

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 4 al 8 de JULIO - 1983

12

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
1984

SOLUCIONES EXACTAS DEL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL

Domingo Alberto TARZIA

Continuando la Introducción del presente Seminario, en este Cursillo se estudiarán las soluciones exactas correspondientes al problema de Stefan unidimensional a una y dos fases. Todas las notaciones que no cambian no serán repetidas; por (I-n), se hará referencia a la fórmula (n) de la Introducción.

Se estudiarán las soluciones explícitas de Lamé-Clapeyron [18, 37-39] y de Neumann [3,4,29,37,51] y sus propiedades, correspondientes al problema de Stefan unidimensional a una y dos fases, respectivamente. Se analizará sólo lo referente a la *existencia de soluciones explícitas*; el análisis de la *unicidad* de solución en el problema de Stefan a una fase será tratado en el Cursillo C5 y en cambio el correspondiente a dos fases será dejado para el próximo Seminario.

I. LA SOLUCION DE LAME-CLAPEYRON DEL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE Y SUS PROPIEDADES.

A) Lamé-Clapeyron estudiaron en [18] el problema de la solidificación por enfriamiento de un globo líquido, cuya formulación matemática está dada por el problema de hallar la frontera libre $s=s(t)$ y la temperatura $\theta=\theta(x,t)$ de la fase sólida, definida

por (I-1), de manera que se satisfagan las condiciones (I-2 i-v).

EJERCICIO 1.

Si $\{\theta, s\}$ es la solución de (I-2) entonces se tiene (utilizar el principio del máximo):

- i) $\theta_0 < \theta(x,t) < \theta_f$ en $D = (x,t) / 0 < x < s(t), t > 0$
- ii) $\dot{s}(t) > 0, \forall t > 0.$
- iii) $\theta_x(x,t) > 0, \theta_t(x,t) < 0, \theta_{xx}(x,t) < 0$ en D. ■

Utilizando el método de semejanza (ver Apéndice 6 de la Introducción) se obtiene el resultado siguiente:

LEMA 1:

La solución del problema (I-2) está dada por:

$$(1) \quad \begin{cases} \theta(x,t) = \theta_0 + \frac{\theta_f - \theta_0}{f(\xi)} f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2a\xi\sqrt{t} \quad (a^2 = \frac{k}{\rho c}) \end{cases}$$

siendo ξ la única solución de la ecuación:

$$(2) \quad E(x) = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

donde:

$$(3) \quad \begin{cases} f(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du: \text{función de error} \\ E(x) = x f(x) \exp(x^2), \\ Ste = \frac{c(\theta_f - \theta_0)}{l} : \text{número de Stefan.} \end{cases}$$

DEMOSTRACION:

Se propone como solución del problema (I-2) a:

$$(4) \quad \theta(x,t) = A + B f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad s(t) = 2a\xi\sqrt{t} \quad (\xi > 0)$$

donde las tres constantes A, B, ξ deben determinarse usando las condiciones (I-2 iii-v) las cuales imponen las siguientes ecuaciones:

$$(5) \quad \begin{cases} A = \theta_0, \quad A + B f(\xi) = \theta_f, \\ \frac{k B}{a\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) = \rho l a \xi. \end{cases}$$

Eliminando las constantes A y B en función de ξ , se tiene:

$$(6) \quad A(\xi) = \theta_0, \quad B(\xi) = \frac{\theta_f - \theta_0}{f(\xi)},$$

donde ξ es la única solución de la ecuación (2), pues la función E tiene las propiedades siguientes:

$$(7) \quad E(0) = 0, \quad E(+\infty) = +\infty, \quad E' > 0.$$

OBSERVACION 1.

La solución (1) del problema de Stefan unidimensional a una fase (I-2) es conocida como *solución de Lamé-Clapeyron* [18].

OBSERVACION 2.

El coeficiente ξ , que caracteriza la frontera libre $s(t)$, depende sólo del número de Stefan Ste .

OBSERVACION 3.

El simple modelo (I-2) puede utilizarse para dar un *cálculo aproximado de la edad de la Tierra* (se supone que $t = 0$ es el instante inicial como planeta) una vez conocido:

- i) El valor $R = s(t)$ de la corteza sólida en este momento.
- ii) Los coeficientes a, Ste (para cada valor de θ_0) de la fase sólida, la cual se supone que es una sustancia isótropa y homogénea.

Con dichos datos, un valor aproximado de la edad del planeta Tierra puede obtenerse mediante la expresión:

$$(8) \quad t = \frac{R^2}{4a^2\xi^2}$$

donde ξ es la única solución de la ecuación (2).

EJERCICIO 2.

Suponiendo que $R = 50$ km (el radio de la Tierra es de 6.400 km) y que la sustancia más apropiada es el cuarzo hallar una estimación de la edad de la Tierra para diferentes valores de θ_0 . Hacerlo también para otras sustancias cuyos coeficientes térmicos sean fácilmente obtenidos en Tablas y realizar una comparación de los resultados obtenidos.

Mediante otros métodos se obtiene que la edad de la Tierra oscila entre 5 y 10 mil millones de años. ■

B) Uno de los métodos teóricos utilizados en el estudio del problema de Stefan es el llamado *método de la inmovilización del domo*

nio, el cual mediante el cambio de variable

$$(9) \quad y = \frac{x}{s(t)}$$

transforma el intervalo $(0, s(t))$ en el $(0,1)$. Se busca la temperatura como una función de la sola variable y , es decir:

$$(10) \quad \theta(x,t) = \psi(y).$$

Teniendo presente que:

$$(11) \quad \begin{cases} \theta_x(x,t) = \frac{\psi'(y)}{s(t)} & , \quad \theta_{xx}(x,t) = \frac{\psi''(y)}{s^2(t)} \\ \theta_t(x,t) = -y \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} \psi'(y) & \quad (\psi' = \frac{d\psi}{dy}) \end{cases}$$

se tiene la equivalencia siguiente: $\{\theta, s\}$ es solución de (I-2) si y solo si $\{\psi, s\}$ es solución del problema (12) , donde:

$$(12) \quad \begin{cases} \text{i)} & a^2 \psi''(y) + s(t) \dot{s}(t) \psi'(y) = 0 \\ \text{ii)} & \psi(0) = \theta_0 < \theta_f \\ \text{iii)} & \psi(1) = \theta_f \\ \text{iv)} & \psi'(1) = \frac{\rho l}{k} s(t) \dot{s}(t) \\ \text{v)} & s(0) = 0. \end{cases}$$

Llamando con s_0 a la constante $s(t) \dot{s}(t)$, a ser determinada, se obtiene:

$$(13) \quad s^2(t) = 2 s_0 t = 4a^2 \xi^2 t, \quad \xi^2 = \frac{s_0}{2a^2}.$$

Integrando la ecuación (12 i), y teniendo en cuenta la condición (12 iv), se deduce:

$$(14) \quad \psi'(y) = \frac{\rho l s_0}{k} \exp(\xi^2 t) \exp(-\xi^2 y^2)$$

La cual, con la condición (12 ii) se transforma en:

$$(15) \quad \psi(y) = \theta_0 + \frac{\rho l \sqrt{\pi}}{c} \xi \exp(\xi^2 t) f(\xi y).$$

La condición (12 iii) da para el coeficiente desconocido ξ la ecuación (2), con lo cual ψ viene dado por:

$$(16) \quad \psi(y) = \theta_0 + \frac{\theta_f - \theta_0}{f(\xi)} f(\xi y),$$

que coincide con la obtenida por el método de semejanza (1) pues se tiene $\xi y = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$. (EJERCICIO 3: Completar los cálculos de la pre-

sente Observación).

OBSERVACION 4.

