UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 4 al 8 de JULIO - 1983

12

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
1984

ESTUDIOS TEORICOS EN EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE

Domingo Alberto TARZIA

Continuando la Introducción del presente Seminario, en este Cursillo se realizarán estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase para un cuerpo semi-infinito con condiciones de temperatura ó flujo de calor en la frontera fija $x=0$, como ser: existencia de solución a través de varios métodos teóricos (argumento retardado, ecuación integral equivalente, proceso iterativo), unicidad de solución, dependencia monótona y estabilidad de la solución respecto de los datos, comportamiento asintótico de la frontera libre, etc..

I. EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE CON ESPECIFICACION DE TERMPERATURA EN EL BORDE FIJO.

Se estudiará el problema de Stefan unidimensional a una fase siguiente: Dado $f=f(t)\geq 0$, $h=h(x)\geq 0$ y $b\geq 0$, se quiere hallar $T>0$ y dos funciones $s=s(t)$ y $z=z(x,t)$ de manera que el triple $\{T,s,z\}$ satisfaga las siguientes condiciones:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{i)}\ z_{xx}-z_t=0 \text{ en } D_{T,s}=\{(x,t)/\ 0<x<s(t)\ ,\ 0<t<T\} \\ \text{ii)}\ z(0,t)=f(t)\ ,\quad 0<t<T \\ \text{iii)}\ z(x,0)=h(x)\ ,\quad 0\leq x\leq b \\ \text{iv)}\ s(0)=b \\ \text{v)}\ z(s(t),t)=0\ ,\quad 0<t<T \\ \text{vi)}\ z_x(s(t),t)=-\dot{s}(t)\ ,\quad 0<t<T\ . \end{cases}$$

<u>OBSERVACION 1</u>: En el caso $b=0$ la condición (1iii) sobre h es superflua y por lo tanto puede eliminarse de la formulación del problema.

A) Se dirá que $\{T,s,z\}$ es una <u>solución</u> del problema (1) si y sólo si:

i) $T>0$.

ii) $s\in C^1(0,T]\cap C^0[0,T]$, $s(t)>0$ en $(o,T]$.

iii) z es continua (excepto en un número finito de puntos de discontinuidad de f y h) y acotada en $\overline{D}_T$, z_x, z_{xx}, $z_t\in C^0(D_T)$, $z_x(s(t),t)$ es continua en $(0,T]$.

iv) Se satisfacen las condiciones (1i-vi).

<u>OBSERVACION 2</u>: Se usará la notación D_T en lugar de $D_{T,s}$ cuando no dé lugar a confusión. En general, se supone que f y h son funciones continuas excepto en un número finito de saltos acotados(ver (H1) y (H2) en (F), punto a partir del cual se dan resultados de existencia de solución).

<u>LEMA 1</u> Si $\{T,s,z\}$ es una solución de (1) , entonces la condición de Stefan (1vi) es equivalente a la siguiente condición integral

$$(2)\quad \frac{s^2(t)}{2}=\frac{b^2}{2}+\int_0^b \xi\ h(\xi)d\xi+F(t)-\int_0^{s(t)}\xi z(\xi,t)d\xi,$$

(2) $$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau .$$

DEMOSTRACION: EJERCICIO 1 (Utilizar la fórmula (50ii) del Cursillo C1).

OBSERVACION 3: Del Lema 1 surge el hecho de que las condiciones (1vi) y (2) pueden usarse indistintamente para obtener propiedades para las soluciones del problema de Stefan (1).

B) Para datos generales $f\geq 0$, $h\geq 0$ se tiene una importante propiedad sobre el comportamiento de la frontera libre s.

LEMA 2: i) Si $f\geq 0$, $h\geq 0$, entonces la frontera libre s es una función monótona no-decreciente ($\dot{s}\geq 0$) y $z\geq 0$ en $\bar{D}_T$.
ii) Más aún, si $h\not\equiv 0$ ó $f\not\equiv 0$ en todo entorno de $t=0$, entonces s es una función monótona creciente ($\dot{s}>0$).

DEMOSTRACION: i) Por el Principio del Máximo se tiene que $z\geq 0$ en $\bar{D}_T$. Utilizando el Lema de Hopf y la condición (1v) se deduce que $z_x(s(t),t)\leq 0$ y por ende $\dot{s}(t)\geq 0$. Además, si fuese $z\equiv 0$ se tendría entonces $z_x\equiv 0$, lo cual implicaría que $\dot{s}\equiv 0$. ii) Surge por el Principio del Máximo fuerte.

C) Se analizará la propiedad de la dependencia monótona de los datos según el siguiente:

TEOREMA 3 (de monotonía) : Sean $\{T_1,s_1,z_1\}$ y $\{T_2,s_2,z_2\}$ soluciones del problema (1) correspondientes a los datos (b_1,h_1,f_1) y (b_2,h_2,f_2) respectivamente, y sea $T=\mathrm{Min}(T_1,T_2)$. Si $h_2\not\equiv 0$ ó $f_2\not\equiv 0$, entonces se tienen los siguientes resultados:

i) Si $b_1 < b_2$, $h_1 \leq h_2$, $f_1 \leq f_2$ entonces $s_1 < s_2$ en $[0,T]$ y $z_1 < z_2$ en D_{T,s_1} .

ii) Si $b_1 \leq b_2$, $h_1 \leq h_2$, $f_1 \leq f_2$, $T_1 = T_2$ entonces $s_1 \leq s_2$ en $[0,T]$ y $z_1 \leq z_2$ en D_{T,s_1} .

<u>DEMOSTRACION</u>: i) Sea t_0 el primer valor de t para el cual se tiene que $s_1(t_0)=s_2(t_0)$; entonces $\dot{s}_2(t_0) \leq \dot{s}_1(t_0)$. Por el Principio del Máximo fuerte se tiene que $z_2(s_1(t)t) > 0$ en $(0,t_0)$ y $z_2 - z_1 > 0$ en D_{t_0,s_1} . Por el Lema de Hopf se tiene que $\dot{s}_1(t_0) - \dot{s}_2(t_0) = (z_2 - z_1)_x (s_1(t_0), t_0) < 0$, lo que resulta ser un absurdo.

ii) Para $\delta > 0$ sea $\{T, s_\delta, z_\delta\}$ la solución del problema (1) correspondiente a los datos $(b_2+\delta,\ h_{2_\delta}, f_2)$, donde:

$$h_{2_\delta}(x) = \begin{cases} h_2(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq b_2 \\ 0 & \text{si} \quad b_2 < x \leq b_2+\delta \ . \end{cases}$$

Por i) se tiene que $s_1 < s_\delta$ y $s_2 < s_\delta$ en $[0,T]$ y por el Principio del Máximo se tiene que $z_\delta \geq 0$ en D_{T,s_δ} y $z_\delta - z_2 \geq 0$ en D_{T,s_2}.

Restando las tespectivas versiones de (2) para (s_2, z_2) y (s_δ, z_δ) se obtiene:

$$s_\delta^2(t) - s_2^2(t) = (b_2+\delta)^2 - b_2^2 - 2\int_0^{s_2(t)} \xi \left[z_\delta(\xi,t) - z_2(\xi,t) \right] d\xi - 2\int_{s_2(t)}^{s_\delta(t)} \xi \, z_\delta(\xi,t)\, d\xi \leq (b_2+\delta)^2 - b_2^2 = 2b_2\delta + \delta^2$$

con lo cual resulta:

$$s_1^2(t) < s_\delta^2(t) \leq s_2^2(t) + 2b_2\delta + \delta^2, \ \forall \delta > 0 \ , \ \forall t \in (0,T] \ ,$$

y, por ende, se obtiene $s_1(t) \leq s_2(t)$ en $[0,T]$. Por el Principio del Máximo se tiene que $z_1 \leq z_2$ en D_{T,s_1}.

<u>OBSERVACION 4</u>: i) Para las hipótesis de los datos (b,h,f),

en el Lema 3, ver más adelante los teoremas de existencia.
ii) Los resultados de los Lemas 2 y 3 están de acuerdo con la realidad física.

D) Como un corolario del Lema 3, se obtiene el siguiente resultado de unicidad:

TEOREMA 4: Existe a lo **sumo** una solución en el problema de Stefan (1).

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 2) .

E) En el caso

(3) $b=0 \quad , \quad f(t)=\theta_0>0$

la solución del problema (1), que resulta ser única, está dada por (ver Cursillo C3):

$$(4) \quad \begin{cases} s(t)=2\xi\sqrt{t} \\ z(x,t)=\theta_0-\dfrac{\theta_0}{\mathrm{erf}(\xi)}\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

donde ξ es la única raíz de la ecuación:

$$(5) \quad x\exp(x^2)\,\mathrm{erf}(x)=\frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad x>0.$$

A continuación, se verá la existencia de solución del problema (1) , para los casos $b=0$ y $b>0$, a través de los siguientes métodos: argumento retardado [3] , ecuación integral equivalente [10] , proceso iterativo [7] .

F) Sean las siguientes hipótesis [3] :

(H1) $\begin{cases} \text{i) } b>0 \\ \text{ii) } f,h\geq 0 \text{ son funciones continuas excepto en un} \end{cases}$

número finito de saltos acotados;

(H1) iii) $N>0/\ 0\leq h(x)\leq N(b-x)$, $\forall x\in[0,b]$.

$$(H2)\begin{cases} \text{i) } f \text{ es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados;} \\ \text{ii) } \ell,L>0/\ \ell t\leq f(t)\leq Lt \ , \ \forall t\in[0,T] \ . \end{cases}$$

<u>OBSERVACION 5</u> [3] : Si z es una solución del problema (1i-v) para una función dada s Lipschitz en $[0,T]$, entonces bajo las hipótesis (H1) ó (H2) se tiene que $z_x(s(t),t)$ existe y es continua en $(0,T]$. Más aún, se tiene el mismo resultado si la condición de temperatura (1ii) se reemplaza por una condición de flujo $z_x(0,t)= -g(t)$.

<u>LEMA 5</u>: Si z es una solución del problema (1i-v) bajo las hipótesis (H1) y para una función dada s monóto no decreciente, entonces:

i) Existe una constante $A=A(b,M,N)>0$ de manera que:

(6) $$0\leq \frac{1}{\rho}\, z(s(t)-\rho,t)\leq A \ , \ \forall t\in[0,T] \ , \ \forall \rho\in(0,b)$$

donde

(7) $$M=\text{Máx}\left(\underset{0\leq t\leq T}{\text{Máx}} f(t) \ , \ \underset{0\leq x\leq b}{\text{Máx}} h(x)\right).$$

ii) Además, si $z_x(s(t),t)$ existe, se tiene que:

(8) $$-A\leq z_x(s(t),t)\leq 0.$$

<u>DEMOSTRACION</u> : i) Sean

(9) $$\begin{aligned} &A=\text{Máx}\left(N,\frac{M}{b}\right) \ , \quad t_0\in[0,T] \\ &W(x)\equiv W(x,t_0)= A\left[s(t_0)-x\right] \ . \end{aligned}$$

La función W verifica las siguientes propiedades:

(10) $$\begin{cases} W_{xx}-W_t=0 \\ W(0,t_0)=A\ s(t_0)\geq Ab\geq M\geq f(t) \ , \ \forall t\in[0,t_0] \end{cases}$$

$$(10)\begin{cases} W(x,t_0)\geq A\ (b-x)\geq N(b-x)\geq h(x) & , \forall x\in[0,b] \\ W(s(t),t_0)=A\left[s(t_0)-s(t)\right]\geq 0 & , \forall t\in[0,t_0] .\end{cases}$$

Por el principio del Máximo se deduce que:

$$(11)\quad 0\leq z(x,t)\leq W(x,t_0)\quad ,\ 0\leq x\leq s(t)\quad ,\ 0\leq t\leq t_0 ,$$

y por ende (6) , pues vale $\forall t_0\in[0,T]$.

ii) Utilizando (1v), se tiene:

$$(12)\quad -A\leq z_x(s(t_0),t_0)=\lim_{\rho\to 0} -\frac{z(s(t\ )-\rho,\ t_0)}{\rho}\leq 0.$$

<u>OBSERVACION 6</u>: La metodología utilizada en el Lema 5 para mayorar la solución z es conocida como <u>método de las barreras lineales</u> (debido a la forma de W) , o simplemente <u>método de las barreras</u>.

