

es la solución de la ecuación diferencial (50i) que satisface las condiciones de contorno (49). Más aún, se tiene que:

$$(54) \quad \begin{cases} \text{i) } \phi_{\beta 0 1} = \phi_\beta, & \text{ii) } \gamma = 0 \Rightarrow \epsilon = 0, \\ \text{ii) } \beta = 0, \quad \gamma \neq 0, & T_\infty \neq T_0, \quad T_0 \neq 0 \Rightarrow \delta \neq 0. \end{cases}$$

VI. Problemas con coeficientes térmicos variables

En primer lugar, se considera un problema de Stefan (caso solidificación) a una fase con coeficientes térmicos constantes excepto la conductividad térmica que depende en forma afín de la temperatura, cuya formulación matemática está dada por

$$(55) \quad \begin{cases} T_t = (\alpha(T) T_x)_x, & 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ T(0, t) = T_0 < T_f, & t > 0 \\ T(s(t), t) = T_f, & t > 0 \\ k_f T_x(s(t), t) = \rho l \dot{s}(t), & t > 0 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

donde

$$(56) \quad \begin{cases} \alpha(T) = \frac{k(T)}{\rho c} = \alpha_0 \left(1 + \beta \frac{T-T_0}{T_f-T_0} \right), & \alpha_0 = \frac{k_0}{\rho c} \\ k_f = k(T_f) = k_0 (1 + \beta). \end{cases}$$

EJERCICIO 10. Si se define

$$(57) \quad \theta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_f - T_0}$$

entonces una solución de (55), (56) está dada por:

$$(58) \quad \begin{cases} \theta = \theta(\eta) = \frac{\phi_\delta(\eta)}{\phi_\delta(\lambda)}, & \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}} \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_0 t} \end{cases}$$

donde los coeficientes δ y λ deben satisfacer el sistema de ecuaciones no-lineales siguiente:

$$(59) \quad \begin{cases} \delta \phi_\delta(\lambda) = \beta \\ \frac{\phi_\delta'(\lambda)}{\lambda \phi_\delta(\lambda)} = \frac{2}{Ste (1 + \beta)}, & (Ste = c(T_f - T_0)/l). \end{cases}$$

Se considera ahora un problema de solidificación a dos fases con coeficientes térmicos constantes, excepto para la conductividad térmica que depende en forma afín de la temperatura, pero que pueden ser diferentes para fases distintas, en particular se tiene en cuenta que $\rho_1 \neq \rho_2$ [10]. La formulación matemática consiste en hallar $T_1 = T_1(x,t)$, $T_2 = T_2(x,t)$ y $s = s(t)$ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(60) \quad \begin{cases} T_{1t} = (\alpha_1(T_1) T_{1x})_x, & 0 < x < s(t), t > 0 \\ T_{2t} = (\alpha_2(T_2) T_{2x})_x + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} s(t) T_{2x}, & x > s(t), t > 0 \\ T_2(x, 0) = T_{in} > T_f, & x > 0 \\ T_1(0, t) = T_0 < T_f, & t > 0 \\ T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = T_f, & t > 0 \end{cases}$$

$$(60) \quad \begin{cases} k_1 T_{1x}(s(t), t) - k_2 T_{2x}(s(t), t) = \rho_1 \dot{s}(t), & t > 0 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

donde

$$(61) \quad \begin{cases} \alpha_i(T_i) = \frac{k_i(T_i)}{\rho_i c_i} = \alpha_{0i} \left(1 + \beta_i \frac{T_i - T_0}{T_{in} - T_0} \right) \\ \alpha_{0i} = \frac{k_{0i}}{\rho_i c_i}, \quad k_i = k_i(T_{in}) = k_{0i}(1 + \beta_i) \end{cases}$$

EJERCICIO 11. Si se definen

$$(62) \quad \begin{cases} \theta_i(x, t) = \frac{T_i(x, t) - T_0}{T_{in} - T_0}, \quad \theta_f = \frac{T_f - T_0}{T_{in} - T_0}, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_{01} t}} \\ h = \frac{\rho_1 l \alpha_{01}}{k_1(T_{in} - T_0)}, \quad k_{12} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad c_{12} = \frac{c_2}{c_1} \end{cases}$$

entonces una solución de (60), (61) está dada de la siguiente manera:

$$(63) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\eta) = \theta_f \frac{\Phi_\delta(\eta)}{\Phi_\delta(\lambda)}, \quad 0 < \eta < \lambda \\ \theta_2 = \theta_2(\eta) = 1 - (1 - \alpha) \left[1 - \Phi_\epsilon \left(\frac{\eta + \left(\frac{1}{\rho_{12}} - 1 \right) \lambda}{\sqrt{\alpha_{12}(1 + \beta_2 \alpha)}} \right) \right], \quad \eta > \lambda \\ s(t) = 2 \lambda \sqrt{\alpha_{01} t} \end{cases}$$