Cuando las condiciones de contorno no son constantes, el método de la inmovilización del dominio es también aplicable con la única dificultad de que la ecuación diferencial es más complicada, al no poderse determinar ψ como función de la sola variable $y = \frac{x}{s(t)}$. En dicho caso, se buscará ψ como función de las variables y, t es decir $\psi = \psi(y, t)$. ■

C) Cuando el número de Stefan $Ste = \frac{c(\theta_f - \theta_o)}{\ell}$ es pequeño ($Ste \ll 1$) la solución ξ de la ecuación (2) puede calcularse usando las aproximaciones de primer orden siguientes:

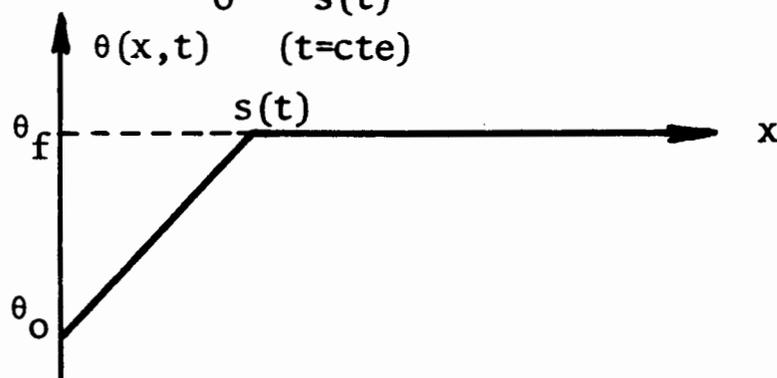
$$(17) \quad \exp(x^2) \approx 1, \quad f(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, \quad 0 \ll x \ll 1$$

con lo cual se obtiene

$$(18) \quad \xi^2 = \frac{Ste}{2} = \frac{c(\theta_f - \theta_o)}{2\ell}.$$

Por otra parte, este resultado puede ser obtenido usando una aproximación física, metodología conocida como *método cuasi-estacionario* [37,38]. Este método supone que la temperatura de la fase sólida es la que correspondería al caso estacionario en el intervalo $(0, s(t))$, es decir una función afín de la variable x . Bajo esta hipótesis, se tiene:

$$(19) \quad \theta(x, t) = \theta_o + \frac{\theta_f - \theta_o}{s(t)} x \quad \text{en } [0, s(t)].$$



Por lo tanto, la condición de Stefan (I-2 iv) se reduce a

$$(20) \quad k \frac{\theta_f - \theta_o}{s(t)} = \rho \ell \dot{s}(t)$$

que resulta ser una ecuación diferencial en $s(t)$, de cuya integración, se tiene:

$$(21) \quad s^2(t) = \frac{2k(\theta_f - \theta_o)}{\rho \ell} t = 4a^2 \frac{Ste}{2} t$$

obteniéndose de este modo (18).

LEMA 2.

El flujo de calor total $Q(t)$, para la solución de Lamé-Clapeyron, por unidad de área transversal y durante un tiempo t , en el borde fijo $x = 0$, está dado por:

$$(22) \quad Q(t) = \rho \ell s(t) \exp(\xi^2).$$

DEMOSTRACION:

Por definición, $Q(t)$ viene dado por

$$(23) \quad Q(t) = \int_0^t k \theta_x(0, \tau) d\tau$$

que después de simples cálculos (Ejercicio 4), puede expresarse por (22).

COROLARIO 3. [33]:

Cuando el número de Stefan es pequeño, éste da una indicación de la razón del calor sensible al calor latente almacenado en el material durante el proceso de cambio de fase.

DEMOSTRACION.

Se tiene la relación siguiente:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(t) = Q_s(t) + Q_\ell(t) \\ Q_\ell(t) = \rho \ell s(t): \text{ Calor latente total almacenado al tiempo } t \\ Q_s(t): \text{ Calor sensible total almacenado por la variación de la temperatura.} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, utilizando (18), válido cuando $Ste \ll 1$, se deduce:

$$(25) \quad \frac{Q_s(t)}{Q_\ell(t)} = \frac{Q(t)}{Q_\ell(t)} - 1 = \exp(\xi^2) - 1 \sim \xi^2 \sim \frac{Ste}{2}.$$

EJERCICIO 5.

El método cuasi-estacionario, utilizado por Stefan en sus trabajos [37,38], es también válido en el caso en que la temperatura sobre el borde fijo $x = 0$ es una función del tiempo, es decir:

$$(26) \quad \theta(0, t) = \theta_0(t) < \theta_f, \quad t > 0.$$

Verificar que se tienen las siguientes expresiones:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \theta(x, t) = \theta_0(t) + \frac{\theta_f - \theta_0(t)}{s(t)} x \\ \text{ii)} \quad s(t) = \left\{ \frac{2k}{\rho \ell} \int_0^t [\theta_f - \theta_0(\tau)] d\tau \right\}^{1/2} \\ \text{iii)} \quad Q(t) = \rho \ell s(t). \end{array} \right.$$

OBSERVACION 5.

El flujo de calor total $Q(t)$, para la solución cuasi-estacionaria (27), por unidad de área transversal y durante un tiempo t , en el borde fijo $x = 0$, no depende del hecho si la temperatura θ_0 es constante o variable en el tiempo; más aún, la energía, por unidad de área transversal, necesaria para solidificar una región de amplitud $s(t)$ es simplemente la energía $Q_l(t)$ debida sólo al calor latente. Esto está en contraste con la solución exacta, la cual muestra que $Q(t)/s(t) = \rho l \exp(\xi^2)$ es igual a la energía por calor latente más la energía que se necesita para bajar la temperatura de la región solidificada. Con la solución cuasi-estacionaria ($Ste \ll 1$), ésta última energía no es tenida en cuenta. ■

D) A continuación se verán algunas desigualdades que serán útiles en posteriores estudios.

LEMA 4.

Sean E y f las funciones definidas por (3). Sea G la función definida por

$$(28) \quad G(x) = x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad , \quad x > 0$$

entonces se tienen los siguientes resultados:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad E(x) > \frac{\exp(x^2) - 1}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad \forall x > 0 \\ \text{ii)} \quad G(0) = 0, \quad G(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \text{iii)} \quad G(x) < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad \forall x > 0 \\ \text{iv)} \quad G''(x) = 4 \left[G(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] + 2x G'(x) \\ \text{v)} \quad G'(x) > 0 \quad , \quad \forall x > 0. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION.

i) y iii) se deducen de las siguientes desigualdades:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{u}{x} \exp(-u^2) du = \frac{1 - \exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-u^2) du < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{u}{x} \exp(-u^2) du = \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}}$$

válidas $\forall x > 0$. Las demás propiedades quedan como EJERCICIO 6. ■

B) Sea el caso particular del problema de Lamé-Clapeyron (I-2) con

$$(30) \quad \theta_f = 0 \quad , \quad \theta_0 = -B < 0,$$

cuya solución está dada, para cada valor $\ell > 0$ de calor latente de fusión, por:

$$(31) \quad \theta(x,t,\ell) = -B \left[1 - \frac{f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)}{f(\xi_\ell)} \right], \quad s(t,\ell) = 2a\xi_\ell\sqrt{t}$$

donde ξ_ℓ es la única solución de (2) con

$$(32) \quad Ste = \frac{Bc}{\ell}.$$

En [31] se estudia el comportamiento de la solución (31) cuando $\ell \rightarrow 0^+$, obteniéndose que $\xi_\ell \rightarrow +\infty$ con lo cual la frontera libre $s(t,\ell)$ avanza muy rápidamente en la fase líquida. Esto es físicamente aceptable pues la fase líquida se encuentra a la temperatura de fusión $\theta_f = 0$ y el calor latente ℓ es pequeño, con lo cual la energía que se libera al solidificar un trozo de material es despreciable. Además, la temperatura $\theta(x,t,\ell)$ decrece hacia el límite $\theta(x,t,0)$, dado por:

$$(33) \quad \theta(x,t,0) = \lim_{\ell \rightarrow 0^+} \theta(x,t,\ell) = -B \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$$

que resulta ser la solución del siguiente problema de conducción de calor para la fase sólida:

$$(34) \quad \begin{cases} a^2 u_{xx} = u_t, & x > 0, \quad t > 0 \quad (a^2 = \frac{k}{\rho c}) \\ u(0,t) = -B, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

Por otra parte, se obtienen las siguientes estimaciones:

LEMA 5.

$$i) \quad s(t,\ell) \sim 2a \sqrt{t \log \frac{1}{\ell}} \quad \text{para cada } t > 0, \text{ cuando } \ell \rightarrow 0^+.$$

Más aún, se tiene la doble estimación (36) y (37) para el coeficiente ξ_ℓ .

