

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL
INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPPO LEVI"

Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 4 al 8 de JULIO - 1983

11

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
—— 1984 ——

Introducción al seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

Domingo Alberto TARZIA

En [21], Lamé y Clapeyron estudiaron el problema de la solidificación por enfriamiento de un globo líquido (Tierra) de la siguiente manera:

Si se supone que la Tierra es una esfera que verifica las siguientes hipótesis:

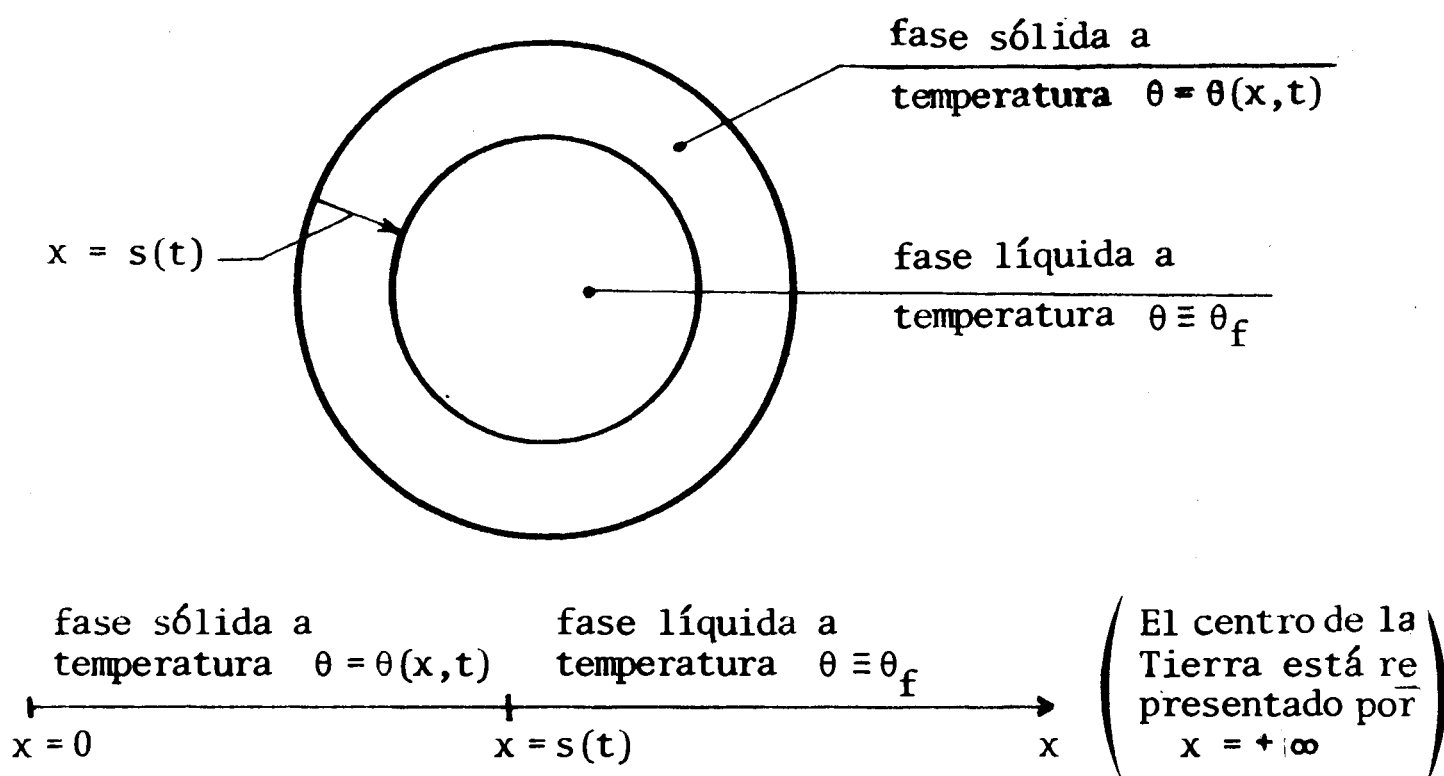
- i) primitivamente era líquida y compuesta por una sola substancia, la cual se encontraba a la temperatura de fusión θ_f .
- ii) se enfría en el espacio y se solidifica a partir de su superficie exterior, la cual toma rápidamente una temperatura media constante θ_0 , con $\theta_0 < \theta_f$,
- iii) la corteza sólida ya formada en nuestros días no tiene un espesor considerable comparado al radio terrestre,

entonces se obtiene que:

- i) el espesor de la parte sólida que recubre nuestro globo terrestre aumenta proporcionalmente a $\sqrt{t}$, donde t es el tiempo desde que comenzó la solidificación,
- ii) el conocimiento de dicho tiempo (edad de la parte sólida del globo terrestre) depende únicamente de numerosos coeficientes que pueden ser fácilmente obtenidos por la experiencia. Dichos coefi

cientes dependen sólo de la fase sólida.

En realidad, bajo las hipótesis dadas anteriormente, en [21] se resuelve el problema de la solidificación de un material semi-infinito, representado por $x > 0$, que inicialmente se encuentra en fase líquida a su temperatura de fusión θ_f y que en el borde $x = 0$ se le enfría a una temperatura θ_0 inferior a la de fusión (ver Figura).



Por consideraciones físicas se intuye que para cada tiempo $t > 0$ existirá un punto $x = s(t)$ que separará la fase sólida, representada por el intervalo $(0, s(t))$, y la fase líquida, representada por el intervalo $(s(t), +\infty)$, que se encuentra a su temperatura de fusión.

Desde el punto de vista matemático, el problema puede plantearse de la siguiente manera:

Hallar la función $s = s(t)$ (frontera libre que separa la fase sólida de la fase líquida y que se encuentra a temperatura constante) definida para $t > 0$ con $s(0) = 0$, y la temperatura

$$(1) \quad \theta = \begin{cases} \theta(x, t) & \text{si } 0 < x < s(t) \\ \theta_f & \text{si } s(t) \leq x \end{cases}, \quad t > 0$$

de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \rho c \theta_t = k \theta_{xx} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{ii)} \quad \theta(0,t) = \theta_o < \theta_f \quad , \quad t > 0 \\ \text{iii)} \quad \theta(s(t),t) = \theta_f \quad , \quad t > 0 \\ \text{iv)} \quad k \theta_x(s(t),t) = \rho l \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{v)} \quad s(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde:

- a) La (2i) representa la ecuación de conducción del calor para la fase sólida donde k, ρ y c representan la conductividad térmica, la densidad de masa y el calor específico respectivamente (ver Apéndice 1).
- b) Las condiciones (2ii) y (2iii) nos expresan que la temperatura del borde fijo $x = 0$ y de la frontera libre $x = s(t)$ es constantemente θ_o y θ_f respectivamente.
- c) La condición (2iv) expresa el hecho que el flujo de calor que atraviesa, en un tiempo infinitamente pequeño, la frontera libre $x = s(t)$ es igual a la cantidad de calor abandonada por la porción de líquido que se solidificó durante dicho lapso de tiempo (una demostración más general se hará en el Apéndice 2). Esta condición es conocida por *condición de Stefan* y se deduce del principio de conservación de la energía.
- d) La condición (2v) nos indica que inicialmente el material semi-infinito se encontraba a la temperatura de fusión θ_f (ver (1)).
- e) La solución exacta del problema (2) fue dada por Lamé-Clapeyron en [21] y será desarrollada en el cursillo C3.

Conviene realizar aquí algunas observaciones y comentarios:

- A) El problema planteado por Lamé-Clapeyron [21], cuya formulación matemática está dada por (2), es conocido en la literatura como *problema de Stefan a una fase*. El nombre de *problema de Stefan* surge en los alrededores de 1950 en homenaje a los numerosos trabajos que Stefan realizó sobre el tema en los años 1890[39-41], con lo cual, por desconocimiento, no se ha tenido en cuenta a [21]. Por otra par

ta, en [4, 44] se indica que F. Neumann encontró la solución para el problema de Stefan a dos fases correspondiente a datos de temperatura inicial y de borde constantes, solución conocida en la literatura como *solución de Neumann* (es la solución exacta correspondiente al problema (5) dado en el Comentario E). Ver [4-6, 35, 39, 44] y el cursillo C3.