donde los parámetros λ , δ , α , ϵ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$(64) \quad \begin{cases} \epsilon = \frac{\beta_2(1 - \alpha)}{1 + \beta_2 \alpha}, \quad \delta \Phi_\delta(\lambda) = \beta_1 \theta_f, \quad \Phi_\epsilon(\xi) = \frac{\theta_f - \alpha}{1 - \alpha} \\ \frac{\Phi'_\delta(\lambda)}{\lambda \Phi_\delta(\lambda)} - \frac{1 - \theta_f}{\theta_f} \frac{c_{12}}{1 + \beta_2 \alpha} \frac{\Phi'_\epsilon(\xi)}{1 - \Phi_\epsilon(\xi)} = \frac{2h}{\theta_f} \end{cases}$$

donde el coeficiente ξ está dado por

$$(65) \quad \xi = \frac{\lambda}{\rho_{12} \sqrt{\alpha_{12}(1 + \beta_2 \alpha)}}.$$

OBSERVACION 4. En [19, 26], se estudia el problema unidimensional a dos fases con coeficientes térmicos no-lineales del tipo Storm [32].

La condición de Storm está dada por [19]

$$(66) \quad \frac{1}{S(T)} \frac{d}{dT} \left(\sqrt{S(T)/k(T)} \right) = \text{cte}$$

o en su forma equivalente (EJERCICIO 12.) por [26]:

$$(67) \quad \frac{1}{k(T)S(T)} \frac{d}{dT} \left[\log \sqrt{S(T)/k(T)} \right] = \text{cte}$$

donde $S(T) = \rho c(T)$, $c(T)$ es el calor específico, $k=k(T)$ es la conductividad térmica y ρ es la densidad de masa constante.

VII. El problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito con condiciones de temperatura

Se considera un material finito, representado por el intervalo $(0,1)$, que inicialmente consta de una parte $(0,b)$ constituida por agua y la restante $(b,1)$ constituida por hielo. A dicho sistema se le imponen temperaturas dadas sobre los bordes $x=0$ y $x=1$. El problema consiste en hallar dos funciones $u=u(x,t)$ y $v=v(x,t)$, la frontera libre $x=S(t)$ con $S(0)=b$ y un instante de tiempo $T>0$, de manera que se satisfagan las siguientes condiciones [6]:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \alpha_2 u_{xx} - u_t = 0 \quad , \quad 0 < x < S(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{ii) } \alpha_1 v_{xx} - v_t = 0 \quad , \quad S(t) < x < 1 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iii) } u(S(t), t) = v(S(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iv) } \dot{S}(t) = K_1 v_x(S(t), t) - K_2 u_x(S(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{v) } u(0, t) = f(t) > 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{vi) } v(1, t) = g(t) < 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{vii) } u(x, 0) = \phi(x) \geq 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq b \\ \text{viii) } v(x, 0) = \psi(x) \leq 0 \quad , \quad b \leq x \leq 1 \\ \text{ix) } S(0) = b \quad , \quad 0 < b < 1 \end{array} \right.$$

donde $0 < b < 1$, $K_i = k_i / \rho \ell$, $\alpha_i = k_i / \rho c_i$ ($i=1,2$).

EJERCICIO 13. Si las condiciones (68i-iii, v-ix) permanecen inalteradas, entonces la condición de Stefan (68iv) es equivalente a la siguiente condición integral:

$$(69) \quad S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^t [K_1 v_x(x_1, \tau) - K_2 u_x(x_2, \tau)] d\tau \\ - \frac{K_2}{\alpha_2} \int_{x_2}^{S(t_0)} u(x, t) dx + \frac{K_1}{\alpha_1} \int_{S(t)}^{x_1} v(x, t) dx + \\ + \frac{K_2}{\alpha_2} \int_x^{S(t)} u(x, t) dx + \frac{K_1}{\alpha_1} \int_{S(t_0)}^{x_1} v(x, t_0) dx$$

donde $0 < x_2 \leq S(\tau) \leq x_1 < 1$, $0 < t_0 \leq \tau \leq t$.

Se supone que los datos del problema satisfacen las hipótesis siguientes:

(A) Las funciones $f=f(t)$ y $g=g(t)$ son continuas a trozos y existen cuatro constantes A_i , B_i ($i=1,2$) de manera que

$$(70) \quad 0 < A_1 < f(t) < B_1, \quad -B_2 < g(t) < -A_2 < 0, \quad t \in (0, T].$$

(B) Las funciones $\phi=\phi(x)$ y $\psi=\psi(x)$ son continuas a trozos y existen cuatro constantes a_i , η_i ($i=1,2$) de manera que

$$(71) \quad \begin{cases} 0 \leq \phi(x) \leq a_1 [1 - \exp(-\eta_1(b-x)/\alpha_2)] & , \quad x \in [0, b] \\ 0 > \psi(x) > -a_2 [1 - \exp(-\eta_2(x-b)/\alpha_1)] & , \quad x \in [b, 1] . \end{cases}$$

Las dos condiciones dadas en (71) indican que $\phi(b) = \psi(b) = 0$ y que las funciones ϕ y ψ son localmente Lipschitz en $x=b$.