$$(35) \quad ii) \quad 0 < \theta(x,t,\ell) - \theta(x,t,0) < \frac{\ell}{c}, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0.$$

DEMOSTRACION.

i) Por definición de ξ_ℓ y de la desigualdad (29 i) se tiene $Bc/\ell = \sqrt{\pi} E(\xi_\ell) > \exp(\xi_\ell^2) - 1$, de donde surge la acotación:

$$(36) \quad \xi_\ell < \left[\log \left(1 + \frac{Bc}{\ell} \right) \right]^{1/2}.$$

Además, se tiene

$$\frac{Bc}{\ell} = \sqrt{\pi} E(\xi_\ell) < \sqrt{\pi} \left[\log\left(1 + \frac{Bc}{\ell}\right) \right]^{1/2} \exp(\xi_\ell^2)$$

obteniéndose de este modo una segunda acotación para ξ_ℓ , dada por:

$$(37) \quad \xi_\ell > \left\{ \log\left(\frac{Bc}{\ell\sqrt{\pi}}\right) - \frac{1}{2} \log \log\left(1 + \frac{Bc}{\ell}\right) \right\}^{1/2}.$$

ii) Por definición y usando (29) se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 < B f\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right) \left[\frac{1}{f(\xi_\ell)} - 1 \right] &= \theta(x, t, \ell) - \theta(x, t, 0) < \\ < B \frac{\operatorname{erfc}(\xi_\ell)}{f(\xi_\ell)} < \frac{B}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\xi_\ell^2)}{\xi_\ell f(\xi_\ell)} &= \frac{\ell}{c} \end{aligned}$$

con lo cual se deduce la desigualdad (35). ■

F) En [34], se plantea un simple modelo de zona pastosa para el problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase, el cual admite una solución explícita. El término de zona pastosa se refiere a una zona donde la fase sólida y la líquida coexisten, la cual proviene de la forma compleja en que el material líquido se solidifica. Esta zona puede ser muy larga o muy corta, dependiendo del material y de las condiciones bajo las cuales se solidifica.

Se considera un material unidimensional semi-infinito $x > 0$ que se encuentra inicialmente en estado líquido a su temperatura de fusión θ_f . A partir del instante inicial, se impone una temperatura $\theta_0 < \theta_f$, en el borde $x = 0$, con lo cual el proceso de solidificación comienza pudiendo ser distinguidas tres regiones distintas:

i) La fase líquida, a temperatura $\theta = \theta_f$, se encuentra en la región $x \geq r(t)$, $t > 0$.

ii) La fase sólida, a temperatura $\theta < \theta_f$, se encuentra en la región $0 \leq x \leq s(t)$, $t > 0$, donde $s(t) \leq r(t)$.

iii) La región pastosa ocupa la región $s(t) \leq x \leq r(t)$, $t > 0$, a la temperatura $\theta = \theta_f$. Esta región es isotérmica y se hacen dos hipótesis sobre su estructura:

a) El material en la zona pastosa contiene una fracción fija $\epsilon \ell$ ($0 < \epsilon < 1$, constante) del calor latente de fusión ℓ por unidad de masa.

b) El ancho de la zona pastosa es inversamente proporcional al gradiente de la temperatura en $x = s(t)$, llamando con $\gamma > 0$ a dicha constante de proporcionalidad ($[\gamma] = \text{temperatura}$).

EJERCICIO 7.

i) Utilizando un método análogo a la deducción de la condición de Stefan (Ver I-Apéndice 2), se obtiene:

$$(38) \quad k\theta_x(s(t), t) = \rho l [\epsilon \dot{s}(t) + (1-\epsilon) \dot{r}(t)], \quad t > 0.$$

ii) Además se tiene:

$$(39) \quad \theta_x(s(t), t) (r(t) - s(t)) = \gamma, \quad t > 0.$$

Por lo tanto, de acuerdo al modelo anterior, el problema consiste en hallar las fronteras libres $s = s(t)$, $r = r(t)$ y la temperatura $\theta = \theta(x, t)$, definida por (I-1), de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$(40) \quad \begin{cases} \text{(I-2i, ii, iii), (38), (39)} \\ s(0) = r(0) = 0. \end{cases}$$

EJERCICIO 8.

Las funciones $\theta(x, t)$, $s(t)$ y $r(t)$, que satisfacen el problema (40), pueden encontrarse a través del método de semejanza como:

$$(41) \quad \begin{cases} \theta(x, t) = \theta_0 + \frac{(\theta_f - \theta_0)}{\text{erf}(\xi)} \text{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2\xi a\sqrt{t}, \quad r(t) = 2\mu a\sqrt{t} \end{cases}$$

donde:

$$(42) \quad \mu = \xi + \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2(\theta_f - \theta_0)} \text{erf}(\xi) \exp(\xi^2)$$

y ξ es la única solución de la ecuación:

$$(43) \quad D(x) = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0$$

con

$$(44) \quad \begin{cases} D(x) = x \text{erf}(x) \exp(x^2) + \frac{\gamma(1-\epsilon)\sqrt{\pi}}{2(\theta_f - \theta_0)} [\exp(x^2) \text{erf}(x)]^2 \\ \text{Ste} = \frac{c(\theta_f - \theta_0)}{l} : \text{número de Stefan.} \end{cases}$$

OBSERVACION 6.

El clásico modelo de Lamé-Clapeyron para el problema de Stefan a una fase se obtiene haciendo:

$$(45) \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = 0.$$

EJERCICIO 9.

Si el número de Stefan es pequeño, entonces una solución aproximada para ξ, μ viene dada por:

$$(46) \quad \xi = \left\{ \frac{\text{Ste}}{2[1+\gamma(1-\epsilon)/(\theta_f-\theta_o)]} \right\}^{1/2}, \quad \mu = \xi[1+\gamma/(\theta_f-\theta_o)]. \quad \blacksquare$$

G) A continuación se analizará el caso de un líquido super-enfriado [4]. Se supone que el cuerpo semi-infinito $x > 0$ se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme θ_i , con $\theta_i < \theta_f$ (temperatura de fusión), y que la solidificación comienza a la temperatura θ_f en el borde $x = 0$ y se mueve hacia la derecha. El problema consiste en hallar la frontera libre $s = s(t)$ y la temperatura $\theta = \theta(x, t)$, definida por:

$$(47) \quad \theta(x, t) = \begin{cases} \theta_f & \text{si } 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \theta(x, t) < \theta_f & \text{si } x > s(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 \theta_{xx} = \theta_t, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ \theta(x, 0) = \theta_i, \quad x > 0 \\ \theta(s(t), t) = \theta_f, \quad t > 0 \\ k \theta_x(s(t), t) = -\rho l \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ s(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde los coeficientes térmicos k, ρ, l , $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ son los correspondientes a la fase líquida. Entonces se tiene el siguiente resultado:

EJERCICIO 10.

Si $\text{Ste} = \frac{c(\theta_f - \theta_i)}{l} < 1$, entonces la solución está dada por:

$$(49) \quad \theta(x, t) = \theta_i + (\theta_f - \theta_i) \frac{\text{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)}{\text{erfc}(\xi)}, \quad s(t) = 2a\xi\sqrt{t}$$

donde ξ es la única solución de la ecuación:

$$(50) \quad G(x) = \frac{\text{Ste}}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

EJERCICIO 11.

i) Verificar que si la temperatura inicial de un líquido super-

enfriado es uniforme e igual a $-h$ con $0 < h < 1$, entonces

$$(51) \quad \begin{cases} u(x,t) = -h + \frac{h}{\operatorname{erfc}(\sigma)} \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right), \\ s(t) = 1 - 2\sigma\sqrt{t} \end{cases}$$

es solución del siguiente problema en variables adimensionalizadas [13]:

$$(52) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < s(t), & 0 < t < T = \frac{1}{4\sigma^2} \\ u(x,0) = -h, & 0 \leq x < 1 \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t < T \\ u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t), & 0 < t < T \\ s(0) = 1 \end{cases}$$

donde σ es la única solución de la ecuación.

$$(53) \quad G(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0.$$

ii) Analizar $u(0,t)$ y $u_x(0,t)$. ■

H) Un ejemplo de solución exacta con datos no constantes está dado por [17]:

EJERCICIO 12.