<u>OBSERVACION 7</u>: Estimaciones análogas a las de (6) y (8) se obtienen en L).

G) <u>Método del argumento retardado</u> [1,3] :

Para el <u>caso</u> $b>0$ y para cada $\theta\varepsilon(0,b)$ se construye una familia de aproximaciones (s_θ,z_θ), solución del problema (1 bis) en el cual se reemplazan las condiciones (1iii) y (1vi) por

$$(1iii\ bis)\begin{cases} z_\theta(x,0)=h_\theta(x)\equiv \chi_\theta(x)\ h(x) \\ \chi_\theta(x)\equiv\chi_{[0,b-\theta]}(x)=\begin{cases} 1 & si\quad 0\leq x\leq b-\theta \\ 0 & si\quad b-\theta<x\leq b\end{cases}\end{cases}$$

$$(1vi\ bis)\qquad s_\theta(t)=-z_{\theta_x}(s_\theta(t-\theta),\ t-\theta)$$

respectivamente. La condición (1vi bis) significa un <u>retardo del argumento</u> en la condición de Stefan (1vi). Las funciones s_θ,z_θ se definen por inducción, respecto del tiempo, de la manera siguiente:

a) En el primer intervalo de tiempo $0\leq t\leq\theta$, se define

$$(13)\begin{cases} \text{i) } s_\theta(t)\equiv b \ , \quad t\in[0,\theta] . \\ \text{ii) } z_\theta \text{ como la única solución del problema (1i-} \\ \text{-v) en la región } 0\leq x\leq s_\theta(t) \ , \ 0\leq t\leq \theta \text{ con} \\ \text{datos } s_\theta, h_\theta . \end{cases}$$

Por lo tanto, $z_{\theta_x}(s_\theta(t),t)=z_{\theta_x}(b,t)$ existe y es continua en $[0,\theta]$. Además, se tiene que $-A\leq z_{\theta_x}(b,t)\leq 0$ en $[0,\theta]$. Procediendo por inducción, se supone que (s_θ, z_θ) han sido construídos para $0\leq t\leq n\theta$ de manera que:

$$(14)\begin{cases} \text{i) } s_\theta\in C^1, z_{\theta_x}(s_\theta(t),t) \text{ existe y es continua} \\ \quad \text{con } -A\leq z_{\theta_x}(s_\theta(t),t)\leq 0 , \\ \text{ii) } s_\theta(t)=b-\displaystyle\int_\theta^t z_{\theta_x}(s_\theta(\eta-\theta),\eta-\theta)\, d\eta \ , \quad t\geq\theta . \end{cases}$$

En el próximo intervalo de tiempo $n\theta\leq t\leq (n+1)\theta$, se define:

$$(15)\begin{cases} \text{i) } s_\theta(t) \text{ como en (14);} \\ \text{ii) } z_\theta(x,t) \text{ como la solución de (1i-v) en la} \\ \quad \text{región } 0\leq x\leq s_\theta(t) \ , \ n\theta\leq t\leq (n+1)\theta . \end{cases}$$

Por la hipótesis de inducción (14) para z_{θ_x} se tiene que $s_\theta\in C^1$ con $0\leq \dot{s}_\theta\leq A$. Por otra parte, $z_{\theta_x}(s_\theta(t),t)$ existe y es continua verificándose (14i) en $[n\theta,(n+1)\theta]$.

Por lo tanto, por el Principio de Inducción, la sucesión (s_θ, z_θ), aproximación del problema de Stefan (1) para cada $\theta\in(0,b)$, puede ser construída para $t\in[0,T]$. Más aún, se obtiene el siguiente resultado:

<u>TEOREMA 6</u>: i) Para cada $\theta\in(0,b)$ y bajo las hipótesis (H1) existe una solución $\{T, s_\theta z_\theta\}$ del problema (1 bis) con dato inicial h_θ (1iii bis) y con condición de Stefan retardada (1vi bis). La función $s_\theta\in C^1[0,T]$ satisface

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{s}_\theta(t) = -z_{\theta_x}(s_\theta(t-\theta), t-\theta) \\ 0 \leq \dot{s}_\theta(t) \leq A \quad \text{en } [0,T] \end{cases}.$$

ii) Las sucesiones (s_θ) y (z_θ) convergen uniformemente a s y z respectivamente cuando $\theta \to 0$, donde $\{T,s,z\}$, es la única solución del problema de Stefan (1). Más aún, la frontera libre $s \in C^1[0,T]$ es una función monótona no-decreciente y satisface $0 \leq \dot{s}(t) \leq A$.

DEMOSTRACION: La sucesión (s_θ) es equicontinua y uniformemente acotada pues se tiene que $0 \leq \dot{s}_\theta(t) \leq A$, $b \leq s_\theta(t) \leq b+AT$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall \theta \in (0,b)$.

Por el Teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión (s_{θ_i}) de la sucesión (s_θ) de manera que s_{θ_i} converge uniformemente a una función Lipschitz no-decreciente s cuando $\theta_i \to 0$. Sea z , la solución del problema (1i-v) para esa función particular s .

EJERCICIO 3: Verificar que z_{θ_i} converge uniformemente a z cuando $\theta_i \to 0$, y que $\{T,s,z\}$ es solución del problema (1) .(Utilizar la representación integral (2) de la condición de Stefan (1vi)) [1,3] .

EJERCICIO 4 [3]:(Teorema de Estabilidad) Sea $\{T_i,s_i,z_i\}$ la solución del problema (1) correspondiente a los datos (b_i,h_i,f_i) $(i=1,2)$, que satisfacen las hipótesis (H1). Si $0<b_1 \leq b_2$ entonces existe una constante $C=C(b_1,A,T)$ de manera que se satisfaga

$$(17) \quad |s_2(t)-s_1(t)| \leq C\left[b_2-b_1 + \int_0^{b} \xi|h_2(\xi)-h_1(\xi)|d\xi + \int_{b_1}^{b_2} \xi h_2(\xi)d\xi + \int_0^t |f_2(\tau)-f_1(\tau)|d\tau\right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como una consecuencia inmediata de la propiedad de estabilidad (17), se deduce el:

COROLARIO 7: Bajo las hipótesis del Ejercicio anterior, la solución del problema de Stefan (1), con $b>0$, es única.

La hipótesis (H1iii) para el dato h puede ser eliminada en el Teorema 6, a través del siguiente resultado:

TEOREMA 8 [5]: Si $b>0$ y $f,h\geq 0$ son funciones continuas excepto en un número finito de saltos acotados y se tiene que $h\not\equiv 0$ ó $f\not\equiv 0$ en $[0,\varepsilon]$ para cada $\varepsilon>0$, entonces existe una única solución del problema de Stefan (1), para cualquier instante $T>0$.

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 5)

H) Primeramente se verán algunas propiedades preliminares [3]:

LEMA 9: Bajo las hipótesis (H2), sea $\{T,s,z\}$ una solución de (1) con $b\geq 0$. Entonces existe una constante $\lambda>0$, independientemente de b, de manera que:

$$(18) \qquad \lambda t\leq s(t) \quad , \quad \forall t\in[0,T].$$

DEMOSTRACION: i) Sea $b>0$. Sean

$$(19) \qquad v(x,t)=-1+\exp\left[-\lambda(x-\lambda t)\right] \quad , \quad \lambda=\left[\frac{\log(1+\ell T)}{T}\right]^{1/2}.$$

Por el absurdo, sea el instante t_0 definido por:

$$0< t_0=\operatorname{Inf}\{t/\lambda t>s(t)\}<T \quad ,$$

con lo cual $\dot{s}(t_0)\leq\lambda$. La función v satisface las propiedades siguientes:

$$(20)\quad \begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = -1+\exp(-\lambda^2 t) < \ell t \leq f(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(\lambda t, t) = 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq t_o \ . \end{cases}$$

Por el Principio del Máximo fuerte se tiene que $v<z$ en el dominio $0<x<\lambda t$, $0<t\leq t_0$. Como $v(\lambda t_0, t_0) = z(s(t_0), t_0) = 0$, por el Lema de Hopf, se tiene que:

$$\dot{s}(t_0) = -z_x(s(t_0), t_0) > -v_x(\lambda t_0, t_0) = \lambda$$

que resulta ser una contradicción.

ii) Sea $b=0$. Para todo $\varepsilon \in (0,T)$, se tiene que $\ell(t-\varepsilon) < \ell t \leq f(t)$ en $[\varepsilon, T]$. Como $s(\varepsilon)>0$ y si se toma a ε como instante inicial, la parte i) nos dice que $\lambda(t-\varepsilon) \leq s(t)$ en $[\varepsilon, T]$. Por lo tanto, tomando el límite $\varepsilon \to 0$ se obtiene (18) .

<u>LEMA 10</u>: Bajo las hipótesis (H2) y $h\equiv 0$ si $b>0$, sea z una solución de (1i-v) para una función dada s no-decreciente y $\lambda t \leq s(t)$ en $[0,T]$. Entonces existe una constante $B>0$, independientemente de b, de manera que:

$$(21)\quad 0 \leq \frac{1}{\rho}\, z(s(t)-\rho, t) \leq B \quad , \quad 0<\rho<s(t), \quad 0\leq t\leq T \ .$$

<u>DEMOSTRACION</u>: Para $t_0 \varepsilon [0,T]$, sean

$$(22)\quad w(x) \equiv w(x,t_0) = B\left[s(t_0) - x\right] \quad , \quad B = \frac{L}{\lambda} \ .$$

La función w satisface las siguientes propiedades:

$$(23)\quad \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(s(t), t_0) = B\left[s(t_0) - s(t)\right] \geq 0 \quad , \quad t \varepsilon [0, t_0] \\ w(x, t_0) \geq 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq b = s(0) \\ w(0, t_0) = B\ s(t_0) \geq L t_0 \geq f(t) \quad , \quad t \varepsilon [0, t_0] \end{cases}$$

Por el Principio del Máximo se tiene que $z(x,t) \leq w(x,t_0)$ en el dominio $0\leq x\leq s(t)$, $0\leq t\leq t_0$, con lo cual

$$0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t_0)-\rho, t_0) \leq \frac{1}{\rho} W(s(t_0)-\rho, t_0) \leq B \quad , \quad \forall t_0 \in [0,T],$$

es decir (21).