(C) Se asume que

$$(72) \quad \Gamma = \text{Max}(2 K_2 \epsilon_1 / \alpha_2, 2 K_1 \epsilon_2 / \alpha_1) < 1$$

donde

$$(73) \quad \epsilon_1 = \text{Max}(B_1, a_1), \quad \epsilon_2 = \text{Max}(B_2, a_2).$$

DEFINICION 1. Por una solución u , v , S del problema de Stefan (68), se entiende que:

i) Las derivadas de u y v que aparecen en las ecuaciones (68i,ii)

son funciones continuas en sus respectivos dominios de definición; u y v son continuas en la clausura de tales dominios excepto en los puntos de discontinuidad de los datos, en los cuales debe verificarse que

$$0 \leq \underline{\lim} u \leq \lim u < +\infty, \quad -\infty < \underline{\lim} v \leq \lim v \leq 0$$

cuando los puntos del dominio se acercan a tales puntos de discontinuidad.

ii) $S \in C^1(0,T) \cap C^0[0,T]$ con $S(0)=b$ y $0 < S(t) < 1$ en $[0,T]$ (Si las derivadas de ϕ y ψ son continuas en un entorno de $x=b$, entonces $S \in C^1[0,T]$).

iii) Las funciones u , v y S satisfacen las ecuaciones y condiciones dadas en (68). ■

OBSERVACION 5. Para una dada función S Lipschitz en $[0,T]$ se puede definir un problema auxiliar del (68) consistente en hallar u y v que verifican i) de la definición anterior y satisfacen las condiciones (68 i-iii, v-ix). Según [5, 18], la solución del problema auxiliar existe y es única bajo las hipótesis (A) y (B). Más aún, $u_x(S(t),t)$ y $v_x(S(t),t)$ existen y son continuas en $(0,T]$. Por otra parte, si las derivadas de ϕ y ψ son continuas en un entorno de $x=b$, entonces $u_x(S(t),t)$ y $v_x(S(t),t)$ existen y son continuas en $[0,T]$. ■

PROPIEDAD 2. Bajo las hipótesis (A), (B) y (C) existe una solución u,v,S del problema de Stefan (68) para todo $T > 0$.

DEMOSTRACION. Se utiliza el método del argumento retardado. Para cada θ , suficientemente pequeño, se define:

$$(74) \quad \chi_\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq b-\theta \\ 0 & \text{si } b-\theta < x < b+\theta \\ 1 & \text{si } b+\theta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se extienden las funciones ϕ y ψ al intervalo $[0,1]$ por cero fuera de sus respectivos dominios de definición, y se definen las funciones $\phi_\theta = \phi \chi_\theta$ y $\psi_\theta = \psi \chi_\theta$. Se considera el intervalo de tiempo

$[0, \theta]$ y se definen u_θ y v_θ como la solución del problema auxiliar con datos $f, g, \phi_\theta, \psi_\theta$ y frontera móvil S_θ dada por $S_\theta(t) = b$ en $[0, \theta]$. Luego se define S_θ en el intervalo $[\theta, 2\theta]$ retardando el argumento en la condición de Stefan (68iv), a través de

$$(75) \quad \begin{cases} S_\theta(t) = b + \int_0^t \left[K_1 v_{\theta x}(S_\theta(\tau - \theta), \tau - \theta) - K_2 u_{\theta x}(S_\theta(\tau - \theta), \tau - \theta) \right] d\tau \\ \theta \leq t \leq 2\theta \end{cases}$$

y así sucesivamente.

EJERCICIO 14. Completar la demostración ([6]). ■

PROPIEDAD 3. Sean u_i, v_i, S_i soluciones del problema de Stefan (68) para los datos f_i, g_i, ϕ_i, ψ_i y b_i ($i=1,2$) que satisfacen las hipótesis (A), (B) y (C). Se asume además que ϕ_i y ψ_i ($i=1,2$) satisfacen las hipótesis:

$$(D) \quad \phi \in C^1[0, \gamma], \quad \psi \in C^1[1-\gamma, 1], \quad \gamma > 0$$

entonces se tienen las siguientes conclusiones:

i) Existe una constante $C = C(T, \alpha_i, K_i, A_i, B_i, a_i, \eta_i, \gamma, b_0)$ con $b_0 = \min(b_1, b_2, 1-b_1, 1-b_2)$ de manera que para $t \in [0, T]$ se tiene el siguiente resultado de estabilidad:

$$(76) \quad |S_1(t) - S_2(t)| \leq C \left[|b_1 - b_2| + \sup_{0 \leq \tau \leq t} (|f_1(\tau) - f_2(\tau)| + |g_1(\tau) - g_2(\tau)|) \right. \\ \left. + \sup_{0 \leq x \leq 1} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{0 \leq x \leq \gamma} |\phi_1'(x) - \phi_2'(x)| + \sup_{1-\gamma \leq x \leq 1} |\psi_1'(x) - \psi_2'(x)| \right]$$

donde ($i=1,2$):

$$(77) \quad \phi_i(x) = \begin{cases} \frac{K_2}{\alpha_2} \phi_i(x) = \frac{c_2}{l} \phi_i(x), & 0 \leq x \leq b_i \\ \frac{K_1}{\alpha_1} \psi_i(x) = \frac{c_1}{l} \psi_i(x), & b_i \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ii) Bajo las hipótesis (A), (B), (C) y (D) la solución del problema de Stefan (68) es única.

iii) Si los datos verifican que $f_1 \leq f_2, g_1 \leq g_2, \phi_1 \leq \phi_2, \psi_1 \leq \psi_2$ y $b_1 \leq b_2$,

entonces las fronteras libres satisfacen la monotonía $S_1 \leq S_2$.

iv) Si los datos f y g verifican la condición

$$(78) \left\{ \begin{array}{l} \int_1^{+\infty} [(f(t)-f_\infty)^2 + (g(t)-g_\infty)^2] dt < +\infty \\ \text{con } 0 < A_1 < f_\infty < B_1, \quad -B_2 < g_\infty \leq -A_2 < 0 \end{array} \right.$$

entonces la solución u, v, S del problema de Stefan (68) tiende asintóticamente a la solución estacionaria.

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} u_\infty(x) = f_\infty(1-x/S_\infty), \quad x \in [0, S_\infty] \\ v_\infty(x) = -g_\infty(S_\infty-x)/(1-S_\infty), \quad x \in [S_\infty, 1] \\ 0 < S_\infty = \frac{k_2 f_\infty}{k_2 f_\infty - k_1 g_\infty} < 1. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION. i) EJERCICIO 15. ([6]).

ii) Surge como corolario de i).

iii) Se supone en primer lugar que $b_1 < b_2$. Entonces se verá que $S_1(t) < S_2(t)$ para $t > 0$. Por el absurdo se supone que existe un primer tiempo t_0 de manera que $S_1(t_0) = S_2(t_0)$ y $\dot{S}_2(t_0) \leq \dot{S}_1(t_0)$. Por el principio del máximo se tiene que $u_2 - u_1 > 0$ en $0 < x < S_1(t)$, $0 < t < t_0$. Como $u_2(S_1(t_0), t_0) = u_1(S_1(t_0), t_0) = 0$, resulta ser que $(S_1(t_0), t_0)$ es un punto de mínimo para $u_2 - u_1$, y por ende se deduce que $u_{2x}(S_1(t_0), t_0) < u_{1x}(S_1(t_0), t_0)$. Análogamente se tiene que $v_2 - v_1 > 0$ en $S_2(t) < x < 1$, $0 < t < t_0$ y por ende se deduce que $v_{2x}(S_1(t_0), t_0) > v_{1x}(S_1(t_0), t_0)$, con lo cual se obtiene

$$(80) \begin{aligned} \dot{S}_2(t_0) &= K_1 v_{2x}(S_2(t_0), t_0) - K_2 u_{2x}(S_2(t_0), t_0) > \\ &> K_1 v_{1x}(S_1(t_0), t_0) - K_2 u_{1x}(S_1(t_0), t_0) = \dot{S}_1(t_0) \end{aligned}$$

que resulta ser una contradicción.

En cambio, si se tiene $b_1 = b_2$, el resultado surge de la propiedad de estabilidad con datos correspondientes a $i=1$ y f_2, g_2, ϕ_2, ψ_2 ,

$b_2 + \epsilon$, y del pasaje al límite $\epsilon \rightarrow 0$.

iv) EJERCICIO 16. ([6, 15, 16]).