Verificar que

$$(54) \quad \theta(x,t) = W\left(\frac{x}{\sqrt{t+1}}\right), \quad s(t) = M\sqrt{t+1} \quad (M > 0)$$

es solución del problema (I-9 bis), donde

$$(55) \quad \begin{cases} W(z) = A_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\right) - A_2 \\ A_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} M \exp(M^2/4), \quad A_2 = \sqrt{\pi} G\left(\frac{M}{2}\right) \end{cases}$$

con

$$(56) \quad \begin{cases} h(x) = W(x), & S(0) = M \text{ (en lugar de } s(0) = 1) \\ f(t) = W(0) = A_1 - A_2 = \sqrt{\pi} E\left(\frac{M}{2}\right) \end{cases}$$

estando E y G definidas por (3) y (28) respectivamente.

II. LA SOLUCION DE NEUMANN DEL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A

A) Se considera el problema de fusión de un material semi-infinito $x > 0$ que inicialmente se encuentra a temperatura inicial $\theta_i = -C < \theta_f$ y que en el borde fijo $x = 0$ es calentado a una temperatura $\theta_o = B > \theta_f$

Sin pérdida de generalidad, se supone que $\theta_f = 0$ (si no, se realiza una traslación de la escala de temperatura). Se supone también que la densidad de masa ρ es común a ambas fases. El problema consiste en hallar la frontera libre $s=s(t)$ y la temperatura $\theta=\theta(x,t)$, definida por (I-4), de manera que se satisfagan las condiciones (I-5i-viii).

EJERCICIO 13.

Si θ_1, θ_2, s es la solución de (I-5) entonces se tiene (utilizar el principio del máximo):

- i) $-C < \theta_1(x,t) < 0$, $x > s(t)$, $t > 0$
- ii) $0 < \theta_2(x,t) < B$, $0 < x < s(t)$, $t > 0$
- iii) $\theta_{2_x}(s(t),t) < 0$, $\theta_{1_x}(s(t),t) < 0$, $\forall t > 0$.

Utilizando el método de semejanza, se obtiene el resultado siguiente:

LEMA 5.

La solución del problema (I-5) está dada por:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(x,t) = B - \frac{B}{\operatorname{erf}(\sigma/a_2)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0 \\ \theta_1(x,t) = -C + \frac{C}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad x \geq s(t), \quad t > 0 \\ s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad \left(a_2^2 = \frac{k_2}{\rho c_2}, \quad a_1^2 = \frac{k_1}{\rho c_1}\right) \end{array} \right.$$

siendo σ la única solución de la ecuación:

$$(58) \quad F(x) = x, \quad x > 0$$

donde

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{B k_2}{\rho \lambda a_2 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{x}{a_2}\right) - \frac{C k_1}{\rho \lambda a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{x}{a_1}\right) \\ F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}, \quad F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)} \end{array} \right.$$

DEMOSTRACION.

Se propone como solución del problema (I-5) a:

$$(60) \quad \begin{cases} \theta_1(x,t) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) & , \quad s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \\ \theta_2(x,t) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

donde las cinco constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \sigma$ deben determinarse usando las condiciones (I-2 iii-vii) las cuales imponen las siguientes ecuaciones:

$$(61) \quad \begin{cases} B = \alpha_2 & , \quad 0 = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) \\ -C = \alpha_1 + \beta_1 & , \quad 0 = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) \\ \frac{k_1 \beta_1}{a_1} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a_1^2}\right) - \frac{k_2 \beta_2}{a_2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{a_2^2}\right) = \rho l \sigma \sqrt{\pi} . \end{cases}$$

Eliminando las constantes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ en función de σ se tiene:

$$(62) \quad \begin{cases} \alpha_1(\sigma) = C \frac{\operatorname{erf}(\sigma/a_1)}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} & , \quad \beta_1(\sigma) = \frac{-C}{\operatorname{erfc}(\sigma/a_1)} \\ \alpha_2(\sigma) = B & , \quad \beta_2(\sigma) = \frac{-B}{\operatorname{erf}(\sigma/a_2)} \end{cases}$$

donde σ debe satisfacer la ecuación (58), la cual tiene única solución debido a las propiedades de la función F que se detallan en el Ejercicio 14 vii.

EJERCICIO 14.

Sean las siguientes funciones:

$$(63) \quad \begin{cases} f(x) = \operatorname{erf}(x) & , \quad H(x) = \frac{f'(x)}{1-f(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F_1(x) \\ G(x) = H(x) - 2x . \end{cases}$$

Se tienen las siguientes propiedades:

$$\text{i) } H(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad H(+\infty) = +\infty \quad , \quad H(x) > 0 \quad , \quad \forall x > 0$$

$$\text{ii) } G(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad G(+\infty) = 0$$

$$\text{iii) } H'(x) = G(x) H(x) \quad , \quad G'(x) = H'(x) - 2$$

$$\text{iv) } G(x) > 0, \forall x > 0$$

$$\text{v) } F'_1(x) > 0, \forall x > 0$$

$$\text{vi) } F_2(0^+) = +\infty, F_2(+\infty) = 0, F'_2(x) < 0, x > 0.$$

$$\text{vii) } F(0^+) = +\infty, F(+\infty) = -\infty, F'(x) < 0, \forall x > 0.$$

EJERCICIO 15.

Hallar la solución del problema (I-5) para el caso $\theta_f \neq 0$.

OBSERVACION 7.

La solución (57) (ver también Ejercicio 15) al problema de Stefan unidimensional a dos fases (I-5) es conocida como *solución de Neumann* [3,51].

A continuación se plantearán dos problemas que pueden resolverse con una metodología análoga a la de la solución de Neumann [3,4].

EJERCICIO 16.

Una región de hielo semi-infinita $x < 0$, a temperatura uniforme θ_g , es puesta inmediatamente en contacto con una región de agua semi-infinita $x > 0$, a temperatura uniforme θ_e . El punto de contacto toma rápidamente la temperatura de fusión θ_f con $\theta_g < \theta_f < \theta_e$.

Además, el borde extremo $x = -\infty$ del hielo es mantenido a θ_g y el borde extremo $x = +\infty$ del agua a θ_e . Hallar las temperaturas de ambas fases y la frontera libre que las separa.

EJERCICIO 17.

Se supone que la región $x < 0$ es inicialmente un cuerpo sólido de constantes $\rho_0, c_0, k_0, \alpha_0$ a la temperatura uniforme 0 y que la región $x > 0$ es inicialmente líquido de constantes ρ, c_2, k_2, α_2 a la temperatura uniforme V . Se supone que la temperatura del cambio de fase de la región $x > 0$ es θ_f con $0 < \theta_f < V$, y que las constantes características de la respectiva fase sólida son ρ, c_1, k_1, α_1 .

Hallar las temperaturas $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ de las regiones $x < 0, 0 < x < s(t), x > s(t)$ respectivamente, donde $x = s(t)$ representa la posición de la frontera libre de separación entre las fases sólida y líquida, existentes en la región $x > 0$.

OBSERVACION 8.

Existen ciertos materiales que cambian su estado de agregación

con cambios relativamente pequeños de su energía interna, lo que se traduce en que su calor latente de cambio de fase es despreciable. Es te caso se da en las dispersiones coloidales de materiales poliméricos en agua, conocidos comúnmente como *látex*. Un caso particular interesante es aquel de los *látex termosensibles*, que han sido hechos termosensibles (es decir, capaces de gelificarse por un aumento de temperatura) por la adición de ciertos ingredientes. La solución de este proceso se obtiene haciendo $\ell = 0$ en la solución de Neumann para el problema de Stefan a dos fases [15] (ver también [31]).

Más aún, en [7], se da una expresión para los coeficientes térmicos del material, para la cual se obtiene que la solución al caso $\ell = 0$ da la solución al caso $\ell > 0$. ■

B) Se considera el caso de un sólido finito $(0, x_0)$ que inicialmente se encuentra a la temperatura $-C < \theta_f = 0$ y con el extremo $x = x_0$, aislado térmicamente. Entonces cabe realizarse la siguiente pregunta [32]: ¿Si en el borde $x = 0$, el sólido es calentado a una temperatura $B > 0$, entonces cuándo la solución correspondiente al sólido semi infinito $(0, +\infty)$ es aplicable al caso del sólido finito $(0, x_0)$?