A continuación, se demostrará la existencia de solución del problema (1) para el caso $b=0$, a través de lo realizado en la sección G (Método del argumento retardado).

TEOREMA 11; Bajo las hipótesis (H2), existe una única solución del problema de Stefan (1) con $b=0$. La frontera libre $s \in C^1(0,T]$ es una función monótona no-decreciente que satisface

$$(24) \quad \lambda t \leq s(t) \leq Bt \quad , \quad \dot{s}(t) \leq B \quad , \quad \forall t \in [0,T] .$$

DEMOSTRACION: Para cada $b \in (0,b_0)$, se consideran el dato inicial:

$$(25) \quad h_b(x)=0 \quad , \quad 0 \leq x \leq b \quad ,$$

y la solución $\{T,s_b,z_b\}$ del problema (1) para datos (b,h_b,f). Por el Teorema 6 y los Lemas 9 y 10, se tiene que $s_b \in C^1[0,T]$ con $0 \leq \dot{s}_b \leq B$, $\forall t \in [0,T]$.

Por lo tanto, la sucesión $(s_b)_{0<b<b_0}$ es equicontinua y uniformemente acotada pues $0 \leq s_b(t) \leq b_0+BT$, $\forall t \in [0,T]$. Utilizando el Teorema de Arzela-Ascoli y la metodología del Ejercicio 3 [3] se deduce la tesis.

EJERCICIO 6 [3] (Teorema de estabilidad) : Sea $\{T,s_i,z_i\}$ la solución del problema (1) con $b=0$ correspondiente al dato $f_i (i=1,2)$, que satisface la hipótesis (H2). Entonces existe una constante $C=C(\lambda,B,T)$ de manera que se satisfaga

$$(26) \quad |s_2(t)-s_1(t)| \leq C \quad \|f_2-f_1\|_t \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

donde

$$(27) \qquad \|f\|_{[a,b]} = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)| \quad , \qquad \|f'\|_t = \sup_{0\leq\tau\leq t} |f(\tau)| .$$

OBSERVACION 8: Como una consecuencia inmediata de la propiedad de estabilidad (26), se deduce la unicidad de solución del problema de Stefan (1), con $b=0$, bajo la hipótesis (H2)

La hipótesis (H2) para el dato f puede ser debilitada en el Teorema 11, a través del siguiente resultado:

TEOREMA 12 [4,5]: Si $f\geq 0$ es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados con $f\not\equiv 0$ en $[0,\varepsilon)$ para cada $\varepsilon>0$, entonces existe una única solución del problema de Stefan (1) con $b=0$.

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 7).

I) A continuación se verán algunas generalizaciones de ciertas propiedades vistas anteriormente.

EJERCICIO 8 [3,12]: i) La solución del problema inverso de Stefan (ver también Cursillo C4), para $s(t)=\mu t^{\alpha}(\mu>0,\alpha=1+\frac{\gamma}{2},\gamma>0)$ está dada por:

$$(28) \qquad V_{\mu}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[x-\mu t^{\alpha}\right]^{2n}$$

que satisface:

$$(29) \qquad \begin{cases} V_{\mu}(0,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2\alpha n+1)}{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(2\alpha n-n+1)} (\mu^2 t^{\beta})^n \\ \beta=2\alpha-1=1+\gamma . \end{cases}$$

ii) Teniendo en cuenta que:

$$(30) \qquad \alpha\leq \frac{2\alpha n-k}{2n-k} \leq \beta , \qquad \forall k=0,1,\ldots\ldots,n-1$$

$$(30)\qquad \frac{\Gamma(2\alpha n+1)}{\Gamma(2n+1)\ \Gamma(2\alpha n-n+1)} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\alpha n-k}{2n-k}\right)$$

entonces se tiene

$$(31)\qquad \exp\left[\alpha\mu^2 t^{\beta}\right]-1 \le V_{\mu}(0,t) \le \exp\left[\beta\mu^2 t^{\beta}\right]-1 \ .$$

Si se considera un dato $f=f(t)$ que verifique la hipótesis (H2 bis) que resulta ser (H2) reemplazando (H2ii) por (H2ii bis), donde:

$$\text{(H2ii bis)}\qquad \gamma,\ell,L>0/\ \ell t^{1+\gamma} \le f(t) \le L t^{1+\gamma}, \forall t\in[0,T].$$

entonces se tiene:

<u>EJERCICIO 9</u> [3]: Si f satisface (H2 bis), entonces:

i) Utilizando como función de comparación a $V_{\lambda}(x,t)$ y teniendo presente que

$$(32)\qquad \begin{cases} V_{\lambda}(0,t) \le \exp\left[\beta\lambda^2 t^{\beta}\right]-1 \le \ell t^{\beta} \le f(t) \\ \lambda = \left[\dfrac{\log(1+\ell T^{\beta})}{\beta T^{\beta}}\right]^{1/2} \end{cases}$$

se generaliza la desigualdad (18) del Lema 9 por

$$(33)\qquad \lambda t^{\alpha} \le s(t) \quad , \qquad 0 \le t \le T \ .$$

ii) utilizando como función de comparación a

$$(34)\qquad W(x) \equiv W(x,t_0) = \Lambda(t_0)^{\gamma/2}\left[s(t_0)-x\right] \quad , \quad 0 \le t_0 \le T$$

se generaliza la desigualdad (21) del Lema 10 por

$$(35)\qquad \begin{array}{l} 0 \le \dfrac{1}{\rho}\, z(s(t)-\rho,t) \le \Lambda\, t^{\gamma/2} \quad , \quad 0<\rho<s(t) \\ \Lambda = \dfrac{L}{\lambda} \ , \qquad 0 \le t \le T \ . \end{array}$$

iii) Los resultados de existencia, unicidad y estabilidad en el caso $b=0$ siguen siendo válidos reemplazando la norma $\|f\|_t$, definida en (27), por:

(36) $$\|f\|_{t,\gamma}=\underset{0\leq\tau\leq t}{\text{Máx}}\ \frac{|f(\tau)|}{\tau^{\gamma/2}}\ .$$

Además, existen dos constantes $\lambda,\Lambda>0$ de manera que se satisface:

(37) $$\lambda t^{\alpha}\leq s(t)\leq\Lambda t^{\alpha}\ ,\qquad 0\leq t\leq T\ .$$

J) <u>Método de la Ecuación integral equivalente</u> [10,11] :

Se reducirá (1) al problema de encontrar una única solución de una cierta ecuación integral no-lineal. Para ello se utilizará la siguiente representación integral, correspondiente a las condiciones (1i-v), dada por (ver fórmula (64) del Cursillo C1):

(38) $$\begin{aligned} z(x,t)&=M_1(x,t)+M_2(x,t)+M_3(x,t)\\ M_1(x,t)&=\int_0^t z_\xi(s(\tau),\tau)\ G(x,t;s(\tau),\tau)d\tau\\ M_2(x,t)&=\int_0^t f(\tau)\ G_\xi(x,t;0,\tau)\ d\tau\ ,\\ M_3(x,t)&=\int_0^b h(\zeta)\ \ G(x,t;\zeta,0)\ d\zeta, \end{aligned}$$

donde G y N son las funciones de Green y Neumann respectivamente.

<u>TEOREMA 13</u>: $\{T,s,z\}$ es solución del problema (1) con

(39) $$f\epsilon C^1[0,\infty)\ ,\quad h\epsilon C^1[0,b]\ ,\quad h(b)=0$$

si y sólo si la función $v\epsilon C^0[0,T]$, definida por:

(40) $$v(t)=z_x(s(t),t)\ ,$$

satisface la ecuación integral siguiente:

(41) $$v(t)=2\Big[h(0)-f(0)\Big]N(s(t),t;0,0)+$$

$$(41)\qquad \begin{aligned}&+2\int_0^b h'(\zeta)\ N(s(t),t;\zeta,0)d\zeta-2\int_0^t \dot{f}(\tau)N(s(t),t;0,\tau)d\tau+\\ &+2\int_0^t v(\tau)\ G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau\end{aligned}$$

donde s está definida por:

$$(42)\qquad s(t)=b-\int_0^t v(\tau)d\tau\ .$$

<u>DEMOSTRACION</u>: $\Rightarrow$) Por (38) y (40), la función z viene dada por:

$$(43)\qquad z(x,t)=\int_0^t v(\tau)\ G(x,t;s(\tau),\tau)d\tau\ \ +M_2(x,t)+M_3(x,t).$$

Teniendo en cuenta la fórmula del salto (ver fórmula (43) del Cursillo C1), si se deriva (43) respecto de x y se realiza el límite $x\to s(t)^-$, se obtienen las expresiones siguientes:

a) $$\lim_{x\to s(t)^-} M_{1_x}(x,t)=\frac{v(t)}{2}+\int_0^t v(\tau)\ G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau.$$

b) $$M_{2_x}(x,t)=\int_0^t f(\tau)\ G_{\xi x}(x,t\ ;0,\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)\ N_\tau(x,t;0,\tau)d\tau=$$

$$=-f(0)\ N(x,t;0,0)\ -\int_0^t \dot{f}(\tau)\ N(x,t;0,\tau)d\tau\ .$$

c) $$M_{3_x}(x,t)=\int_0^b h(\xi)\ G_x(x,t;\xi,0)d\xi=-\int_0^b h(\xi)\ N_\xi(x,t;\xi,0)d\xi=$$

$$=h(0)\ N(x,t;0,0)\ +\int_0^b h'(\xi)\ N(x,t;\xi,0)d\xi\ .$$

Regrupando los tres términos anteriores se deduce para v la ecuación integral (41).

$\Leftarrow$) La función z, definida por (43), donde v es la solución de la ecuación integral (41), satisface las condiciones siguientes (EJERCICIO 10): (1i-iv,vi) con las respectivas regularidades necesarias para que $\{T,s,z\}$ sea solución de (1) (ver Observación 5). Sólo basta entonces verificar que z satisface (1v), es decir $\psi\equiv 0$, donde ψ está definida por:

$$(44)\qquad \psi(t)=z(s(t),t)$$

Teniendo en cuenta que z satisface (1i-iv,vi), si se integra la identidad de Green

$$(45)\qquad (G\,z_\xi - zG_\xi)_\xi - (Gz)_\tau = 0$$

en el dominio $0<\xi<s(\tau)$, $0<\varepsilon<\tau<t-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ y se realiza el límite $\varepsilon \to 0$, se obtiene:

$$(46)\qquad z(x,t)=\int_0^t v(\tau)G(x,t;s(\tau),\tau)d\tau + M_2(x,t)+M_3(x,t)+$$
$$+M(x,t)$$

donde

$$(47)\qquad M(x,t)=\int_0^t \psi(\tau)\Big[G_x(x,t;s(\tau),\tau)-$$
$$-v(\tau)\; G(x,t;s(\tau),\tau)\Big]d\tau \quad .$$

Comparando (46) con (43) se deduce que $M(x,t)\equiv 0$, para $0<x<s(t)$, $0<t<T$. Haciendo en (47) el límite $x \to s(t)^-$ y utilizando la fórmula del salto se tiene que ψ satisface la ecuación integral:

$$(48)\quad \frac{1}{2}\Psi(t) + \int_0^t \Psi(\tau)\Big[G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)-$$

$$-v(\tau)\; G(s(t),t;s(\tau),\tau)\Big]d\tau=0.$$

Teniendo en cuenta el Ejercicio 11 (más abajo), de (48), se deduce que

$$|\Psi(t)| \leq C\int_0^t \frac{|\Psi(\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \leq C^2\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\tau \frac{|\Psi(\eta)|}{\sqrt{\tau-\eta}}d\eta$$

$$=C^2\int_0^t |\Psi(\eta)|\; d\eta\int_\eta^t \frac{d\tau}{\left[(t-\tau)(\tau-\eta)\right]^{1/2}} = \pi C^2\int_0^t |\Psi(\eta)|d\eta$$

donde $C=C(t)$ depende sólo de t, y por lo tanto, utilizando la desigualdad de Gronwall, se obtiene que $\Psi(t)=0$ en $[0,T]$.