VIII. El problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito con condiciones de flujo de calor

Se considera el mismo problema presentado en (68) excepto que las condiciones (68v, vi) de temperatura son reemplazadas por condiciones de flujo de calor en $x=0$ y $x=1$ respectivamente, estando entonces su formulación dada por:

$$(81) \begin{cases} (68i-iv, vii-ix) \\ v) k_2 u_x(0,t) = f(t), \quad 0 < t \leq T \\ vi) k_1 v_x(1,t) = g(t), \quad 0 < t \leq T \end{cases}$$

La definición de solución, para este caso, es similar a la dada en VII; con respecto a los datos del problema, las hipótesis (B) resulta inalterada, en cambio las hipótesis (A) y (C) se reemplazan por las siguientes:

(A') Las funciones $f=f(t)$ y $g=g(t)$ son acotadas y continuas a trozos y existen dos constantes $A_1, A_2 > 0$ de manera que

$$(82) \quad -A_1 < f(t) \leq 0, \quad -A_2 < g(t) \leq 0, \quad t > 0.$$

(C') Se asume que

$$(83) \quad \Gamma = \text{Máx} (2K_2\epsilon_1(2+2\alpha_2/\eta_1)/\alpha_2; 2K_1\epsilon_2(2+2\alpha_1/\eta_2)/\alpha_1) < 1$$

donde

$$(84) \quad \epsilon_1 = \text{Máx} (A_1/k_2; a_1), \quad \epsilon_2 = \text{Máx} (A_2/k_1; a_2).$$

EJERCICIO 17. Si las condiciones (81i-iii, v-ix) permanecen inalteradas, entonces la condición de Stefan (81iv) es equivalente a la siguiente condición integral:

$$(85) \quad \begin{aligned} S(t) = & b + \int_0^1 \phi(x) dx + \frac{1}{\rho l} \int_0^t [g(\tau) - f(\tau)] d\tau - \\ & - \int_0^{S(t)} \frac{c_2}{l} u(x,t) dx - \int_{S(t)}^1 \frac{c_1}{l} v(x,t) dx \end{aligned}$$

donde

$$(86) \quad \phi(x) = \begin{cases} c_2 \phi(x)/\ell & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ c_1 \psi(x)/\ell & \text{si } b \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Siguiendo la metodología dada en §VII, se obtienen los siguientes resultados

PROPIEDAD 4. i) Bajo las hipótesis (A'), (B) y (C') existe $T_0 > 0$ de manera que el problema de Stefan (81) tiene una solución para $t \in (0, T_0)$. Más aún, T_0 está dado por

$$(87) \quad T_0 = \sup_{0 < \delta < \min(b; 1-b)} T_\delta$$

donde

$$(88) \quad T_\delta = \inf\{t > 0 / S(t) = \delta \text{ ó } S(t) = 1 - \delta\} .$$

ii) Sean u_i, v_i, S_i soluciones de (81) para los datos f_i, g_i, ϕ_i, ψ_i y b_i ($i=1,2$) que satisfacen las hipótesis (A'), (B) y (C'). Entonces, para $0 < T < T_0$, existe una constante $C_1 = C_1(T, \alpha_i, K_i, a_i, A_i, \eta_i, b_0)$ de manera que para $t \in [0, T]$ se tiene el siguiente resultado de estabilidad:

$$(89) \quad |S_1(t) - S_2(t)| \leq C_1 \left[|b_1 - b_2| + \int_0^1 |\phi_1(x) - \phi_2(x)| dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho \ell} \int_0^t (|f_1(\tau) - f_2(\tau)| + |g_1(\tau) - g_2(\tau)|) d\tau \right] .$$

iii) Bajo las hipótesis (A'), (B), (C') existe una única solución del problema de Stefan (81) para $t \in (0, T_0)$.

iv) Si los datos verifican que $f_2 \leq f_1, g_2 \geq g_1, \phi_2 \geq \phi_1, \psi_2 \geq \psi_1$ y $b_2 \geq b_1$, entonces $S_1 \leq S_2$ en $[0, T_0)$.

DEMOSTRACION. EJERCICIO 18. ([7]).

A continuación se verán algunos resultados concernientes a la permanencia de las dos fases, sólida y líquida, comportamiento asintótico y desaparición de una fase.

PROPIEDAD 5. i) Si los datos verifican además

$$(90) \quad -b < \int_0^1 \phi(x) dx + \frac{1}{\rho l} \int_0^t [g(\tau) - f(\tau)] d\tau < 1-b, \quad t > 0$$

entonces $T_0 = +\infty$.

Más aún, si f y g satisfacen las condiciones

$$(91) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0$$

entonces se tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$(92) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = b + \int_0^1 \phi(x) dx + \int_0^{+\infty} [g(\tau) - f(\tau)] d\tau.$$

ii) Si existe $T_2 > 0$ de manera que

$$(93) \quad \int_0^1 \phi(x) + \frac{1}{\rho l} \int_0^{T_2} [g(\tau) - f(\tau)] d\tau - \frac{c_2}{l} \int_0^1 U(x, T_2) dx > 1-b$$

entonces $T_0 \leq T_2$, donde U es la solución del problema

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 U_{xx} - U_t = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ U(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ k_2 U_x(0, t) = f(t), \quad t > 0 \\ U(x, 0) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } b \leq x \leq 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

iii) Si existe $T_1 > 0$ de manera que

$$(95) \quad \int_0^1 \phi(x) dx + \frac{1}{\rho l} \int_0^{T_1} [g(\tau) - f(\tau)] d\tau - \frac{c_1}{l} \int_0^1 V(x, T_1) dx < -b$$

entonces $T_0 \leq T_1$, donde V es la solución del problema

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 V_{xx} - V_t = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ V(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ k_1 V_x(0, t) = g(t), \quad t > 0 \\ V(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq b \\ \psi(x) & \text{si } b \leq x \leq 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