- B) Cabe destacar que el problema (2) se llama a una *fase* pues, en nuestro caso, la fase líquida se encuentra a temperatura constante e igual a la temperatura del cambio de fase.
- C) El problema de Stefan es *no-lineal* a pesar de la aparente linealidad de las condiciones (2i)-(2v). En efecto si se deriva (2iii) respecto de t , se obtiene:

$$\theta_x(s(t), t)\dot{s}(t) + \theta_t(s(t), t) = 0, \quad t > 0$$

con lo cual, la condición de Stefan (2iv) se transforma en

$$(3) \quad k\theta_x^2(s(t), t) = -\rho l \theta_t(s(t), t) = -\frac{\rho l k}{c} \theta_{xx}(s(t), t)$$

que nos indica que el problema (2) es no lineal [30].

Cabe destacar que en el *método del balance integral calórico* se utiliza la condición (3) en lugar de la (2iv) para la obtención de una solución aproximada del problema de Stefan, aún para condiciones de contorno más generales que las dadas en (2) [17] (ver CG1).

- D) Análogamente al problema de solidificación (2) puede plantearse el problema de fusión de un cuerpo semi-infinito que inicialmente se encuentra en estado sólido a la temperatura de fusión θ_f y que en el borde fijo $x = 0$ es calentado a una temperatura θ_o con $\theta_o > \theta_f$. Su formulación matemática está dada por: Hallar la función $s = s(t)$ (frontera libre) y la temperatura $\theta(x, t)$ de la fase líquida, definida por (1), de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$(2 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \rho c \theta_t = k \theta_{xx}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \text{ii)} \quad \theta(0, t) = \theta_o > \theta_f, \quad t > 0 \\ \text{iii)} \quad \theta(s(t), t) = \theta_f, \quad t > 0 \\ \text{iv)} \quad k \theta_x(s(t), t) = -\rho l \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ \text{v)} \quad s(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde los coeficientes térmicos k, ρ, c son los correspondientes a la fase líquida del material de cambio de fase.

- E) Si un material semi-infinito se encuentra inicialmente en estado sólido a una temperatura θ_i , con $\theta_i < \theta_f$ (temperatura de cambio de fase), y en el borde fijo $x = 0$ es calentado a una temperatura θ_0 , con $\theta_0 > \theta_f$, entonces se tiene un *problema de Stefan a dos fases*, cuya formulación matemática está dada por: Hallar la función $s = s(t)$ (frontera libre), definida para $t > 0$, y la temperatura

$$(4) \quad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t) > 0 & \text{si } 0 < x < s(t) \\ \theta_f & \text{si } x = s(t) \\ \theta_1(x,t) < 0 & \text{si } s(t) < x \end{cases}, \quad t > 0$$

definida para $x > 0$ y $t > 0$, de manera que satisfagan las siguientes condiciones ($i = 1$ representa la fase sólida y $i = 2$ la fase líquida; ρ es la densidad de masa común a ambas fases):

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \rho c_2 \theta_{2t} - k_2 \theta_{2xx} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ \text{ii)} & \rho c_1 \theta_{1t} - k_1 \theta_{1xx} = 0, \quad x > s(t), \quad t > 0 \\ \text{iii)} & \theta_1(x,0) = \theta_i, \quad x > 0 \\ \text{iv)} & \theta_2(0,t) = \theta_0, \quad t > 0 \\ \text{v)} & \theta_1(s(t),t) = \theta_f, \quad t > 0 \\ \text{vi)} & \theta_2(s(t),t) = \theta_f, \quad t > 0 \\ \text{vii)} & k_1 \theta_{1x}(s(t),t) - k_2 \theta_{2x}(s(t),t) = \rho \ell \dot{s}(t), \quad t > 0 \\ \text{viii)} & s(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde (5vii) representa la condición de Stefan cuando existiendo dos fases (Ver Apéndice 2). La solución exacta del problema (5) es conocida como *solución de Neumann* y fue dada en [4,5,39,44] la cual será desarrollada en el cursillo C3.