<u>OBSERVACION 9</u>: Debido a los datos (39), en [10], se agregan a la definición de la solución $\{T,s,z\}$ las condiciones siguientes:

$$(49)\begin{cases} z_x \text{ continua en } 0\leq x\leq s(t)\;,\quad 0<t\leq T \\ s\in C^1[0,T] \end{cases}$$

las cuales son verificadas por la función z dada por (43) [10].

<u>EJERCICIO 11</u>: i) Probar la desigualdad siguiente:

$$(50)\quad \frac{\exp\left[-x^2/\alpha(t-\tau)\right]}{(t-\tau)^{n/2}} \leq \left(\frac{n\;\alpha}{2ex^2}\right)^{n/2}\;,\quad \alpha,x>0,\; t>\tau, n\in\mathbb{N}.$$

ii) Verificar que:

$$(51)\quad \int_{\eta}^{t} \frac{d\tau}{\left[(t-\tau)(\tau-\eta)\right]^{1/2}} = \pi, \quad \int_{0}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2\sqrt{t} \ .$$

<u>EJERCICIO 12</u>: (<u>Desigualdad de Gronwall</u>): Bajo las hipótesis

$$(52)\quad \begin{cases} m\in L^1(0,T) \quad \text{con} \quad m(t)\geq 0 \\ A\geq 0 \text{ (constante)} \ , \quad \Psi(t)\geq 0 \ , \quad p(t)\geq 0 \text{ no-decreciente,} \end{cases}$$

se tienen las siguientes desigualdades:

i) $\Psi(t)\leq A+\int_0^t m(\tau)\Psi(\tau)d\tau \Rightarrow \Psi(t)\leq A\ \exp\left(\int_0^t m(\tau)d\tau\right).$

ii) $\Psi^2(t)\leq A+\int_0^t m(\tau)\Psi(\tau)d\tau \Rightarrow \Psi(t)\leq \sqrt{A} + \frac{1}{2}\int_0^t m(\tau)d\tau \ .$

iii) $\Psi(t)\leq p(t)+A\int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\ d\tau \quad \Rightarrow$

a) $\int_0^t \frac{\Psi(s)}{\sqrt{t-s}}\ ds\leq 2\, p(t)\sqrt{t} \ + \ A\pi\int_0^t \Psi(\tau)d\tau \ ,$

b) $\Psi(t)\leq (1+2A\sqrt{t})\,p(t)\ \exp(\pi A^2 t) \ .$

<u>Ayuda</u>: En (i) y en (ii) respectivamente, las funciones $f_1(t)=A+\int_0^t m(\tau)\Psi(\tau)d\tau$ y $f_2(t)=\sqrt{f_1(t)}$ satisfacen una cierta inecuación diferencial. Para (iiia) y (iiib) se utilizan el Ejercicio 11ii y el (i) respectivamente.

A continuación, se verá que la ecuación integral (41) tiene una única solución $v \in C^0[0,\sigma]$, donde σ es un número positivo pequeño y luego por prolongación se extenderá al intervalo $[0,T]$. Sean:

$$(53) \quad \begin{cases} C_{\sigma,M} = \{v: [0,\sigma] \to \mathbb{R} \; / \; v \text{ es continua con } \|v\| \leq M\} \\ \|v\| = \underset{t\in[0,\sigma]}{\text{Máx}} |v(t)| \end{cases}$$

y el operador F_0, con dominio en $C_{\sigma,M}$, donde $F_0(v)(t)$ está definido como el segundo miembro de la ecuación integral (41) con s dada por (42). Se tiene el siguiente:

<u>TEOREMA 14</u>: El operador $F_0: C_{\sigma,M} \to C_{\sigma,M}$ es una contracción para σ suficientemente pequeño, con lo cual la ecuación integral (41) tiene una única solución en $C_{\sigma,M}$. Más aún, para que F_0 esté bien definido y sea una contracción, el elemento σ debe verificar las desigualdades (55),(60) y (55),(62),(66) respectivamente, donde M está dado por (59).

<u>DEMOSTRACION</u>: i) Se verá que el operador F_0 está bien definido, es decir que

$$(54) \quad \|F_0(v)\| = \underset{t\in[0,\sigma]}{\text{Máx}} |F_0(v)(t)| \leq M \; .$$

a) Tomando

$$(55) \quad \sigma \leq 1 \; , \quad 2M\sigma \leq b$$

se deducen en primer lugar las expresiones siguientes:

$$(56) \quad \begin{aligned} &|s(t)-s(\tau)| \leq \left| \int_\tau^t |v(\eta)| \, d\eta \right| \leq M|t-\tau| , \; \forall t,\tau \in [0,\sigma], \\ &|s(t)-b| \leq Mt \leq M\sigma \leq \frac{b}{2} , \quad \forall t \in [0,\sigma]. \end{aligned}$$

b) Si se tiene en cuenta (<u>EJERCICIO</u> 13):

$$\text{i)} \quad |N(s(t),t;0,0)| \leq C_1(b)\,\sigma, \quad \forall t \in [0,\sigma] .$$

$$\text{ii)} \quad \int_0^{+\infty} |G(x,t;\xi,0)|\,d\xi \leq \int_0^{+\infty} N(x,t;\xi,0)\,d\xi = 1 ,$$

$\forall x, t>0,$

(57)

$$\text{iii)} \quad \int_0^{t} |N(s(t),t;0,\tau)|\,d\tau \leq C_2(b)\sigma , \quad \forall t \in [0,\sigma].$$

$$\text{iv)} \quad \int_0^{t} |G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)|\,d\tau \leq MC_3(b)\sqrt{\sigma},$$

$\forall t \in [0,\sigma]$ con $M \geq 1$,

donde $C_i(b)$, $B_i(b)$ denotan ciertas constantes positivas que dependen en forma continua sólo de la constante b; se deduce que:

$$\begin{aligned} |F_o(v)(t)| &\leq 2(h(0)+f(0))\, C_1(b)\sigma + 2\,\|h'\| + \\ (58) \qquad &+ 2\,\|\dot{f}\|\, C_2(b)\sigma + 2\, M^2 C_3(b)\sqrt{\sigma} \equiv 2\,\|h'\| + \\ &+ B_1(b)\left[h(0)+f(0)+\|\dot{f}\|\right]\sigma + B_2(b)\, M^2\sqrt{\sigma} . \end{aligned}$$

c) Si se define:

(59) $\quad M = 1 + 2\,\|h'\|$

y el elemento σ verifica la desigualdad

(60) $\quad B_1(b)\left[h(0)+f(0)+\|\dot{f}\|\right]\sigma + B_2(b)(1+2\,\|h'\|)^2\sqrt{\sigma} \leq 1$

entonces se obtiene (54).

ii) Se verá que el operador F_o satisface la desigualdad

(61) $\quad \|F_o(v_2)-F_o(v_1)\| \leq A(b,h,f)\sqrt{\sigma}\,\varepsilon, \quad \varepsilon = \|v_2 - v_1\|$

con lo cual F_o resulta ser una contracción tomando σ suficientemente pequeño de manera que satisfaga además la condición:

$$(62) \qquad A(b,h,f)\sqrt{\sigma} < 1.$$

a) Si s_1 y s_2 corresponden a v_1 y v_2 respectivamente, dados por (42), entonces se tiene las siguientes desigualdades:

$$(63) \begin{cases} |s_2(t)-s_1(t)| \leq t\varepsilon \quad , \quad \|\dot{s}_2-\dot{s}_1\| \leq \varepsilon, \\ |s_i(t)-s_i(\tau)| \leq M|t-\tau| \ (i=1,2) \quad , \ \varepsilon \leq 2M \quad , \\ \frac{b}{2} \leq s_i(t) \leq \frac{3b}{2} \quad , \quad \forall t \varepsilon [0,\sigma] \qquad (i=1,2) \quad . \end{cases}$$

b) Se tiene que:

$$(64) \qquad F_o(v_2)(t) - F_o(v_1)(t) = V_1(t) + V_2(t) + \\ + V_3(t) + V_4(t)$$

donde

$$(65) \quad \begin{aligned} V_1(t) &= 2(h(0)-f(0))\Big[N(s_2(t),t;0,0)-N(s_1(t),t;0,0)\Big] \\ V_2(t) &= 2\int_0^b h'(\xi)\Big[N(s_2(t),t;\xi,0)-N(s_1(t),t;\xi,0)\Big]d\xi \\ V_3(t) &= -2\int_0^t \dot{f}(\tau)\Big[N(s_2(t),t;0,\tau)-N(s_1(t),t;0,\tau)\Big]d\tau \\ V_4(t) &= -\int_0^t v_2(t)\frac{s_2(t)-s_2(\tau)}{t-\tau}K(s_2(t),t;s_2(\tau),\tau)\,d\tau + \\ &+\int_0^t v_1(\tau)\frac{s_1(t)-s_1(\tau)}{t-\tau}K(s_1(t),t;s_1(\tau),\tau)d\tau + V_4'(t) \end{aligned}$$

siendo $-V_4'(t)$ la suma de los dos primeros sumandos del lado derecho de $V_4(t)$ pero reemplazando $s_2(\tau)$ y $s_1(\tau)$ por $-s_2(\tau)$ y $-s_1(\tau)$ respectivamente.

c) Se tienen las siguientes acotaciones (EJERCICIO 14) [10] :

i) $|V_1(t)| \leq B_3(b)(h(0)+f(0))\varepsilon\sigma$

ii) $|V_2(t)| \leq B_4(b)\ \|h'\|\ \varepsilon\sqrt{\sigma}$

iii) $|V_3(t)| \leq B_5(b)\ \|\dot{f}\|\ \varepsilon\sigma$

iv) $|V_4(t)| \leq B_6(b)\ \ M\varepsilon\sqrt{\sigma}$ siempre que σ verifique

la desigualdad

$$(66)\qquad M^2\sigma \leq 1 \ .$$

Por lo tanto, se obtiene la desigualdad (61) con lo cual el operador F_o verifica la Tesis.

OBSERVACION 10: En [10,11] se prueba además la existencia y unicidad de solución, de la ecuación integral (41), y, por ende, del problema (1), para todo instante T, prolongando la solución obtenida en el intervalo $[0,\sigma]$.

LEMA 15: Si v es la única solución de la ecuación integral (41) , entonces

$$(67)\qquad v(0)=h'(b)$$

con lo cual $\dot{s}$ resulta continua en $t=0^+$, con $\dot{s}(0)=$ $= -v(0)= -h'(b)$.