IX. El problema de Stefan para un cuerpo infinito

En [4] se presenta un problema de Stefan en el cual dos fronteras libres pueden intersectarse. El problema describe un cuerpo infinito consistente en un trozo de hielo sumergido en agua. Dependiendo de las condiciones iniciales, el trozo de hielo puede fundirse totalmente en un tiempo finito o el agua puede solidificarse en cada una de las interfaces sólido-líquido. Dado los datos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, b_1$ y b_2 , el problema consiste en hallar las funciones $u=u(x,t), v=v(x,t), w=w(x,t), S_1=S_1(t), S_2=S_2(t)$ y $T>0$, de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 u_{xx} - u_t = 0, \quad -\infty < x < S_1(t), \quad 0 < t \leq T \\ \alpha_1 v_{xx} - v_t = 0, \quad S_1(t) < x < S_2(t), \quad 0 < t \leq T \\ \alpha_2 w_{xx} - w_t = 0, \quad S_2(t) < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T \\ u(S_1(t), t) = v(S_1(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq T \\ v(S_2(t), t) = w(S_2(t), t) = 0, \quad 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \phi_1(x) \geq 0, \quad -\infty < x \leq b_1 \\ v(x, 0) = \phi_2(x) \leq 0, \quad b_1 \leq x \leq b_2 \\ w(x, 0) = \phi_3(x) \geq 0, \quad b_2 \leq x \leq +\infty \\ k_1 v_x(S_1(t), t) - k_2 u_x(S_1(t), t) = \dot{S}_1(t), \quad 0 < t \leq T \\ k_1 v_x(S_2(t), t) - k_2 w_x(S_2(t), t) = \dot{S}_2(t), \quad 0 < t \leq T \\ S_1(0) = b_1 < S_2(0) = b_2 \end{array} \right.$$

y en el caso en que exista $T>0$ de manera que $S_1(T)=S_2(T)$ y $S_1(t)<S_2(t)$ en $[0, T)$ (desaparición de la fase sólida) entonces se debe hallar también la función $U=U(x,t)$ que satisface las condiciones

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 U_{xx} = U_t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad T < t \\ U(x, T) = \begin{cases} u(x, T), & -\infty < x \leq S_1(T) = S_2(T) \\ w(x, T), & S_1(T) \leq x < +\infty \end{cases} \end{array} \right.$$

En [4] se estudia la existencia global (a través del método del argumento retardado) y unicidad de la solución, la dependencia continua y

monótona de las fronteras libres respecto de los datos, el comportamiento de $S_2(t) - S_1(t)$ en $t=T$ y la relación entre el valor crítico T con la energía inicial en el sistema agua-hielo-agua.

X. El problema de Stefan a dos fases con calor latente despreciable

Se analizará la relación entre las soluciones del problema de Stefan a dos fases, con densidades diferentes en cada fase, correspondientes a los casos en que el calor latente de fusión l sea positivo o sea despreciable, es decir $l=0$ [37].

Para el caso $l>0$, sean $T_1=T_1(x,t,l)$, $T_2=T_2(x,t,l)$ y $S_1=S_1(t)=2\sigma_1\sqrt{t}$, la solución del problema de solidificación (5) con $\rho_1 \neq \rho_2$, cuya solución está dada por (6) y (7), donde el coeficiente σ_1 es la única solución de (8).

Para el caso $l=0$, sean $T_1=T_1(x,t)$, $T_2=T_2(x,t)$ y $S_0=S_0(t)$, la solución del problema de solidificación (5) con $\rho_1 \neq \rho_2$ y $l=0$, cuya solución viene dada de la siguiente manera (EJERCICIO 20.)

$$(99) \quad \begin{cases} T_1(x,t) = -D + \frac{D}{\operatorname{erf}(\sigma_0/a_1)} \operatorname{erf}(x/2a_1\sqrt{t}) \\ T_2(x,t) = \frac{T_0}{\operatorname{erfc}(\sigma_0/a_0)} \left[\operatorname{erf}(\delta_0+x/2a_2\sqrt{t}) - \operatorname{erf}(\sigma_0/a_0) \right] \\ S_0(t) = 2\sigma_0\sqrt{t}, \quad \sigma_0 > 0, \quad \delta_0 = \frac{\sigma_0|\epsilon|}{a_2} \end{cases}$$

donde σ_0 es la única solución de la ecuación:

$$(100) \quad F(x) = 0, \quad x > 0.$$

Entonces se obtienen las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 6. La función $\sigma_1 = \sigma(l) > 0$, definida en el intervalo $(0, +\infty)$, satisface las siguientes condiciones:

i) $\sigma_1 = \sigma(l)$ es una función decreciente con $l > 0$ y verifica que

$$(101) \quad \sigma(0^+) = \sigma_0, \quad \sigma(+\infty) = 0.$$

ii) Se tiene el siguiente resultado

$$(102) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \sigma_1 = \sigma_0 .$$