La respuesta es afirmativa si la temperatura de la fase sólida en el extremo $x = x_0$ coincide con la temperatura inicial; por lo tanto, para que se tenga $\theta_1(x_0, t) \approx -C$ es necesario y suficiente que sea $\text{erfc}(x_0/2a_1\sqrt{t}) \approx 0$, es decir:

$$(64) \quad \text{erf}\left(\frac{x_0}{2a_1\sqrt{t}}\right) \approx 1 \quad .$$

Teniendo presente que se tiene $\text{erf}(x) \approx 1, \forall x \geq 2$, se deduce que la respuesta será afirmativa cuando se tenga que, $x_0/2a_1\sqrt{t} \geq 2$, con lo cual, la aproximación será correcta para tiempos t que verifiquen:

$$(65) \quad t \leq \frac{x_0^2}{16a_1^2} \quad . \quad \blacksquare$$

C) Se considera el caso estacionario del problema de Stefan a dos fa ses correspondiente a un cuerpo unidimensional de longitud finita, el cual será representado por el intervalo $(0, x_0)$ con $x_0 > 0$. Se supone que la temperatura de cambio de fase es nula. Se analizarán dos ca-

dos diferentes:

CASO 1).

La temperatura en el borde $x = 0$ es $B > 0$ y en el borde $x = x_0$ es $-C < 0$. Con estas imposiciones el problema es siempre a dos fases, con la fase líquida en la parte izquierda y la fase sólida en la parte derecha, estando ambas fases separadas por la frontera libre $x = s$, con $0 < s < x_0$. La formulación matemática de este problema, está dada por: Hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ y la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida por:

$$(66) \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_2(x) > 0 & \text{si } 0 < x < s \\ 0 & \text{si } x = s \\ \theta_1(x) < 0 & \text{si } s < x < x_0 \end{cases}$$

de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(67) \quad \begin{cases} \text{i)} & \theta_2''(x) = 0, x \in (0, s) \quad ; \quad \theta_1''(x) = 0, x \in (s, x_0) \\ \text{ii)} & \theta_1(s) = \theta_2(s) = 0, \quad k_1 \theta_1'(s) = k_2 \theta_2'(s) \\ \text{iii)} & \theta_2(0) = B > 0, \quad \theta_1(x_0) = -C < 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 18.

Si se realiza el cambio de función incógnita [41]

$$(68) \quad u(x) = k_2 \theta^+(x) - k_1 \theta^-(x), \quad 0 < x < x_0$$

donde θ^+ y θ^- representan respectivamente la parte positiva y negativa de la función θ , entonces el problema (67) se reduce al siguiente:

$$(69) \quad \begin{cases} u'' = 0, & x \in (0, x_0) \\ u(0) = k_2 B > 0, & u(x_0) = -k_1 C < 0. \end{cases}$$

Además, θ puede reencontrarse a través de la relación:

$$(70) \quad \theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^-$$

OBSERVACION 9.

La frontera libre $x = s$ del problema (67) ha desaparecido en la nueva formulación (69). Más aún, puede ser obtenida a través de la

función u , pues se tiene la siguiente equivalencia:

$$(71) \quad u(s) = 0 \Leftrightarrow \theta(s) = 0.$$

EJERCICIO 19.

i) Obtener la solución de (69) y por ende deducir que la solución del problema (67) está dada por:

$$(72) \quad s = \frac{e_0}{1+e_0} x_0, \quad e_0 = \frac{k_2 B}{k_1 C}$$

$$(73) \quad \theta(x) = \begin{cases} \frac{B}{s} (s-x) & \text{si } 0 \leq x \leq s \\ \frac{-C}{x_0-s} (x-s) & \text{si } s \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

ii) Verificar directamente que (72) y (73) es la solución del problema original (67).

CASO 2).

En el borde $x = 0$ se tiene una temperatura $B > 0$ y en el borde $x = x_0$ se tiene un flujo de calor saliente $h > 0$. Por lo tanto, el cuerpo pierde energía a través del borde $x = x_0$ con lo cual su temperatura será inferior del valor B . Con estas imposiciones, en general, el problema no es a dos fases. Se verá que el problema será a dos fases si h verifica una cierta desigualdad. La formulación matemática de este problema está dada por: Hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ (si existe) y la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida por (66), de manera que se satisfagan las siguientes condiciones (67 i, ii, iii bis), a quien se lo llamará problema (67 bis), donde:

$$(67 \text{ iiibis}) \quad \begin{cases} -k_2 \theta'_2(x_0) = h > 0 & \text{si } \theta(x_0) \geq 0 \\ -k_1 \theta'_1(x_0) = h > 0 & \text{si } \theta(x_0) < 0. \end{cases}$$

EJERCICIO 20.

Utilizar el principio del máximo para ecuaciones elípticas para deducir que:

$$(74) \quad \theta(x) < B, \quad x \in (0, x_0).$$

EJERCICIO 21. [42]:

i) Si se realiza el cambio de función incógnita (68), entonces el problema (67 bis) se reduce al siguiente:

$$(75) \quad \begin{cases} u''(x) = 0 & , \quad x \in (0, x_0) \\ u(0) = k_2 B > 0 & , \quad -u'(x_0) = h > 0. \end{cases}$$

ii) La solución de (75) está dada por:

$$(76) \quad u(x) = -hx + k_2 B.$$

iii) El Caso 2) es un problema a dos fases si y sólo si

$$(77) \quad h > \frac{k_2 B}{x_0} .$$

iv) Más aún, si la desigualdad (77) se verifica, entonces la solución del problema (67 bis) está dada por:

$$(78) \quad s = \frac{k_2 B}{h}$$

$$(79) \quad \theta(x) = \begin{cases} B(1 - \frac{x}{s}) & \text{si } 0 \leq x \leq s \\ -\frac{k_2 B}{k_1} (\frac{x}{s} - 1) & \text{si } s \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

v) Si $h \leq \frac{k_2 B}{x_0}$, entonces el Caso 2) es sólo un problema estacionario de conducción del calor para la fase líquida, cuya temperatura viene dada por:

$$(80) \quad \theta(x) = B - \frac{h}{k_2} x \quad , \quad x \in [0, x_0].$$

vi) Verificar directamente que (78) y (79) es la solución del problema original (67 bis).

OBSERVACION 10.

Una condición suficiente para que el problema de Stefan sea a dos fases es que la temperatura impuesta sobre la superficie Γ del material (en nuestro caso unidimensional, Γ está representada por $\Gamma = \{0, x_0\}$) tome valores de signo contrario (siempre que la temperatura de cambio de fase sea 0). El Caso 2), con $h > \frac{k_2 B}{x_0}$, nos indica que dicha condición no es necesaria.

Además, esta idea de obtener una desigualdad para el flujo de ca

lor será utilizada más adelante para el problema de evolución de Stefan a dos fases, obteniéndose de este modo una propiedad para la solución de Neumann [43].

EJERCICIO 22 (Generalización del Caso 2)).

Se supone que el material tiene una fuente de energía interna $g = g(x)$ por unidad de volumen y de tiempo.

i) El problema consiste en hallar la frontera libre $s \in (0, x_0)$ (si existe) y la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida por (66), de manera que se satisfagan las siguientes condiciones (67 ibis, ii, iiibis), a quien se lo llamará problema (P), donde:

$$(67 \text{ ibis}) \quad \begin{cases} -k_2 \theta_2''(x) = g(x) & \text{si } x \in (0, s) \\ -k_1 \theta_1''(x) = g(x) & \text{si } x \in (s, x_0). \end{cases}$$

ii) Si se realiza el cambio de función incógnita (68), entonces el problema (P) se reduce al siguiente:

$$(81) \quad \begin{cases} -u''(x) = g(x), & x \in (0, x_0) \\ u(0) = k_2 B > 0, & -u'(x_0) = h > 0 \end{cases},$$

cuya solución viene dada por:

$$(82) \quad u(x) = k_2 B + \left(\int_0^{x_0} g(t) dt - h \right) x - \int_0^x (x-t) g(t) dt.$$

iii) Si $g \leq 0$ en $(0, x_0)$, es decir existe consumo de energía en el interior del material, entonces el problema (P) es a dos fases si y sólo si

$$(83) \quad h > \frac{k_2 B}{x_0} + \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} t g(t) dt.$$

Más aún, la frontera libre es el único elemento $s \in (0, x_0)$ que satisface la ecuación $u(s) = 0$.

iv) Resolver el problema (P) cuando:

a) $g \geq 0$ en $(0, x_0)$, es decir existe generación de energía en el interior del material.

b) g adopta valores de signo arbitrario.