DEMOSTRACION: Los sumandos primero, tercero y cuarto de (41) tienden a cero cuando $t \to 0^+$. Teniendo presente que

$$(68)\qquad \left|\int_0^b K(-s(t),t;\xi,0)\ h'(\xi)d\xi\right| \leq$$

$$(68)\qquad \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^b \frac{\exp\left[\frac{-(s(t)+\xi)^2}{4\,t}\right]}{\sqrt{t}}\,|h'(\xi)|\,d\xi \leq$$

$$\leq \frac{\exp\left(-\frac{b^2}{4t}\right)}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^b |h'(\xi)|\,d\xi \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t\to 0^+ ,$$

y que además

$$(69)\qquad \frac{|s(t)-s(0)|}{2\sqrt{t}} = \frac{|s(t)-b|}{2\sqrt{t}} \leq \frac{M\sqrt{t}}{2} \longrightarrow 0 \ , \ \text{cuando} \quad t\to 0^+ ,$$

entonces se deduce:

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^b N(s(t),t;\xi,0)\,h'(\xi)d\xi =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\int_0^b K(s(t),t;\xi,0)\,h'(\xi)d\xi = \frac{h'(b)}{2} ,$$

con lo cual resulta (67).

K) Bajo las hipótesis de los teoremas anteriores se tiene la existencia de una única solución del problema (1) para cada $T>0$ y $b\geq 0$. Cuando $T\to+\infty$, la solución puede extenderse y por lo tanto es interesante el estudio del comportamiento de la frontera libre $s(t)$ cuando $t\to+\infty$. Se tienen los siguientes resultados [4] ;

<u>TEOREMA 16</u>: i) Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt=+\infty$, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)=+\infty$.

Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt<+\infty$, entonces:

$$(70)\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} s(t)=s_\infty \quad , \\ s_\infty=\left[b^2+2\displaystyle\int_0^b \xi h(\xi)d\xi+2\int_0^{+\infty} f(t)dt\right]^{1/2}. \end{cases}$$

ii) Sea (s,z) la solución de (1) con $\int_0^{+\infty} f(t)dt=+\infty$.

Para cada $t_o \geq 0$, sea (σ,v) la solución del siguiente problema:

$$(71)\quad \begin{aligned} & v_t-v_{xx}=0 \quad , \quad 0<x<\sigma(t) \quad , \quad t_o<t \\ & v(0,t)=f(t) \quad , \quad t_o<t \\ & v(\sigma(t),t)=0 \quad , \quad t_o<t \\ & \sigma(t_o)=0 \\ & \dot\sigma(t)= -v_x(\sigma(t),t) \quad , \quad t_o<t \quad , \end{aligned}$$

entonces

$$\text{a)}\quad (72)\begin{cases} 1 \leq \left(\dfrac{s(t)}{\sigma(t)}\right)^2 \leq 1 + \dfrac{C(t_o)}{\sigma^2(t)} \quad , \quad t>t_o \\ C(t_o)=s^2(t_o) + 2\displaystyle\int_0^{s(t_o)} xz(x,t_o)dx \quad , \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1. \qquad (73)$$

iii) Si f es tal que $\|f\|_{[t_o,+\infty)}$ es finito y verifica además las condiciones:

$$(74)\quad \int_0^{+\infty} f(t)dt=+\infty \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} \|f\|_{[t_o,+\infty)}=0 \quad ,$$

entonces se tiene que:

$$(75) \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{s(t)}{\left[2F(t)\right]^{1/2}} = 1 \ .$$

DEMOSTRACION: i) Sea $\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$. Utilizando la fórmula (2) y $z \geq 0$, se obtiene:

$$(76) \qquad \begin{aligned} s^2(t) &= b^2 + 2\int_0^b \xi h(\xi)d\xi + 2F(t) - 2\int_0^{s(t)} \xi z(\xi,t)dt \leq \\ &\leq b^2 + 2\int_0^b \xi h(\xi)d\xi + 2\,F(t) \leq s_\infty \ , \ \forall t \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Se considerará primero que f tiene soporte compacto, es decir que $f(t)=0$, $\forall t \geq T_0$, con $T_0 > 0$. Sea W la solución del siguiente problema:

$$(77) \qquad \begin{aligned} & W_t - W_{xx} = 0 \ , \quad 0 < x < \sqrt{s_\infty} \ , \quad t > 0 \\ & W(0,t) = f(t) \ , \quad t > 0 \\ & W(\sqrt{s_\infty},t) = 0 \ , \quad t > 0 \\ & W(x,0) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad b < x \leq \sqrt{s_\infty} \ , \end{cases} \end{aligned}$$

que converge uniformemente a 0 cuando $t \to +\infty$ (propiedad general de la solución de la ecuación del calor [11]). Por el Principio del Máximo se tiene que $0 \leq z \leq W$, con lo cual se deduce que $\lim_{t \to +\infty} \int_0^{s(t)} \xi z(\xi,t)\, d\xi = 0$. Pasando al límite $t \to +\infty$ en (2) se obtiene (70).

Sea ahora el caso general para f , no necesariamente a soporte compacto. Sean

$$(78)\qquad f_n(t)=\begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0\le t\le n \\ 0 & \text{si} \quad t>n \end{cases}$$

y los correspondientes s_{∞_n} y $s_n(t)$. Por el Teorema de Monotonía se tiene que $s_n(t)\le s(t)\le\sqrt{s_\infty}$, $\forall t\ge 0$. Por lo visto anteriormente, se obtiene que

$$(79)\quad \sqrt{s_{\infty_n}} = \lim_{t\to\infty} s_n(t) \le \underline{\lim}_{t\to\infty} s(t) \le \overline{\lim}_{t\to\infty} s(t) \le \sqrt{s_\infty}$$

y utilizando $\lim_{n\to\infty} s_{\infty_n}=s_\infty$, se deduce (70).

ii) Por el Teorema de Monotonía se tiene que $\sigma(t)\le s(t)$, $\forall t\ge t_o$, y por el Principio del Máximo se tiene que $0\le v\le z$ en $0\le x\le\sigma(t)$, $t_o\le t$. Utilizando (2) para $t_o>0$, como tiempo inicial, se obtiene

$$(80)\quad \begin{aligned} s^2(t)-C(t_o) &= 2\int_{t_o}^{t} f(\tau)d\tau - 2\int_0^{s(t)} \xi z(\xi,t)d\xi \le \\ &\le 2\int_{t_o}^{t} f(\tau)d\tau - 2\int_0^{\sigma(t)} \xi v(\xi,t)d\xi = \sigma^2(t) , \end{aligned}$$

y por ende $\sigma^2(t)\le s^2(t)\le\sigma^2(t)+C(t_o)$, $t>t_o$, de donde surge (72); además, por la parte i) y (72) se deduce (73).

iii) Siguiendo ii), por el Principio del Máximo se obtiene que $0\le v(x,t)\le \|f\|_{[t_o,t]}$, y por lo tanto

$$\sigma^2(t) = 2\int_{t_o}^{t} f(\tau)d\tau - 2\int_0^{\sigma(t)} \xi v(\xi,t)d\xi \ge 2\int_{t_o}^{t} f(\tau)d\tau -$$

$$- \|f\|_{[t_o,t]}\sigma^2(t) ,$$

de lo cual, y teniendo presente que $z \geq 0$, se deduce que:

$$(81)\quad \frac{2\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}{1+\|f\|_{[t_0,t]}} \leq \sigma^2(t) \leq s^2(t) \leq$$

$$\leq b^2 + 2\int_0^b \xi h(\xi)d\xi + 2F(t)\ , \quad t \geq t_0\ .$$

Utilizando (81), dividiendo por $2F(t)$, pasando al $\lim\limits_{t \to +\infty}$ y luego al $\lim\limits_{t_0 \to +\infty}$, se deduce el resultado (75).

Si se define que

$$(82)\quad f(t) \sim g(t) \text{ (cuando } t \to +\infty) \Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1,$$

entonces se obtiene el siguiente resultado:

<u>EJERCICIO 15</u>: i) Si $f(t) \sim \rho t^{-\delta}$ con $\rho>0$, $0<\delta<1$, entonces

$$s(t) \sim \left(\frac{2\rho}{1-\delta}\right)^{1/2} t^{(1-\delta)/2}\ .$$

ii) Si $f(t) \sim \rho/t$ con $\rho>0$, entonces $s(t) \sim (2\rho \log t)^{1/2}$.

<u>EJERCICIO 16</u> [4] : i) Si $f(t) \sim \rho$ con $\rho>0$, entonces $s(t) \sim \beta t^{1/2}$ donde β satisface la ecuación:

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \beta^{2n}\ .$$

ii) Si $\log f(t) \sim \rho t^{\gamma}$ con $\rho>0$, $\gamma>0$, entonces

$s(t) \sim \beta t^{\frac{1+\gamma}{2}}$ donde β está dada por:

$$\beta = \frac{2\sqrt{\rho}\ \gamma^{\gamma/2}}{(1+\gamma)^{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

L) A continuación veremos estimaciones para la frontera libre s, en función del dato f, en el problema (1) correspondiente al caso $h\equiv 0$.

TEOREMA 17: i) Sea $z=z(x,t)$ la solución del problema (1i-v) donde $b\geq 0$, $h\equiv 0$ en $[0,b]$ y s es una función Lipschitz y no-decreciente. Entonces, para $\rho\varepsilon(0,s(t)]$ se tiene:

$$(83)\qquad 0\leq \frac{1}{\rho}\, z(s(t)-\rho,t) \leq \frac{\|f\|_t}{s(t)}\ ,\qquad 0\leq t\leq T\ .$$

ii) Si $\{T,s,z\}$ es la solución de (1) con $h\equiv 0$ en $[0,b]$, entonces se tiene:

$$(84)\qquad 0\leq \dot{s}(t) \leq \frac{\|f\|_t}{s(t)}\ ,\qquad 0\leq t\leq T\ .$$

DEMOSTRACION: Sean $t_o\varepsilon[0,T]$ y $W(x)=\dfrac{\|f\|_{t_o}}{s(t_o)}\left[s(t_o)-x\right]$.
Entonces utilizando el Principio del Máximo se deduce $z(x,t)\leq W(x)$ en $0\leq x\leq s(t)$, $0\leq t\leq t_o$, y se obtiene (83) y (84) (EJERCICIO 17) [17].