Más aún, existe una constante $C_1 > 0$ (independiente de l) de manera que

$$(103) \quad 0 < \sigma_0 - \sigma_1 \leq C_1 l , \quad \forall l \in (0, l_0) .$$

iii) Existe una constante $C_2 > 0$ (independiente de l), de manera que las fronteras libres S_0 y S_1 están relacionadas a través de la siguiente estimación:

$$(104) \quad 0 < \frac{S_0(t) - S_1(t)}{\sqrt{t}} \leq C_2 l , \quad \forall l \in (0, l_0) .$$

DEMOSTRACION. Teniendo en cuenta

$$(105) \quad C_1 = \sigma_0 B_0 , \quad C_2 = 2 C_1$$

donde

$$(106) \quad B_0 = \max_{x \in [\sigma_{l_0}, \sigma_0]} \frac{1}{|F'(x)|} > 0$$

se deduce la propiedad (EJERCICIO 21.).

PROPIEDAD 7. Las temperaturas de las fases sólida y líquida correspondientes a los casos $l > 0$ y $l = 0$ satisfacen las siguientes estimaciones:

$$(107) \quad 0 < T_1(x, t, l) - T_1(x, t) \leq C_3 l , \quad 0 < x < S_1(t) , \quad t > 0$$

$$(108) \quad |T_2(x, t, l) - T_2(x, t)| \leq C_4 l , \quad x > S_0(t) , \quad t > 0$$

donde C_3 y C_4 son dos constantes positivas independientes de l .

DEMOSTRACION. (EJERCICIO 22. ([37])).

XI. Comentarios finales

A continuación se darán algunas particularidades, relacionadas con lo visto anteriormente, y que por motivos de espacio y alejarse de los objetivos de este cursillo, sólo se indicarán las respectivas referencias bibliográficas:

i) En [8], se estudia la regularidad de la frontera libre (infinita diferenciabilidad) para los problemas planteados en §VII y VIII. Otros trabajos sobre el tema son [14, 17, 28].

ii) En [9], se estudia la aparición de la fase líquida en un cuerpo finito que se encuentra inicialmente en fase sólida.

iii) En [14, 21], se estudia el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito con condiciones iniciales, de contorno y sobre la frontera libre muy generales.

iv) En [14-16, 20, 24] se utiliza el concepto de solución débil.

v) En [29, 31], se estudia la formulación del problema de Stefan a dos fases a través de la ecuación hiperbólica del calor.

vi) En [23], se estudia el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo finito cuando una de las dos fases tiene signo cambiado, es decir líquido sobre-enfriado o sólido sobre-calentado.

REFERENCIAS

- [1] A.B.BANCORA - D.A.TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free boundary", Lat.Am.J. Heat Mass Transf., 9(1985), 215-222.
- [2] J.E.BOUILLET, "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Rosario (1984), No. 11, 63-74.
- [3] H.S.CARSLAW - J.C.JAEGER, "Conduction of heat in solids", Oxford University Press, London (1959).
- [4] J.R.CANNON - J.DOUGLAS, Jr. - C.D.HILL, "A multi-boundary Stefan problem and the disappearance of phases", J.Math.Mech., 17(1967), 21-33.
- [5] J.R.CANNON - C.D.HILL, "Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation", J. Math.Mech., 17(1967), 1-19.
- [6] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A two phase Stefan problem with