- F) Un problema de Stefan a una fase (caso fusión) más general que el dado por (2 bis) puede plantearse de la siguiente manera: Hallar el triple $\{T, s(t), \theta(x,t)\}$ soluciones del sistema siguiente (sin pérdida de generalidad se supone que la temperatura de cambio de fase es $\theta_f = 0$) :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \rho c \theta_t = k \theta_{xx} \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{ii)} & \theta(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iii)} & k \theta_x(s(t), t) = - \rho \ell \dot{s}(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iv)} & \theta(0, t) = f(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{v)} & \theta(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b \\ \text{vi)} & s(0) = b \end{array} \right.$$

donde $\varphi \geq 0$, $f \geq 0$, $b \geq 0$ (si $b = 0$, entonces la condición (6v) desaparece). La condición (6iv) puede ser reemplazada por una condición de flujo de calor de la forma siguiente:

$$(6 \text{ ivbis}) \quad k \theta_x(0, t) = - g(t) \quad , \quad 0 < t < T$$

donde $g \geq 0$. Se llamará problema (6bis) al problema (6) con la condición (6 ivbis) en lugar de la (6 iv) .

El tiempo T representa el tiempo máximo hasta el cual la solución al problema existe; cabe destacar que T puede ser finito o infinito.

Un estudio teórico sobre existencia, unicidad y propiedades de la solución correspondiente al problema (6) (o su equivalente problema en variables adimensionales (9)) será realizado en el cursillo C5.

G) una variante interesante en el problema (6) o (6 bis) consiste en dar como dato la función $s = s(t)$ y hallar T , $\theta(x, t)$ y la temperatura $f(t)$ o el flujo de calor $-g(t)$ en el borde fijo $x = 0$ de manera que $\{T, s(t), \theta(x, t)\}$ sea solución de (6) o (6 bis) respectivamente. A tales problemas se los incluyen en el nombre de *problema inverso de Stefan* (ver cursillo C4). Un ejemplo de solución exacta fue dada por Stefan para el caso en que la frontera tenga velocidad constante [40,41] (ver Apéndice 5). Una aplicación a problemas de control optimal en el cambio de fase de un material [10,34] será dada en el cursillo C7.

H) La solución exacta del problema (2) o (2 bis) , para la temperatura, está dada en función de la *variable de semejanza* $\frac{x}{2a\sqrt{t}}$ donde $a^2 = \alpha = \frac{k}{\rho c}$ es el coeficiente de difusión. Lo mismo puede decirse

para el problema de Stefan a dos fases (5) (Un análisis de las soluciones exactas y de sus propiedades será realizada en el cursillo C3) (ver también Apéndice 6).

Los problemas de Lamé-Clapeyron (Stefan a una fase) y de Neumann (Stefan a dos fases) nos mostrarán que a través de la llamada *función de error* erf se obtendrá una solución exacta para ciertas condiciones iniciales y de contorno. El método de semejanza no podrá aplicarse en general. Para que exista una solución de semejanza es necesario que la ecuación diferencial y todos los datos (inicial y de contorno) puedan ser expresados con una sola variable independiente (llamada *variable de semejanza*). Soluciones de tipo semejanza no existen, en general, para:

- i) dominios finitos
- ii) cuando dos fases esten presentes inicialmente
- iii) cuando la temperatura inicial no es constante
- iv) cuando la temperatura o el flujo de calor en el borde fijo no es constante.

Por otra parte, puede decirse que existen muy pocas soluciones exactas diferentes de las de tipo semejanza. Un estudio general con soluciones semejantes (autosemejantes) que tengan en cuenta un cambio de fase será dada en el cursillo C6.

Debido a las consideraciones anteriormente mencionadas resulta de gran interés profundizar sobre los llamados *métodos aproximados* (cuasi-estacionario de Stefan, balance integral de Goodman, variacional de Biot, desarrollo en serie, perturbación, procesos iterativos, etc.) y los *métodos numéricos* (diferencias finitas, elementos finitos, líneas, inecuaciones variacionales, ecuaciones integrales, etc.). Para una mayor información referirse a [32,43]. Una solución aproximada, conocida como *solución cuasi-estacionaria*, fue dada por Stefan [39,40] (ver Apéndice 5). Una introducción general a la resolución aproximada y numérica del problema de Stefan unidimensional será dada en CG1 y CG2 respectivamente.