De los resultados de este Teorema se obtienen las siguientes estimaciones:

COROLARIO 18: Si $\{T,s,z\}$ es la solución de (1) con $b=0$ (el dato h es irrelevante) y $f\geq 0$ ($f\not\equiv 0$) es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados, entonces se tienen:

$$(85)\qquad \left[\frac{2\,F(t)}{1+\|f\|_t}\right]^{1/2} \leq s(t) \leq \left[2\,F(t)\right]^{1/2}\ ,\qquad 0\leq t\leq T$$

$$(86)\qquad 0<\dot{s}(t) \leq \|f\|_t\left[\frac{1+\|f\|_t}{2\,F(t)}\right]^{1/2},\qquad 0\leq t\leq T\ .$$

DEMOSTRACION: Sea $0<b\leq 1$ y sean $\{T, s_b, z_b\}$ la solución de (1) con $h\equiv 0$ en $[0,b]$. Por (84), se tiene:

$$(87)\qquad 0<\dot{s}_b(t)\leq \frac{\|f\|_t}{s_b(t)}\leq \frac{M}{s_b(t)}\ ,\qquad M=\sup_{0\leq t\leq T} f(t)\ ,$$

de lo cual se deduce que

$$(88)\qquad 0\leq \frac{d}{dt}(s_b^2(t))\leq 2M\ ,\qquad 0\leq t\leq T\ .$$

De la relación (2) y $z_b\geq 0$ se deduce:

$$b^2+2F(t)-\|f\|_t\, s_b^2(t)\leq b^2+2F(t)-2\int_0^{s_b(t)} \xi \dot{z}_b(\xi,t)d\xi=$$

$$=s_b(t)\leq b^2+2F(t)$$

es decir:

$$(89)\qquad \frac{b^2+2F(t)}{1+\|f\|_t}\leq s_b^2(t)\leq b^2+2F(t)\leq 1+2F(T)$$

con lo cual la familia $\{s_b^2\}$ es equicontinua y uniformemente acotada en $[0,T]$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli $\exists$ una sucesión $b_n\to 0$ de manera que $s_{b_n}^2(t)$ converge uniformemente en $[0,T]$ a una función Lipschitz continua $s^2(t)$. Pasando al límite $b\to 0$ en (87) y (89) se obienen las estimaciones (85) y (86) [17].

II. EL PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A UNA FASE CON ESPECIFICACION DEL FLUJO DE CALOR EN EL BORDE FIJO.

Se estudiará el problema de Stefan unidimensional a una fase siguiente: Dado $g=g(t)\geq 0$, $h=h(x)\geq 0$ y $b\geq 0$, se quiere hallar $T>0$ y dos funciones $s=s(t)$ y $z=z(x,t)$ de manera que el triple $\{T,s,z\}$ satisfaga las siguientes condiciones:

$$
(90)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)} && z_{xx}-z_t=0 , && \text{en } D_T\\
&\text{ii)} && z_x(0,t)=-g(t) , && 0<t<T\\
&\text{iii)} && z(x,0)=h(x) , && 0\leq x\leq b\\
&\text{iv)} && s(0)=b && \\
&\text{v)} && z(s(t),t)=0 , && 0<t<T\\
&\text{vi)} && z_x(s(t),t)=-\dot{s}(t), && 0<t<T .
\end{aligned}
$$

<u>OBSERVACION 11</u>: En el caso $b=0$, la condición (90iii) sobre h es superflua y por lo tanto puede eliminarse de la formulación del problema. En general, se supone que g y h son funciones continuas excepto en un número finito de saltos acotados.

A) Diremos que $\{T,s,z\}$ es una <u>solución</u> del problema (90) si y sólo si:

i) $T>0$;

ii) $s\in C^1(0,T]\cap C^0[0,T]$, $s(t)>0$ en $(0,T]$;

iii) z es continua (excepto en un número finito de puntos de discontinuidad de h) y acotada en $\overline{D}_T$, z_x, z_{xx}, $z_t\in C^0(D_T)$, $z_x(s(t),t)$ es continua en $(0,T]$;

iv) Se satisfacen las condiciones (90i-vi).

En forma análoga a los Lemas 1 y 2 y los Teoremas 3 y 4 se obtienen los resultados siguientes:

<u>EJERCICIO 18</u>: Si $\{T,s,z\}$ es una solución de (90) , entonces la condición de Stefan (90vi) es equivalente a la siguiente condición integral

$$(91)\begin{cases} s(t)=b+\displaystyle\int_0^b h(\xi)d\xi + G(t)-\int_0^{s(t)} z(x,t)dx \quad , \\ G(t)=\displaystyle\int_0^t g(\tau)d\tau \ . \end{cases}$$

EJERCICIO 19: Cualquier solución z del problema (90) es no-negativa; más aún, se tiene $\dot{s}(t)= -z_x(s(t),t)\geq 0$. En el caso que $h>0$ ó $g>0$ en cualquier entorno de $t=0$, la frontera libre s es una función creciente ($\dot{s}>0$).

EJERCICIO 20: Sea $\{T_i,s_i,z_i\}$ solución del problema (90) correspondiente a los datos (b_i,h_i,g_i) $(i=1,2)$ y sea $T=Mín(T_1,T_2)$. Si bien $h_2\neq 0$ ó $g_2\neq 0$, entonces se tienen los siguientes resultados:

i) Si $b_1<b_2, h_1\leq h_2$ y $g_1\leq g_2$ entonces $s_1<s_2$ en $[0,T]$ y $z_1<z_2$ en D_{T,s_1};

ii) Si $b_1\leq b_2$, $h_1\leq h_2$, $g_1\leq g_2$ y $T_1=T_2$ entonces $s_1\leq s_2$ en $[0,T]$ y $z_1\leq z_2$ en D_{T,s_1};

iii) Existe a lo sumo una solución en el problema de Stefan (90) para $b\geq 0$.

B) Sea la siguiente hipótesis [6]:

$$(H)\begin{cases} \text{i)} & b>0 \ ; \\ \text{ii)} & h,g\geq 0 \text{ son funciones continuas excepto} \\ & \text{en un número finito de saltos acotados;} \\ \text{iii)} & \exists N>0/ \ 0\leq h(x)\leq N(b-x) \quad , \ \forall x\in[0,b], \end{cases}$$

que para el caso $b=0$ se reduce sólo a la condición (Hii).

<u>LEMA 19</u>: Si z es una solución del problema (90i-v) bajo la hipótesis (H) para una función monótona no-decreciente s dada, entonces:

i) Existe una contante $A=\text{Máx}(N, \text{Máx}_{t\varepsilon[0,T]} g(t))>0$ de manera que

$$(92) \qquad 0 \leq \frac{1}{\rho} z(s(t)-\rho, t) \leq A \quad , \quad \forall t\varepsilon[0,T] \quad , \forall \rho\varepsilon(0,b).$$

ii) Además, si $z_x(s(t),t)$ existe, se tiene que

$$(93) \qquad -A \leq z_x(s(t),t) \leq 0.$$

<u>DEMOSTRACION</u>: Se define la función $W(x) \equiv W(x,t_o)=A\left[s(t_o)-x\right]$ y aplicando el Principio del Máximo se deduce que $0 \leq z(x,t) \leq W(x,t_o)$, $0 \leq x \leq s(t)$, $0 \leq t \leq t_o$, el resto queda como <u>EJERCICIO 21</u>.

C) <u>Método del Argumento Retardado</u> [1,6] :

Siguiendo lo dado en I-G , para el caso $b>0$ y para cada $\theta\varepsilon(0,b)$ se considera la solución z_θ del problema (90i-v) donde $h(x)$, $s(t)$ y T son reemplazados respecitvamente por $h_0(x)$, $s_0(t) \equiv b$ y θ. En este caso se tiene que $z_{\theta x}(s_\theta(t),t) \equiv z_{\theta x}(b,t)$ existe y es continua en $[0,\theta]$, y además, verifica la condición $-A \leq z_{\theta x}(s_\theta(t),t) \leq 0$. En el segundo intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2\theta$ se define:

$$(94) \qquad s_\theta(t) = b - \int_0^t z_{\theta x}(s_\theta(\tau-\theta), \tau-\theta)\,d\tau$$

y se resuelve el problema (90i-v) para esta elección de $s_\theta(t)$. Estas son las primeras etapas de un proceso inductivo que se puede realizar para cada $\theta\varepsilon(0,b)$. Entonces se tienen los siguientes resultados:

TEOREMA 20: Sea $b>0$. Entonces:

i) Para cada $\theta\varepsilon(0,b)$, existe una solución (s_θ,z_θ) de (90) donde h es reemplazada por h_θ. La función $s_\theta \varepsilon C^1[0,T]$, es igual a b en $[0,0]$ y satisface (94) para $t\varepsilon[0,T]$. Más aún, se tiene

$$(95) \quad 0\leq \dot{s}_\theta(t) \leq A \quad , \quad t\varepsilon[0,T] ,$$

donde A está definido en el Lema 19.

ii) Bajo las hipótesis (H) y $b>0$ existe una única solución $\{T,s,z\}$ para el problema de Stefan (90). Además, la frontera libre $s\varepsilon C^1(0,T]$, es monótona no-decreciente y satisface

$$(96) \quad 0\leq \dot{s}(t)\leq A \quad , \quad t\varepsilon[0,T].$$

Más aún, s_θ y z_θ convergen uniformemente a s y z respectivamente cuando $\theta \longrightarrow 0$.

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 22) [1,6].

TEOREMA 21: Bajo la hipótesis (Hii) existe una única solución $\{T,s,z\}$ del problema de Stefan (90) cuando $b=0$. La frontera libre $s\varepsilon C^1(0,T]$ es monótona no-decreciente y satisface (96).

DEMOSTRACION: Para cada $b\varepsilon(0,b_0)$ sea $\{T,s_b,z_b\}$ la única solución del problema de Stefan (90) con $h\equiv 0$; además, se tiene que $0\leq \dot{s}_b(t)\leq A$ para $t\varepsilon[0,T]$ y $b\varepsilon(0,b_0)$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli se obtiene una subsucesión s_{bi} que converge uniformemente a s en $[0,T]$. Sea $z=z(x,t)$ la única solución del problema auxiliar (90i-v) para tal elección de s. Con el mismo argumento usado en el Teorema 20 [1,6], se puede mostrar que $z_{bi}(x,t)$ converge uniformemente a $z(x,t)$. Además, para cada $b\varepsilon(0,b_0)$ se tiene

$$(97)\quad s_b(t) = b + G(t) - \int_0^{s_b(t)} z(x,t)\, dx\ ,$$

y de la convergencia uniforme de $\{s_{b_i}(t)\}$ y $\{z_{b_i}(x,t)\}$ se obtiene que (s,z) satisfacen

$$(98)\quad s(t) = G(t) - \int_0^{s(t)} z(x,t)\, dx$$

es decir (91) con $b=0$. Como $s(t)$ es una función Lipschitz se tiene que $z_x(s(t),t)$ existe y es continua para $t>0$, con lo cual $\{T,s,z\}$ es la solución de (90) con $b=0$.

<u>EJERCICIO 23</u> [3,5] : Si $b\geq 0$, g es una función continua no-negativa excepto en un número finito de saltos acotados y, cuando sea necesario, h es una función no-negativa excepto en un número finito de saltos acotados, entonces existe una única solución $\{T,s,z\}$ al problema de Stefan (90) , cualquiera sea el instante $T>0$.

D) Bajo las hipótesis de los teoremas anteriores se tiene la existencia de una única solución del problema (90) para cada $T>0$ y $b\geq 0$. Cuando $T\to+\infty$, la solución puede extenderse y por lo tanto es interesante el estudio del comportamiento de la frontera libre $s(t)$ cuando $t\to+\infty$. Se tienen los siguientes resultados [6] :

<u>TEOREMA 22</u>: i) Si $\int_0^{+\infty} g(t)dt=+\infty$, entonces $\lim_{t\to+\infty} s(t)=+\infty$.

Si $\int_0^{+\infty} g(t)dt=g_\infty<+\infty$, entonces:

$$(99)\quad \lim_{t\to+\infty} s(t)= s_\infty \exists\ b + \int_0^b h(x)dx + g_\infty .$$

ii) Sea (s,z) la solución de (90) con $\int_0^{+\infty} g(t)dt=+\infty$.