- temperature boundary conditions", *Annali Mat. Pura Appl.*, 88(1971) 177-191.
- [7] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A two phase Stefan problem with flux boundary conditions", *Annali Mat. Pura Appl.*, 88(1971), 193-205.
- [8] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A two-phase Stefan problem: regularity of the free boundary", *Annali Mat. Pura Appl.*, 88(1971), 217-228.
- [9] J.R.CANNON - M.PRIMICERIO, "A Stefan problem involving the appearance of a phase", *SIAM J. Math. Appl.*, 4(1973), 141-148.
- [10] S.H.CHO - J.E.SUNDERLAND, "Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity", *J. Heat Transfer*, 96C(1974), 214-217.
- [11] G.W.EVANS, II - E.ISAACSON - J.K.L.MacDONALD, "Stefan-like problems", *Quart.Appl.Math.*, 8(1950), 312-319.
- [12] A.FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", en *II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones*, CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", No.13, Rosario (1987).
- [13] A.FASANO - M.PRIMICERIO, "General free-boundary problems for the heat equation, III", *J.Math.Anal.Appl.*, 59(1977), 1-14.
- [14] A.FASANO - M.PRIMICERIO - S.KAMIN, "Regularity of weak solutions of one-dimensional two-phase Stefan problems", *Annali Mat. Pura Appl.*, 115(1977), 341-348.
- [15] A.FRIEDMAN, "The Stefan problem in several space variables", *Trans.Amer.Math.Soc.*, 132(1968), 51-87. Correction, *Ibid*, 142 (1969), 557.
- [16] A.FRIEDMAN, "One dimensional Stefan problems with nonmonotone free boundary", *Trans.Amer.Math.Soc.*, 133(1968), 89-114.
- [17] A.FRIEDMAN, "Analyticity of the free boundary for the Stefan problem", *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 61(1976), 97-125.
- [18] M.GEVREY, "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", *J.Math. Pures Appl.*, (6) 9(1913), 305-471; (6) 10(1914),

105-148.

- [19] J.M.HILL - V.G.HART, "The Stefan problem in nonlinear heat conduction", ZAMP, 37(1986), 206-229.
- [20] S.L.KAMENOMOSTSKAJA, "On Stefan's problem", Mat.Sb., 53(95)(1965), 485-514.
- [21] P.KNABNER, "Global existence in a general Stefan-like problem", J.Math.Anal.Appl., 115(1986), 543-559.
- [22] V.J.LUNARDINI, "Heat transfer in cold climates", Van Nostrand Reinhold Company, New York (1981).
- [23] P.R.MARANGUNIC - C.V.TURNER, "The behavior of the solutions of a two-phase Stefan problem and the value of an energy integral", Fisica Matematica, Suppl. Bollettino Un. Mat. Italiana, To appear.
- [24] O.A.OLEINIK, "A method of solution of the general Stefan problem", Soviet Math. Dokl., 1(1960), 1350-1354.
- [25] D.QUILGHINI, "Una analisi fisico-matematica del proceso del cambiamento di fase", Annali Mat. Pura Appl., 67(1965), 33-74.
- [26] C.ROGERS, "Application of a reciprocal transformation of a two-phase Stefan problem", J. Physics A: Math.Gen., 18(1985), L 105-L 109.
- [27] L.I.RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Trans. Math. Monographs, Vol. 27, American Mathematical Society, Providence (1971).
- [28] L.I.RUBINSTEIN - M.SHILLOR, "Analyticity of the free boundary for the one-phase Stefan problem with strong nonlinearity", Fisica Matematica, Suppl. Bollettino Un. Mat. Italiana, 1(1981), 47-68.
- [29] M.SADD - J.DIDLAKE, "Non-Fourier melting of a semi-infinite solid", J. Heat Transfer, 99C(1977), 25-28.
- [30] A.D.SOLOMON - D.G.WILSON - V.ALEXIADES, "Explicit solutions to phase change problems", Quart.Appl.Math., 41(1983), 237-243.
- [31] A.D.SOLOMON - V.ALEXIADES - D.G.WILSON - J.DRAKE, "On the formulation of hyperbolic Stefan problems", Quart.Appl.Math., 43(1985), 295-304.

- [32] M.L.STORM, "Heat conduction in simple metals", J.Appl. Physics, 22(1951),940-951.
- [33] L.N.TAO, "The Stefan problem with arbitrary initial and boundary conditions", Quart.Appl.Math., 36(1978), 223-233.
- [34] L.N.TAO, "On free boundary problems with arbitrary initial and flux conditions", ZAMP, 30(1979), 416-426.
- [35] D.A.TARZIA, "An inequality of the coefficient σ of the free boundary $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart.Appl.Math., 39(1981-82), 491-497.
- [36] D.A.TARZIA, (a) "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Rosario (1984), No.11, 5-32; (b) "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", Ibid, No.11, 33-61; (c) "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", Ibid, No.12, 5-36; (d) "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", Ibid, No.12, 37-85.
- [37] D.A.TARZIA - L.T.VILLA, "Mathematical considerations on the heat transfer with phase change with negligible latent heat", To appear.
- [38] L.T.VILLA, "El problema inverso de Stefan", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", Rosario (1984), No.11, 105-131.
- [39] J.H.WEINER, "Transient heat conduction in multiphase media", British J. Appl. Physics, 6(1955), 361-363.
- [40] D.G.WILSON, "Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multiphase Stefan problems", SIAM J. Appl. Math., 35(1978), 135-147.
- [41] D.G.WILSON, "Lagrangian coordinates for moving boundary problems", SIAM J. Appl. Math., 42(1982), 1195-1201.

PROMAR (CONICET-UNR),
Instituto de Matemática "B.
Levi",
Avda Pellegrini 250,
(2000) Rosario, Argentina.