OBSERVACION 11.

El ejercicio anterior generaliza resultados obtenidos en [42].

EJERCICIO 23.

Obtener la desigualdad (77) de una forma más simple, planteando el siguiente problema de conducción del calor estacionario (analizar la analogía con (75)):

$$(75 \text{ bis}) \quad \begin{cases} T''(x) = 0 & , \quad x \in (0, x_0) \\ T(0) = B > 0 & , \quad -k_2 T'(x_0) = h > 0 \end{cases}$$

y observando que se tiene:

$$(77) \quad \Leftrightarrow T(x_0) < 0.$$

Nótese que este método permite la obtención de la desigualdad (77) pero no da la expresión explícita de las temperaturas correspondientes a las fases líquida y sólida respectivamente. ■

D) Se considera un material semi-infinito $x > 0$ que se encuentra a temperatura inicial uniforme $\theta_i = -C < \theta_f = 0$ y que en el borde fijo $x = 0$ se le entrega energía por unidad de área transversal y de tiempo a través de un flujo de calor $q(t) \leq 0$ para $t > 0$.

a) Si $q(t) = -q < 0$ (constante), entonces la fusión no comienza inmediatamente a partir del instante inicial $t = 0$, pues la temperatura $\theta(0, t)$ deberá pasar de $\theta = -C < 0$ a $\theta = 0 (= \theta_f)$ y para ello empleará un cierto tiempo $t_0 > 0$.

Para deducir este hecho se considera el siguiente problema de conducción del calor para la fase sólida inicial:

$$(84) \quad \begin{cases} \text{i) } \alpha \theta_{xx} = \theta_t & , \quad x > 0, \quad t > 0 \\ \text{ii) } \theta(x, 0) = -C < 0, & x > 0 \\ \text{iii) } k \theta_x(0, t) = -q < 0 & , \quad t > 0. \end{cases}$$

La solución de (84) está dada por (Ver ejercicio 14ii del Curso Ilo C1):

$$(85) \quad \begin{cases} \theta(x, t) = -C + \frac{2q}{k} \sqrt{at} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\ \text{con } \theta(0, t) = -C + \frac{2q}{k} \sqrt{\frac{at}{\pi}} & , \end{cases}$$

con lo cual, se tiene:

$$(86) \quad \theta(0, t_0) = 0 \iff t_0 = \frac{\pi k^2 C^2}{4\alpha q^2}$$

obteniéndose de este modo lo anunciado anteriormente.

b) Si $q(t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}$ ($h_0 > 0$), entonces la fusión comienza inmediatamente a partir del instante inicial $t = 0$ si h_0 verifica una cierta desigualdad; en caso contrario, se tiene sólo un problema de conducción del calor en la fase sólida inicial.

En efecto, se considera el problema (84 bis) (es el problema (84) reemplazando la condición (84 iii) por la (84 iii bis)) donde:

$$(84 \text{ iiibis}) \quad k \theta_x(0, t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0,$$

cuya solución está dada por:

$$(87) \quad \begin{cases} \theta(x, t) = -C + \frac{h_0 \sqrt{\alpha\pi}}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \\ \text{con } \theta(0, t) = -C + \frac{h_0 \sqrt{\alpha\pi}}{k} \end{cases}$$

y que curiosamente tiene la propiedad de poseer en el borde fijo $x = 0$ una temperatura constante. Por lo tanto, el material sufrirá inmediatamente un cambio de fase si y sólo si

$$(88) \quad \theta(0, t) > 0 \iff h_0 > \frac{kC}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

donde k , α son los respectivos coeficientes térmicos correspondientes a la fase sólida.

Por otra parte, si $h_0 \leq kC/\sqrt{\alpha\pi}$ el material permanece siempre en su fase sólida (no existe cambio de fase) con una temperatura $\theta(x, t)$ dada por (87).

Esta metodología fue utilizada en [35]; previamente, la desigualdad (88) fue obtenida en [43] por otro método más extenso pero que permite hallar la temperatura de las fases líquida y sólida, además de la frontera libre que las separa. En efecto, se considera el problema de hallar la frontera libre $s = s(t)$, definida para $t > 0$, y la temperatura $\theta = \theta(x, t)$, definida por (I-4), de manera que se satisfagan las condiciones (I-5 bis) (la condición (I-5iv) es reemplazada por (I-5ivbis); además se supone que $\theta_f = 0$ y que $\theta_i = -C < 0$), donde:

$$(I-5ivbis) \quad k_2 \theta_{2x}(0, t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0 \quad (h_0 > 0).$$

Se obtiene el siguiente resultado [43]:

LEMA 6.

i) Si h_0 verifica la desigualdad

$$(89) \quad h_0 > \frac{Ck_1}{a_1 \sqrt{\pi}}$$

entonces la solución del problema (I-5 bis) está dada por:

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_2(x, t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \right), \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t > 0 \\ \theta_1(x, t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right), \quad x \geq s(t), \quad t > 0 \\ s(t) = 2 \omega \sqrt{t} \quad \left(a_2^2 = \frac{k_2}{\rho c_2}, \quad a_1^2 = \frac{k}{\rho c_1} \right) \end{array} \right.$$

donde

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1(\omega) = C \frac{\operatorname{erf}(\omega/a_1)}{\operatorname{erfc}(\omega/a_1)}, \quad B_1(\omega) = \frac{-C}{\operatorname{erfc}(\omega/a_1)} \\ A_2(\omega) = \frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2} \operatorname{erf}(\omega/a_2), \quad B_2(\omega) = -\frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2}, \end{array} \right.$$

ω es la única solución de la ecuación:

$$(92) \quad F_0(x) = x, \quad x > 0$$

con

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(x) = \frac{h_0}{\rho l} \exp(-x^2/a_2^2) - \frac{Ck_1}{\rho l a_1 \sqrt{\pi}} F_1(x/a_1) \\ F_1 \text{ función definida en (59)}. \end{array} \right.$$

(ii) Si $h_0 \leq \frac{Ck}{a_1 \sqrt{\pi}}$, (I-5bis) representa sólo un problema de

conducción del calor para la fase sólida, cuya temperatura está dada por

$$(94) \quad \theta(x, t) = \theta_1(x, t) = -C + \frac{h_0 a_1 \sqrt{\pi}}{k_1} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right), \quad x > 0, \quad t > 0.$$

DEMOSTRACION.

EJERCICIO 24.

(Obsérvese que (89) es equivalente a $F_0(0^+) > 0$).

EJERCICIO 25.

Verificar que el problema (I-5bis) con $h_0 = \frac{Ck_1}{a_1\sqrt{\pi}}$ corresponde al problema (I-5) cuando el calor latente de fusión $\ell \rightarrow +\infty$.

LEMA 7.

Si h_0 verifica la desigualdad (89), entonces los problemas (I-5) y (I-5bis) son equivalentes. Más aún, para el coeficiente σ de la frontera libre $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ de la solución de Neumann correspondiente al problema (I-5), se deduce la propiedad siguiente:

$$(95) \quad \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) < \frac{B}{C} \sqrt{\frac{k_2 c_2}{k_1 c_1}} .$$

DEMOSTRACION.

Como h_0 verifica la desigualdad (89), entonces la solución del problema (I-5bis) está dada por (90). Sea B_0 la temperatura correspondiente en el borde fijo $x = 0$, es decir:

$$(96) \quad B_0 = A_2(\omega) = \frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2} \operatorname{erf}(\omega/a_2) .$$

Como $B_0 > 0$, se puede considerar ahora el problema (I-5) tomando $B = B_0$, cuya solución viene dada por (57), reemplazando B por B_0 . Obsérvese que se tiene

$$(97) \quad A_1(x) = \alpha_1(x) , \quad B_1(x) = \beta_1(x) , \quad \forall x > 0$$

independientemente de la relación existente entre B_0 y B .