1) En general, cuando se estudian propiedades de un sistema físico, con

viene transformar las variables que lo definen en *variables adimensionales* e independizarse de este modo de las constantes físicas del sistema. Como ejemplo, lo aplicaremos al siguiente problema de Stefan unidimensional a una fase: Hallar la temperatura $\theta = \theta(y, \tau)$ y la frontera libre $r = r(\tau)$, soluciones del sistema:

$$(7)(7 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{\tau} = \alpha \theta_{yy} \quad , \quad 0 < y < r(\tau) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(r(\tau), \tau) = 0 \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(r(\tau), \tau) = - \rho \ell r'(\tau) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ k \theta_y(0, \tau) = - \psi(\tau) \quad (\theta(0, \tau) = \psi_0(\tau)) \quad , \quad 0 < \tau < \tau_0 \\ \theta(y, 0) = \phi(y) \quad , \quad 0 \leq y \leq b \\ r(0) = b \end{array} \right.$$

Si se realiza el siguiente cambio de variables:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y}{b} \quad , \quad t = \frac{\alpha}{b^2} \tau \quad \left(\alpha = \frac{k}{\rho c} \right) \\ z(x, t) = \frac{c}{\ell} \theta(y, \tau) \quad , \quad s(t) = \frac{r(\tau)}{b} \end{array} \right.$$

entonces los problemas (7), (7 bis) se transforman de la siguiente manera:

$$\text{EJERCICIO 1.} \quad (9)(9 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{xx} = z_t \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ z_x(s(t), t) = - \dot{s}(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z_x(0, t) = - g(t) \quad (z(0, t) = f(t)) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ s(0) = 1 \end{array} \right.$$

donde

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{\alpha}{b^2} \tau_0 \quad , \quad h(x) = \frac{c}{\ell} \phi(y) \quad , \\ g(t) = \frac{bc}{\ell k} \psi(\tau) \quad , \quad f(t) = \frac{c}{\ell} \psi_0(\tau) \quad , \end{array} \right.$$

siendo las nuevas variables independientes x, t y las nuevas variables dependientes $z(x, t)$, $s(t)$ adimensionales.

J) Una de las herramientas útiles en el estudio teórico del problema

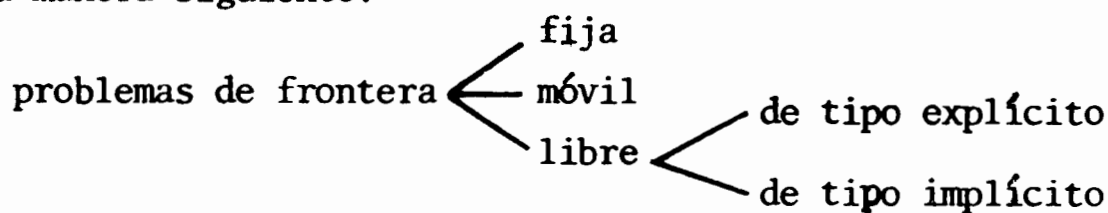
de Stefan es el *principio del máximo* y el Lema de Hopf en su versión parabólica [14, 33] análisis que será realizado en el cursillo C2. Como una aplicación de lo dicho anteriormente, se deja al lector el siguiente:

EJERCICIO 2:

Si $\{T, s(t), \theta(x,t)\}$ es solución de (6) o (6 bis), entonces se tienen las propiedades siguientes:

$$(11) \quad \begin{cases} \text{i)} & \theta \geq 0 \\ \text{ii)} & \theta_x(s(t), t) \leq 0 \\ \text{iii)} & \dot{s}(t) \geq 0 \end{cases} .$$

K) El problema de Stefan es un problema de frontera libre para la ecuación del calor de tipo explícito. En general, los problemas que se plantean para la ecuación del calor o de la difusión se clasifican de la manera siguiente:



Los *problemas de frontera fija* para la ecuación del calor (difusión) son aquellos que se estudian en el dominio $(x_1, x_2) \times (0, T)$, es decir, son los clásicos problemas que se analizan en un curso básico de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, como ser:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_t - z_{xx} = f(x, t) \quad , \quad x_1 < x < x_2 \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ z(x_1, t) = f_1(t) \quad \text{ó} \quad z_x(x_1, t) = f_1(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x_2, t) = f_2(t) \quad \text{ó} \quad z_x(x_2, t) = f_2(t) \quad , \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

Los *problemas de frontera móvil* para la ecuación del calor (difusión) son aquellos que se estudian en el dominio $(s_1(t), s_2(t)) \times (0, T)$ con $s_1(t) < s_2(t)$ funciones dadas en $(0, T)$, es decir, que el dominio espacial de la(s) función(es) incógnita(s) es variable con el tiempo mediante una *ley de movimiento conocida a priori*, como ser:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_t - z_{xx} = f(x,t) \quad , \quad s_1(t) < x < s_2(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x,0) = h(x) \quad , \quad s_1(0) \leq x \leq s_2(0) \\ z(s_1(t),t) = f_1(t) \quad , \quad z_x(s_1(t),t) = f_1(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(s_2(t),t) = f_2(t) \quad \text{ó} \quad z_x(s_2(t),t) = f_2(t) \quad , \quad 0 < t < T \end{array} \right.$$

Más aún, el dominio puede ser de la forma $(-\infty, s(t)) \times (0, T)$ ó $(s(t), +\infty) \times (0, T)$. Todos estos problemas fueron inicialmente estudiados por Block [3], Gevrey [15,16], Coursat [18], Holmgren [19,20], Levi [22]; una introducción a los mismos será dada en el cursillo Cl.

Los problemas de *frontera libre* para la ecuación del calor (difusión) son aquellos en los cuales el dominio espacial de la(s) función(es) incógnita(s) es variable con el tiempo mediante una *ley de movimiento desconocida a priori*. Por supuesto, el desconocimiento de la frontera, o parte de ella, induce la necesidad matemática de imponer nuevas condiciones a las funciones incógnitas, las cuales dependerán del problema físico en estudio. En general, la nueva condición a imponer a la función incógnita se deduce del principio de conservación de la energía a través de la frontera. Dicha frontera resulta ser, en consecuencia, una incógnita suplementaria del problema, la cual recibe el nombre de la *frontera libre* del problema en cuestión.

Por lo tanto, la diferencia esencial entre los problemas de *frontera móvil* y *libre* radica en el hecho de la existencia de una *frontera* cuya ley de movimiento es conocida en el primero y desconocida en el segundo, siendo en este último caso una incógnita más del problema.

Los problemas de *frontera libre* para la ecuación del calor se dividen en dos clases: de *tipo explícito* o *implícito*, según aparezca o no explícitamente la velocidad de la frontera libre en las condiciones que se imponen sobre dicha frontera. Es decir, si la frontera libre viene dada por $s = s(t)$, entonces el problema será de tipo explícito (implícito) si $\dot{s}(t)$ aparece (no aparece) en las condiciones que se imponen para $x = s(t)$.

Un ejemplo típico de problema de frontera libre de tipo explícito es el problema de Stefan, del cual nos ocuparemos extensamente en este Seminario, sobre todo en el problema unidimensional a una fase. Una formulación bastante general ha sido estudiada en [12] consistente en : Hallar el triple $\{T, s(t), z(x, t)\}$ de manera que satisfagan el siguiente sistema:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} z_{xx} - z_t = q(x, t) \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z(x, 0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b \\ z(0, t) = \varphi(t) \quad \delta \quad z_x(0, t) = g[z(0, t), t] \quad , \quad 0 < t < T \\ z(s(t), t) = f(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ z_x(s(t), t) = \lambda(s(t), t)\dot{s}(t) + \mu(s(t), t) \quad , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \end{array} \right.$$

donde los datos $q(x, t)$, $h(x)$, $\varphi(t)$ δ $g(y, t)$, $f(x, t)$, $\lambda(x, t)$ y $\mu(x, t)$ verifican ciertas hipótesis para tener una generalización de un problema de conducción de calor en materiales con cambio de fase.