Para cada $t_o\geq 0$, sea (σ,v) la solución del siguiente problema:

$$(100)\quad \begin{aligned} & v_t-v_{xx}=0 \quad , \quad 0<x<\sigma(t) \quad , \quad t_o<t \\ & v_x(0,t)=-g(t) \quad , \quad t_o<t \\ & v(\sigma(t),t)=0 \quad , \quad t_o<t \\ & \sigma(t_o)=0 \\ & \dot{\sigma}(t)= -v_x(\sigma(t),t) \quad , \quad t_o<t. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\text{a)}\quad (101)\begin{cases} 1 \leq \dfrac{s(t)}{\sigma(t)} \leq 1 + \dfrac{D(t_o)}{\sigma(t)} \quad , \quad t>t_o \\ D(t_o)=s(t_o) + \displaystyle\int_0^{s(t_o)} z(x,t_o)dx \ . \end{cases}$$

$$\text{B)}\quad \lim_{t\to+\infty} \frac{s(t)}{\sigma(t)} = 1 \ . \qquad (102)$$

iii) Si el dato g verifica las condiciones:

$$(103)\quad \int_0^{+} g(t)dt=+\infty \quad , \quad \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau = 0$$

entonces se tiene:

$$(104)\quad \lim_{t\to+\infty} \frac{s(t)}{G(t)} = 1 \ .$$

<u>DEMOSTRACION</u>: i) Sea $\int_0^{+} g(t)dt=g_\infty<+\infty$. Utilizando la fórmula (91) y $z\geq 0$, se obtiene:

$$(105) \quad s(t)=b+\int_0^b h(x)\,dx + G(t) - \int_0^{s(t)} z(x,t)\,dx \leq$$

$$\leq g_\infty , \quad \forall t \geq 0 .$$

Se considerará primero que g tiene soporte compacto, es decir, que $g(t)=0$, $\forall t \geq T_o$, con $T_o>0$. Por lo tanto, de (91), se tiene:

$$(106) \quad s(t)=g_\infty - \int_0^{s(t)} z(x,t)dx \quad , \quad \forall t \geq T_o .$$

Por el Principio del Máximo, se deduce que $z(x,t) \leq y_1(x,t)+ +y_2(x,t)$, donde y_1 y y_2 son, respectivamente, las soluciones de los siguientes problemas:

$$(107) \begin{cases} y_{1_{xx}} = y_{1_t} \quad , & x>0 \quad , \quad t>0 \\ y_{1_x}(0,t)=0 \quad , & t>0 \\ y_1(x,0) = \begin{cases} h(x) & , \quad 0 \leq x \leq b \\ 0 & , \quad x>b \end{cases} & , \end{cases}$$

$$(108) \begin{cases} y_{2_{xx}} = y_{2_t} \quad , & x>0 \quad , \quad t>0 \\ y_{2_x}(0,t) = -g(t) \quad , & t>0 \\ y_2(x,0)=0 \quad , & x \geq 0 . \end{cases}$$

Para $t \geq T_o$, se tiene:

$$(109) \quad y_1(x,t) = \int_0^b \frac{h(\xi)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi \leq \frac{\|h\|_\infty \; b}{2\sqrt{\pi t}} ,$$

$$(110)\quad y_2(x,t)=\int_0^{T_o}\frac{g(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau\leq$$
$$\leq 2\frac{\|g\|_\infty}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{t}-\sqrt{t-T_o}\right]\leq\frac{\|g\|_\infty\ T_o}{\sqrt{\pi(t-T_o)}}\ ,$$

y por ende se deduce que $\lim\limits_{t\to+\infty} z(x,t)=0$, uniformemente en x , con lo cual se obtiene (99) de (106).

Sea ahora el caso general para g, no necesariamente a soporte compacto. Sean

$$(111)\quad g_n(t)=\begin{cases} g(t) & \text{si}\quad 0<t\leq n \\ 0 & \text{si}\quad n<t \end{cases}\ ,$$

y los correspondientes $s_{\infty n}$ y $s_n(t)$. Se tiene que $s_n(t)\leq\leq s(t)\leq s_\infty$, $\forall t\geq 0$, y como

$$(112)\quad s_{\infty n}=\lim_{t\to\infty}s_n(t)\leq\lim_{\overline{t\to+\infty}}s(t)\leq\overline{\lim_{t\to+\infty}}s(t)\leq s_\infty$$

y utilizando $\lim\limits_{n\to\infty} s_{\infty n}=s_\infty$, se deduce (99).

ii) Por el Teorema de Monotonía se tiene que $\sigma(t)\leq s(t)$, $\forall t\geq t_o$, y por el Principio del Máximo se tiene que $0\leq v\leq z$ en $0\leq x\leq\sigma(t)$, $t_o\leq t$. Utilizando (91) para $t_o>0$, como tiempo inicial, se obtiene:

$$(113)\quad \sigma(t)\leq s(t)=D(t_o)+\int_{t_o}^{t}g(\tau)\,d\tau-\int_0^{s(t)}z(x,t)\,dx\leq$$
$$\leq D(t_o)+\int_{t_o}^{t}g(\tau)\,d\tau-\int_0^{\sigma(t)}v(x,t)dx=D(t_o)+$$
$$+\sigma(t)\ ,$$

de donde surge (101); además, por la parte i) y (101) se deduce (102).

iii) Consideremos σ, v y y_2 como en (100) con $t_o=0$ y (108) respectivamente. Por el Principio del Máximo se tiene $0 \leq v(x,t) \leq y_2(x,t)$, con lo cual se tiene

$$(114) \quad G(t)-\int_0^{\sigma(t)} y_2(x,t)\,dx \leq \sigma(t)=G(t)-\int_0^{\sigma(t)} v(x,t) \leq G(t)$$

y teniendo presente que

$$(115) \quad y_2(x,t)=\int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-x^2/4(t-\tau)\right] d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, d\tau$$

se obtiene:

$$\sigma(t) \leq G(t) \leq \sigma(t) + \int_0^{\sigma(t)} y_2(x,t)\,dx \leq$$

$$\leq \sigma(t)\left[1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\right],$$

que, conjuntamente con (102), permite deducir (104).

<u>EJERCICIO 24</u>: Verificar que

$$(117) \quad g(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$

satisface las os condiciones (103).

E) A continuación se darán estimaciones para la frontera libre correspondiente al problema (90) con $b=0$.

LEMA 23: Si $\{T,s,z\}$ es la solución de (90) con $b=0$ (el dato h es superfluo) y $g\geq 0 (g\not\equiv 0)$ es una función continua excepto en un número finito de saltos acotados, entonces se tienen:

$$(118) \qquad \frac{G(t)}{1+2\,\|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2}} \leq s(t) \leq G(t) \quad ,$$

$$(119) \qquad 0 < \dot{s}(t) \leq \|g\|_t \quad .$$

DEMOSTRACION: Sea $b\in(0,1]$ y sean $\{T,s_b,z_b\}$ la solución de (90) con $h\equiv 0$ en $[0,b]$. Por (93), se tiene

$$(120) \qquad 0 \leq \dot{s}_b(t) \leq \|g\|_t \leq M \quad , \quad M = \sup_{0\leq t\leq T} g(t).$$

Sea $v=v(x,t)$ la solución del siguiente problema:

$$(121) \begin{cases} v_{xx}=v_t & , \quad 0<x \quad , \quad 0<t<T \\ v(x,0)=0 & , \quad 0\leq x \\ v_x(0,t)= -\|g\|_t & , \quad 0<t<T \,. \end{cases}$$

Por el Principio del Máximo se tiene:

$$(122) \qquad 0\leq z_b(x,t) \leq v(x,t)=\int_0^t \|g\|_\tau \frac{\exp\left[-x^2/4(t-\tau)\right]}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,d\tau \leq$$

$$\leq 2\,\|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2}.$$

Por (122) y la relación (91) se deducen las siguientes estimaciones:

$$b+G(t) - 2\,\|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2} s_b(t) \leq b + G(t) -$$

(123)
$$-\int_0^{s_b(t)} z_b(x,t)dx = s_b(t) \leq b + G(t) \quad ,$$

es decir:

(124)
$$\frac{b + G(t)}{1+2\,\|g\|_t \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2}} \leq s_b(t) \leq B + G(t) \leq 1 + G(T),$$

con lo cual la familia $\{s_b\}$ es equicontinua y uniformemente acotada en $[0,T]$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli se puede pasar al límite $b \longrightarrow 0$ obteniéndose de esta modo las desigualdades (118) y (119) [17].

F) Se obtiene la siguiente <u>propiedad de dependencia continua</u> de la frontera libre respecto de los datos dada por el:

<u>EJERCICIO 25</u> [2,6] : Si $\{T, s_i, z_i\}$ es la solución del problema (90) correspondiente a los datos (b_i, h_i, g_i) $(i=1,2)$, que satisfacen las hipótesis (H)con $N=\text{Máx}(N_1,N_2)$, $M=\text{Máx}(\sup_{t\in[0,T]} g_1(t)\ ,\ \sup_{t\in[0,T]} g_2(t))$. Si $0\leq b_1 \leq b_2$ entonces existe una constante $C=C(N,M,T)$ de manera que se satisfaga:

(125)
$$|s_2(t)-s_1(t)| \leq C\left[b_2-b_1 + \int_0^{b_1} |h_2(x)-h_1(x)|dx + \int_{b_1}^{b_2} h_2(x)dx + \int_0^t |g_2(\tau)-g_1(\tau)|\,d\tau\right], \quad 0\leq t\leq T \ .$$

Como una consecuencia inmediata de la propiedad de estabilidad (125), se deduce el:

COROLARIO 24: Bajo las hipótesis del Ejercicio 25, la solución del problema de Stefan (90), con $b \geq 0$, es única.

G) Método de la ecuación integral equivalente [16] :

Se reducirá (90) al problema de encontrar una única solución de una cierta ecuación integral no-lineal. Para ello se utilizará la siguiente representación integral, correspondiente a las condiciones (90i-v) , dada por (ver fórmula (65) del Cursillo C1):

$$
\begin{aligned}
(126)\qquad z(x,t)=&\int_0^b h(\xi)\, N(x,t;\xi,0)d\xi+\int_0^t g(\tau)\, N(x,t;0,\tau)d\tau+\\
&+\int_0^t z_\xi(s(\tau),\tau)\, N(x,t;s(\tau),\tau)\, d\tau\,.
\end{aligned}
$$

TEOREMA 25: i) $\{T,s,z\}$ es solución del problema (90) con

$$(127)\qquad h\varepsilon\, C^1[0,b] \quad , \quad g\varepsilon\, C^0[0,T]$$

si y sólo si la función $v\varepsilon\, C^0[0,T]$, definida por

$$v(t)=z_x(s(t),t)$$

satisface la ecuación integral siguiente:

$$(128)\qquad v(t)=2\int_0^b h'(\xi)\, G(s(t),t;\xi,0)d\xi \quad +$$

$$(128) \qquad + 2\int_0^t g(\tau)\, N_x(s(t),t;0,\tau)d\tau \; +$$

$$+ 2\int_0^t v(\tau)\, N_x(s(t),t;s(\tau),\tau)\, d\tau \quad (\equiv F_1(v)(t))$$

donde s está definida por

$$(129) \qquad s(t)=b - \int_0^t v(\tau)\, d\tau \; .$$

ii) El operador $F_1: C_{\sigma,M} \longrightarrow C_{\sigma,M}$ (definido en (128)) es una contracción para σ suficientemente pequeño, con lo cual la ecuación integral (126) tiene una única solución en $C_{\sigma,M}$. Más aún, para que F_1 esté bien definido y sea una contracción, los parámetros σ y M deben verificar ciertas desigualdades.