Por otra parte, se obtiene que:

$$(98) \quad \sigma = \omega .$$

En efecto, como vale $\beta_2(\omega) = -\frac{B_0}{\operatorname{erf}(\omega/a_2)} = -\frac{a_2 h_0 \sqrt{\pi}}{k_2}$,

se tiene que:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{k_2 B_0}{\rho \ell a_2 \sqrt{\pi}} F_2\left(\frac{\omega}{a_2}\right) - \frac{Ck_1}{\rho \ell a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\omega}{a_1}\right) = \\ &= \frac{h_0}{\rho \ell} \exp(-\omega_2/a_2^2) - \frac{Ck_1}{\rho \ell a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\omega}{a_1}\right) = F_0(\omega) = \omega , \end{aligned}$$

y de la unicidad de σ en la ecuación (58), se deduce entonces la igualdad (98). Más aún, se tiene

$$(99) \quad A_2(x) = \alpha_2(x) , \quad B_2(x) = \beta_2(x) , \quad \forall x > 0$$

con lo cual los dos problemas (I-5) y (I-5bis) son equivalentes. Por

otra parte, teniendo sólo presente el problema (I-5), esta equivalencia nos induce la desigualdad

$$(100) \quad h_o = \frac{k_2 B}{a_2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sigma/a_2)} > \frac{Ck_1}{a_1 \sqrt{\pi}}$$

que resulta ser (95).

OBSERVACION 12.

La desigualdad (95) es independiente del calor latente de fusión y tiene sólo sentido físico en el caso en que el término de la derecha sea menor que uno. ■

E) A continuación, y para no hacer tan extenso el presente cursillo, se dará una lista no completa de diversos problemas de tipo Stefan, en los cuales el conocimiento explícito de la solución exacta ha jugado un papel preponderante (más referencias sobre el tema podrán encontrarse en [44]):

- i) Analogía al método de semejanza e inmovilización del dominio [30].
- ii) Cambio de densidad en la transición de fase ($\rho_1 \neq \rho_2$) [2, 4, 6, 29].
- iii) Acoplamiento de la temperatura y de la concentración (Cristalización de una aleación binaria) [29, 35, 50, 56].
- iv) Solidificación de aleaciones [47, 48, 53].
- v) Solidificación y fusión de un cuerpo compuesto [12].
- vi) Presencia de multifases [29, 52, 54, 55].
- vii) Procesos de transferencia de calor y materia con cambio de fase en un medio poroso [5, 19-21, 24, 25].
- viii) Absorción de un gas por un sólido [14].
- ix) Oxidación del zirconio [9, 10 (interacción entre UO_2 y Zr), (Ver conferencia CA1)].
- x) Determinación de coeficientes térmicos desconocidos [36, 45 (Ver conferencia CA5), 46 (incluye una región pastosa sólido-líquido)].
- xi) Con coeficientes variables [6, 49].

Además, caben citarse los siguientes libros [1, 4, 8, 11, 16, 22, 23, 26, 29, 40] y el trabajo de revisión [28].

F) Para finalizar, se dará la formulación de dos problemas de frontera libre para la ecuación del calor o de la difusión:

F1) El *problema de Verigin* [29, p.61] estudia la filtración de líquidos en medios porosos. Sean $u_1 = u_1(x, t)$ y $u_2 = u_2(x, t)$ las presiones de dos líquidos inmiscibles, en contacto entre sí en el plano $x = s(t)$, en movimiento en un medio de porosidad $m > 0$. El problema consiste en hallar las funciones $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$, $s = s(t)$ de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{1t} = a_1^2 u_{1xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ u_{2t} = a_2^2 u_{2xx}, \quad s(t) < x < x_0, \quad t > 0 \\ u_1(0, t) = f_1(t), \quad u_2(x_0, t) = f_2(t), \quad t > 0 \\ u_1(x, 0) = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq b \\ u_2(x, 0) = h_2(x), \quad b \leq x \leq x_0 \\ u_1(s(t), t) = u_2(s(t), t), \quad t > 0 \\ m \dot{s}(t) = -k_1 u_{1x}(s(t), t) = -k_2 u_{2x}(s(t), t), \quad t > 0 \\ s(0) = b \in [0, x_0]. \end{array} \right.$$

EJERCICIO 26.

Bajo las hipótesis

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = f_1, \quad h_2(x) = h_2 < f_1, \quad b = 0, \quad x_0 = +\infty \\ (f_2(t) \text{ y } h_1(x) \text{ no intervienen en el problema (101)}) \end{array} \right.$$

las funciones

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(x, t) = f_1 + A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\ u_2(x, t) = h_2 + B \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ s(t) = 2\beta\sqrt{t}, \quad \beta > 0 \end{array} \right.$$

satisfacen las condiciones (101), donde las constantes A y B están

dadas, en función de β , de la manera siguiente:

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\beta) = - \frac{(f_1 - h_2) \lambda \exp(-\beta^2/a_2^2)}{g(\beta)}, B(\beta) = \frac{(f_1 - h_2) \exp(-\beta^2/a_1^2)}{g(\beta)} \\ \lambda = \frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}, g(x) = \exp(-\frac{x^2}{a_1^2}) \operatorname{erfc}(\frac{x}{a_2}) + \\ + \lambda \exp(-\frac{x^2}{a_2^2}) \operatorname{erf}(\frac{x}{a_1}) \end{array} \right.$$

donde β es la única solución de la ecuación:

$$(105) \quad h(x) = x, \quad x > 0$$

con

$$(106) \quad h(x) = \frac{k_2 (f_1 - h_2)}{m a_2 \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{x^2}{a_2^2})}{g(x)},$$

función que verifica las siguientes propiedades:

$$(107) \quad h(0^+) = \frac{k_2 (f_1 - h_2)}{m a_2 \sqrt{\pi}}, \quad f(+\infty) = 0, \quad f' < 0.$$

OBSERVACION 13.

Nótese la similitud entre el problema de Verigin para la teoría de la filtración de líquidos en medios porosos y el problema de Stefan para la teoría de la conducción del calor.

F2) En [27], se esquematiza el siguiente problema de frontera libre para la ecuación de la difusión, ligado a reacciones químicas veloces. Inicialmente, se tiene en la región $(0, b)$ una sustancia A con concentración $h_A = h_A(x)$ y coeficiente de difusividad α_A , y en la región (b, x_0) una sustancia B con concentración $h_B = h_B(x)$ y coeficiente de difusividad α_B . Se supone que las paredes $x = 0$ y $x = x_0$, son impermeables a dichas sustancias y que cuando se ponen en contacto se produce una determinada reacción química veloz que da lugar a un precipitado. En tal caso, se puede decir que en el plano $x=s(t)$ de separación de las dos sustancias, se tendrá concentraciones nulas mientras que entre los respectivos flujos deberá existir una relación fija β , constante que está ligada a la reacción química que

se produzca. Sean $u_A = u_A(x,t)$ y $u_B = u_B(x,t)$ las concentraciones de las respectivas sustancias. El problema puede plantearse como: Hallar las funciones $u_A = u_A(x,t)$, $u_B = u_B(x,t)$, $s = s(t)$ de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{A_t} = \alpha_A u_{A_{xx}} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ u_{B_t} = \alpha_B u_{B_{xx}} \quad , \quad s(t) < x < x_0 \quad , \quad t > 0 \\ u_{A_x}(0,t) = u_{B_x}(x_0,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u_A(x,0) = h_A(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b \\ u_B(x,0) = h_B(x) \quad , \quad b \leq x \leq x_0 \\ u_A(s(t),t) = u_B(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ \alpha_A u_{A_x}(s(t),t) = \beta \alpha_B u_{B_x}(s(t),t) \quad , \quad t > 0 \\ s(0) = b \quad . \end{array} \right.$$

OBSERVACION 14.

Nótese la analogía existente entre el problema (108) y el problema de Stefan a dos fases con calor latente de fusión nula.