En cambio, un ejemplo de problema de frontera libre de tipo implícito es el llamado *problema de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos* [7, 23], cuya formulación general en variables adimensionales (ver Apéndice 3) está dada por: Hallar el triple $\{T, s(t), u(x, t)\}$ de manera que satisfagan el siguiente sistema:

$$(15) (15 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} - u_t = 1 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) = H(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = G(t) \quad (u(0, t) = F(t)) \quad , \quad 0 < t < T \\ u(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ u_x(s(t), t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ s(0) = 1 \end{array} \right.$$

donde u representa aquí la concentración de oxígeno adimensionalizada.

- L) El problema de Stefan a una fase (problema de frontera libre de tipo explícito) está relacionado con el problema de la difusión-con

sumo de oxígeno en tejidos vivos de la siguiente manera:

EJERCICIO 3.

i) Si el triple (T, s, z) es una solución de (9), (9bis) entonces el triple (T, s, u) , con u definido por:

$$(16) \quad u(x, t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_{\xi}^{s(t)} [1 + z(y, t)] dy,$$

es una solución de (15), (15bis) respectivamente, donde:

$$(17) \quad \begin{cases} H(x) = \int_x^1 d\xi \int_{\xi}^1 [1 + h(y)] dy, \\ G(t) = 1 + \int_0^1 h(x) dx + \int_0^t g(\tau) d\tau, \\ F(t) = H(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau. \end{cases}$$

ii) Recíprocamente, si (T, s, u) es una solución de (15), (15 bis) entonces el triple (T, s, z) , con z definido por:

$$(18) \quad z(x, t) = u_t(x, t)$$

es una solución de (9), (9 bis) respectivamente, donde:

$$(19) \quad \begin{cases} h(x) = H'(x) - 1, & g(t) = G'(t), \\ f(t) = F'(t). \end{cases}$$

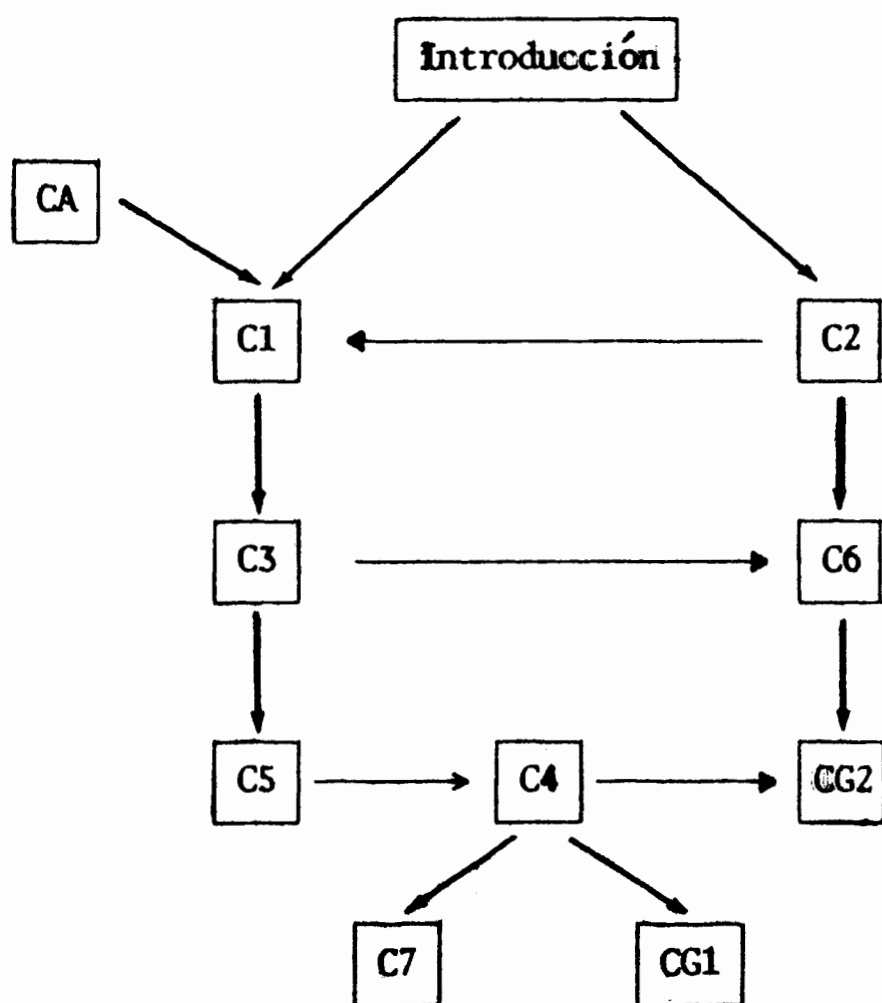
La presente *equivalencia* entre el problema de Stefan a una fase (9), (9 bis) con el de la difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos puede generalizarse a otros problemas de frontera libre de tipo explícito o implícito [11,37] (ver Apéndice 4).