DEMOSTRACION: La parte (i) es análoga a la del Teorema 13 y la parte (ii) a la del Teorema 14 (EJERCICIO 26)

OBSERVACION 12: En [16] se estudia el Teorema 25 con una condición (90vi) más general sobre la frontera libre, dada por:

$$(90\text{vi bis}) \qquad \dot{s}(t) + z_x(s(t),t) = q(t) \quad , \quad 0<t<T \quad ,$$

como así también la prolongación de la solución para todo instante y otras generalizaciones, en posteriores trabajos.

EJERCICIO 27: Si v es la única solución de la ecuación integral (128) , entonces $v(0)=h'(b)$ con lo cual $\dot{s}$ resulta continua en $t=0^+$, con $\dot{s}(0)= -v(0)= -h'(b)$.

H) Si en el problema (90) se considera el caso $b=0$ y si se supone que la temperatura puede ser expresada en una serie de potencia alrededor de $x=0$, $t=0$, entonces se obtiene el siguiente resultado:

EJERCICIO 28 [8] : Si el flu o de calor $g=g(t)$ es una función analítica del tiempo t, entonces se pueden obtener todas las derivadas de $s(t)$ en $t=0$, la cual puede ser escrita como la siguiente serie de Taylor:

$$s(t)=c_0+c_1\,t-\frac{c_2}{2!}\,t^2+\frac{c_3}{3!}\,t^3-\frac{c_4}{4!}\,t^4+\ldots$$

$$(130)\quad \begin{aligned} &c_0=0 \quad , \quad c_2=g^3(0)-\dot{g}(0)\\ &c_1=g(0) \quad , \quad c_3=5g^5(0)-6\dot{g}(0)\,g^2(0)+\ddot{g}(0)\\ &c_4=51\,g^7(0)-75\,g^4(0)\,\dot{g}(0)+10g^2(0)\,\ddot{g}(0)+\\ &+15\,g(0)\left[\dot{g}(0)\right]^2-\dddot{g}(0)\ . \end{aligned}$$

I) En [7], se estudia el caso particular de (90) correspondiente a los datos:

$$(131)\quad g(t)\equiv 1 \quad , \quad b=0 \quad (h \text{ es superfluo})$$

con lo cual la condición de Stefan resulta equivalente a la siguiente ecuación integral:

$$(132)\quad s(t)=t-\int_0^{s(t)} z(x,t)\,dx\ .$$

De la ecuación integral (132) se puede notar una cierta relación entre los problemas de frontera libre con los problemas de frontera móvil, mediante el siguiente <u>proceso iterativo</u>:

i) Se fija la posición de $s_n=s_n(t)$ $(n\geq 0)$ que satisface la condición $s_n(0)=0$.

ii) Se calcula $z_n=z_n(x,t)$ como solución del problema de frontera móvil siguiente (se toma $s=s_n$):

$$(133)\quad \begin{cases} z_{xx}=z_t \ , & 0<x<s(t) \ , \quad 0<t<T \ , \\ z_x(0,t)=-1 \ , & 0<t<T \ , \\ z(s(t),t)=0 \ , & 0<t<T \ . \end{cases}$$

iii) Se obtiene la nueva posición de la frontera libre mediante la expresión:

$$(134)\qquad s_{n+1}(t) = t - \int_0^{s_n(t)} z_n(x,t)\,dx \ .$$

Con este proceso iterativo se prueba en [7] que:

a) $z(x,t)=\lim_{n\to\infty} z_n(x,t)$ es la solución del problema de frontera móvil (133) con $s(t)=\lim_{n\to\infty} s_n(t)$, tomando inicialmente $s_o(t)=t$.

b) $z(x,t)$ y $s(t)$ satisfacen la ecuación integral (132). De este modo $\{T,s,z\}$ resultan ser solución del problema de Stefan (90) con datos (131). Los resultados obtenidos están dados por:

<u>TEOREMA 26</u>: Si se toma como hipótesis inicial que $s_o(t)=t$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

i) $z_n\geq 0$

ii) $\dot{s}_{n+1}(t)= - z_{n_x}(s_n(t),t)\geq 0$, $s_n(0)=0$

iii) $0\leq z_n(x,t)\leq s_n(t) - x$

iv) La sucesión (s_n) verifica

a) $s_1(t) \leq s_n(t) \leq s_o(t)$, $\forall n$

b) (s_{2n-1}) es monótona no-decreciente y (s_{2n})

es monótona no-decreciente satisfaciendo:

$$s_{2n-1}(t) \leq s_{2n+1}(t) \leq s_{2n}(t) \leq s_{2n-2}(t).$$

Por lo tanto cada curva $s_i(t)$ $(i\geq 2)$ se encuentra en la región comprendida por las dos curvas precedentes $s_{i-1}(t)$ y $s_{i-2}(t)$.

v) $|z_n(x,t)-z_{n-1}(x,t)| \leq |s_n(t) - s_{n-1}(t)|$

vi) $|s_{n+1}(t) - s_n(t)| \leq 2t \; |s_n(t) - s_{n-1}(t)|$

vii) Eligiendo $t\leq T=1/4$, se tiene

$|s_{n+1}(t)-s_n(t)| \leq \frac{1}{2} |s_n(t)-s_{n-1}(t)| \leq$

$\leq \frac{1}{2^n} |s_1(t) - s_o(t)|$ con lo cual se establece la existencia de $s(t)=\lim_{n\to\infty} s_n(t)$ uniformemente para $t\leq 1/4$. Más aún, usando (v), se tiene que $z^*(x,t)=\lim_{n\to\infty} z_n(x,t)$ uniformemente para $t\leq 1/4$.

viii) Sea $z(x,t)$ la solución del problema de frontera móvil (133) para $s(t)$ y sea $s^*(t)$ definida por:

$$s^*(t) = t - \int_0^{s(t)} z(x,t)\, dx \,. \tag{135}$$

Entonces se tiene que $s^*(t)=s(t)$ y por ende $z(x,t)=z^*(x,t)$.

ix) La derivada de la función $s(t)$ existe y satisface la condición de Stefan, con lo cual $\{T,s,z\}$ es una solución del problema (90) con datos

(131).

x) La unicidad de solución surge por el absurdo.

DEMOSTRACION: (EJERCICIO 29) (Se utiliza principalmente el Principio del Máximo) [7] .

OBSERVACION 13: Se puede demostrar que el proceso iterativo es convergente para $t \leq T=1$ y que la misma metodología se puede generalizar a situaciones más generales y a geometrías de tipo cilíndrica y esférica [15].

Más aún, un Teorema general de existencia de solución está dado en [9] , donde no se hace ninguna hiótesis sobre los signos de los datos y sobre la monotonía de la frontera libre. El método consiste en definir una transformación sobre la frontera libre y verificar que se tiene un punto fijo.

OBSERVACION FINAL: Numerosas propiedades de la solución del problema de Stefan a una fase (1) ó (90) no han sido tratadas aquí (por ejemplo, propiedades de regularidad (infinita derivabilidad, analiticidad) de la frontera libre, etc.). Tampoco se ha estudiado el problema de Stefan unidimensional a dos fases que es de esperar se trate en próximos Seminarios con el objetivo de difundir y analizar los conocimientos básicos relativos a problemas de frontera libre para la ecuación del calor (difusión) y sus posibles aplicaciones concretas. Por otra parte merece destacarse el interesante trabajo de revisión efectuado en [13] que puede ser muy útil a quien desea iniciarse en este tipo de problemas. Además, en [18] , se indica una extensa bibliografía sobre el tema con una minuciosa clasificación sobre los diferentes métodos teóri cos y numéricos utilizados. Para finalizar merece destacarse [14] , libro íntegramente dedicado al problema de Stefan, en el cual se indican numerosas metodologías, aplicaciones y referencias.

REFERENCIAS

[1] J.R.CANNON, "Some Heat Conduction Problems", to appear.

[2] J.R.CANNON-J.DOUGLAS,Jr., "The Stability of the Boundary in a Stefan Problem", Ann.Sc.Norm.Sup. Pisa, 21 (1967), 83-91.

[3] J.R.CANNON-C.D.HILL, "Existence, Uniqueness, Stability and Monotone Dependence in a Stefan Problem for the Heat Equation", J.Math.Mech., 17(1967), 1-19.

[4] J.R.CANNON-C.D.HILL, "Remarks on a Stefan Problem", J.Math.Mech., 17(1967), 433-441.

[5] J.R.CANNON-C.D.HILL-M.PRIMICERIO, "The One-Phase Stefan Problem for the Heat Equation with Boundary Temperature Specification", Arch.Rat.Mech.Anal. , 39(1970), 270-274.

[6] J.R.CANNON-M.PRIMICERIO, "Remarks on the One-Phase Stefan Problem for the Heat Equation With the Flux Prescribed on the Fixed Boundary", J.Math.Anal.Appl. 35 (1971), 361-373.

[7] G.W.EVANS, II, "A Note on the Existence of a Solution to a Problem of Stefan", Quart.Appl.Math., 9(1951), 185-193.

[8] G.W.EVANS,II-E.ISAACSON-J.K.L. MAC DONALD, "Stefan-like Problems", Quart.Appl.Math., 8(1950), 312-319.

[9] A.FASANO-M.PRIMICERIO, "Free Boundary Problems for

Nonlinear Parabolic Equations with Nonlinear Free Boundary Conditions", J.Math.Anal.Appl., 72(1979), 247-273.

[10] A.FRIEDMAN, "Free Boundary Problems for Parabolic Equations I. Melting of Solids", J.Math.Mech., 8(1959), 499-517.

[11] A.FRIEDMAN, "Partial Differential Equations of Parabolic Type" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).

[12] C.D.HILL, "Parabolic Equations in One Space Variable and the Non-Characteristic Cauchy Problem", Comm.Pure Appl.Math., 20(1967), 619-635.

[13] M.PRIMICERIO, "Problemi di diffsione a frontiera libera", Boll.Un.Mat. Italiana, 18A(1981), 11-68.

[14] L.I.RUBINSTEIN, "The Stefan Problem", Trans.Math. Monographs, vol. 27, Amer.Math.Soc., Providence(1971).

[15] G.SESTINI, "Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan", Conferenze Sem. Mat.Univ.Bari, N*55-56 (1960).

[16] B.SHERMAN, "Free Boundary Problems for the Heat Equation with Prescribed Flux at Both Fixed Face and Melting Interface", Quart.Appl.Math., 25(1967), 53-63

[17] B.SHERMAN, "Free Boundary Problems for the Heat Equationsin Which the Moving Interface Coincides Initially with the Fixed Face", J.Math.Anal.Appl., 33(1971), 449-466.

[18] D.A.TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", 29(1981/82), 147-241.

PROMAR(CONICET-UNR), Instituto de Matemática 'Beppo Levi',
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, ARGENTINA.