REFERENCIAS

- [1] V.S.ARPACI, "Conduction heat transfer", Addison-Wesley, Massachusetts (1966).
- [2] A.B.BANCORA - D.A.TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free boundary", To appear.
- [3] M.BRILLOUIN, "Sur quelques problèmes non résolus de la Physique Mathématique classique. Propagation de la fusion", Annales de l'Inst.H.Poincaré, 1 (1930/31), 285-308.
- [4] H.S.CARSLAW - J.C.JAEGER, "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).
- [5] S.H.CHO, "An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium", Int.J.Heat Mass Transfer, 18 (1975), 1139-1142.
- [6] S.H.CHO - J.E.SUNDERLAND, "Phase change problem with temperature-dependent thermal conductivity", J.Heat Transfer, 96 C (1974), 214-217.

- [7] S.W.CHURCHILL - J.P.GUPTA, "Approximations for conduction with freezing or melting", *Int.J.Heat Mass Transfer*, 20 (1977), 1251-1253.
- [8] J.Crank, "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).
- [9] A.DENIS - E.A.GARCIA, "Diffusion in a semi-infinite system with a moving interphase considering solvent density change: Application to the oxidation of zirconium", *J.Nuclear Materials*, 96 (1981), 127-140.
- [10] A DENIS- E.A.GARCIA, "A model to describe the interaction between UO_2 and zircaloy in the temperature range 1000-1700°C", *J.Nuclear Materials*, 116(1983), 44-54.
- [11] E.R.G.ECKERT - R.M.DRAKE, Jr., "Analysis of heat and mass transfer", Mc Graw Hill, Tokyo (1972).
- [12] M. EPSTEIN, "Heat conduction in the UO_2 -cladding composite body with simultaneous solidification and melting", *Nuclear Sci.Eng.*, 51 (1973), 84-87.
- [13] A.FASANO - M.PRIMICERIO, "A critical case for the solvability of Stefan-like problems", *Math.Meth.Appl.Sci.*, 5(1983), 84-96.
- [14] E.A.GARCIA, "Modèle pour l'analyse thermogravimétrique des phénomènes d'oxydation avec desquamation", *J. Less-Common Metals*, 78(1981), 159-175.
- [15] J.A.GUZMAN, "Application of the heat transfer solution for the case of one-dimensional solidification with negligible latent heat", *Lat.Amer.J.Heat Mass Transfer*, 6(1982), 41-51.
- [16] W.JOST, "Diffusion in solids, liquids, gases", Academic Press, New York (1952).
- [17] D.KINDERLEHRER - G.STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).
- [18] G.LAME - B.P.CLAPEYRON, "Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", *Annales Chimie Physique*, 47 (1831), 250-256.
- [19] S.LIN, "An exact solution of the sublimation problem in a porous medium", *J.Heat Transfer*, 103 (1981), 165-168.
- [20] S.LIN, "An exact solution of the sublimation problem in a porous medium, Part II - With an unknown temperature and vapor concentration at the moving sublimation front", *J.Heat Transfer*, 104 (1982), 808-811.
- [22] A.V.LUIKOV, "Analytical heat diffusion theory", Academic Press New York (1968).
- [21] S.LIN, "An exact solution of the desublimation problem in a porous medium", *Int.J.Heat Mass Transfer*, 25(1982), 625-630.
- [23] V.J.LUNARDINI, "Heat transfer in cold climates" Van Nostrand

Reinhold Company, New York (1981).

- [24] M.D.MIKHAILOV, "Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front", *Int.J.Heat Mass Transfer*, 18 (1975), 797-804.
- [25] M.D.MIKHAILOV, "Exact solution for freezing of humid porous half-space", *Int. J.Heat Mass Transfer*, 19(1976), 651-655.
- [26] M.N.ÖZISIK "Heat conduction", J.Wiley, New York (1980).
- [27] M.PRIMICERIO, "Problemi a contorno libero per l'equazione della diffusione", *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 32(1973/1974), 183-206.
- [28] M.PRIMICERIO, "Problemi di diffusione a frontiera libera", *Boll. U.M.I.*, 18A (1981), 11-68.
- [29] L.I.RUBINSTEIN, "The Stefan problem", *Trans. Math. Monographs - Vol.27*, Amer, Math. Soc., Providence (1971).
- [30] A.L.RUOFF, "An alternate solution of Stefan's problem", *Quart. Appl. Math.*, 16 (1958), 197-201,
- [31] B.SHERMAN, "Limiting behavior in some Stefan problems as the latent heat goes to zero", *SIAM J.Appl. Math.*, 20(1971), 319-327.
- [32] A.D.SOLOMON, "An easily computable solution to a two-phase Stefan problem", *Solar Energy*, 23(1979), 525-528.
- [33] A.D.SOLOMON, "A note on the Stefan number in slab melting and solidification", *Letters Heat Mass Transfer*, 8(1981), 229-235.
- [34] A.D.SOLOMON - D.G.WILSON - V.ALEXIADES, "A mushy zone model with an exact solution", *Letters Heat Mass Transfer*, 9, (1982), 319-324.
- [35] A.D.SOLOMON - D.G.WILSON - V.ALEXIADES, "Explicit solutions to phase change problems", *Quart. Appl. Math.*, 41(1983), 237-243.
- [36] M.B.STAMPELLA - D.A.TARZIA, "Determinación de coeficientes desconocidos en el problema de Stefan a dos fases", *Sigma*, 8(1982), 83-98. "Determination of one or two unknown a two-phase Stefan problem", To appear.
- [37] J.STEFAN, "Über einige Probleme der theorie der Wärmeleitung" *Sitzungsberichte der Kaiserlichen akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe*, 98(1889), 473-484.
- [38] J.STEFAN, "Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere", *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe*, 98(1889), 965-983. *Annalen der Physik und Chemie*, 42(1891), 269-286.
- [39] J.STEFAN, "Über die Theorie der Eisbildung", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1(1890), 1-6.

- [40] J.SZEKELY - N.J.THEMELIS, "Rate phenomena in process metallurgy", J.Wiley, New York (1971).
- [41] D.A.TARZIA, "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27 (1979/80), 145-156.
- [42] D.A.TARZIA, "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28 (1980/81), 73-89.
- [43] D.A.TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two phase Stefan problem", Quart.Appl.Math., 39 (1981), 491-497.
- [44] D.A.TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981-82), 147-241.
- [45] D.A.TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J.Heat Mass Transfer, 26(1983), 1151-1157.
- [46] D.A.TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos de un material semi-infinito a través del modelo de zona pastosa planteado por Solomon-Wilson-Alexiades para el problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase", Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Tucumán, 13-15 Octubre 1983.
- [47] R.H.TIEN-G.E.GEIGER, "A heat-transfer analysis of the solidification of binary eutectic system", J.Heat Transfer, 89 C(1967), 230-234.
- [48] R.H.TIEN-V.KOUMP, "Effect of density change on the solidification of alloys", J.Heat Transfer, 92 C (1970), 11-16.
- [49] G.A.TIRSKII, "Two exact solutions of Stefan's nonlinear problem" Soviet Physics Dokl., 4(1959), 288-292.
- [50] T. TSUBAKI-B.A.BOLEY, "One-dimensional solidification of binary mixtures", Mech. Res. Comm., 4(1977), 115-122,
- [51] H.WEBER, "Die Partiellen Differential Gleichungen der Mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen", Braunwschweig (1901), T.II.
- [52] J.H.WEINER, "Transient heat conduction in multiphase media", Brit.J.Appl.Physics, 6(1955), 361-363.
- [53] T.D.WELCH-A.W.CRONENBERG, "A quantitative comparison of solidification analysis for single-component and mixed-oxide fuels" Nuclear Sci.Eng., 67(1978), 263-269.
- [54] D.G.WILSON, "Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multi-phase Stefan problems", SIAM J. Appl. Math., 35 (1978), 135-147.
- [55] D.G.WILSON, "Lagrangian coordinates for moving boundary problems", SIAM J.Appl.Math, 42(1982), 1195-1201.
- [56] D.G.WILSON-A.D.SOLOMON-V.ALEXIADES "A shortcoming of

of the explicit solution for the binary alloy solidification problem"
Letters Heat Mass Transfer, 9(1982), 421-428.

PROMAR (CONICET-UNR)
Instituto de Matemática "Beppo Levi"
Universidad Nacional de Rosario
Avenida Pellegrini 250
2000 ROSARIO - ARGENTINA