Conviene recalcar una diferencia que caracteriza de alguna manera a las funciones z (incógnita en el problema de Stefan a una fase (9) ó (9 bis)) y u (incógnita en el problema de la difusión-consumo de oxígeno (15) ó (15 bis)) respectivamente. Las funciones z, u, u_x son continuas sobre la frontera libre $x = s(t)$, en cambio z_x no es continua debido a la condición de Stefan.

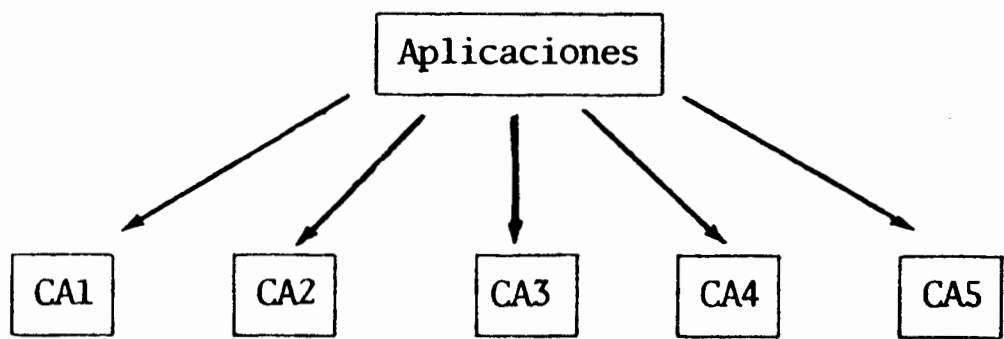
Esta diferencia tiene su gran importancia en el estudio de la regularidad y en el cálculo y análisis numérico de la solución.

Para finalizar esta Introducción diremos que existen numerosos trabajos de revisión sobre problemas de frontera libre para la ecuación del calor, y en especial sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones; entre ellas se citan los trabajos [1,2,6,8,9,13,24-29,31,32,35,36,38,42,43,45]. Numerosos métodos básicos del problema de Stefan *unidimensional* serán analizados en este primer Seminario (ya sea desde un punto de vista teórico como el de las aplicaciones) y otros serán postergados para próximos Seminarios; por supuesto, muchos otros quedarán sin ser vistos por diversos motivos: desconocimiento del tema, problemas aún no resueltos, etc. El lector deseoso de conocer, profundizar y avanzar en el tema encontrará en las referencias de los trabajos los elementos necesarios para su progreso; para ello siempre será aconsejable la lectura y el análisis de los trabajos originales y pioneros en cada tema como un acercamiento a aquellos que han ideado el avance científico.

Para un mayor aprovechamiento del material dado en el presente Seminario, se indica a continuación la interdependencia existente entre los diferentes cursillos y conferencias realizados:



Luego se encuentran las conferencias de ciertas aplicaciones en las cuales aparece el problema de Stefan, como ser: oxidación del zirconio en reactores nucleares en caso de accidentes (ver CA1), solidificación de aleaciones binarias (ver CA2), fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales (ver CA3), cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar (ver CA4), determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase (ver CA5). Para finalizar, se encuentra una clase de apoyo para no matemáticos sobre algunos conceptos básicos del análisis funcional (ver CA).



Otras aplicaciones se encuentran explicitadas en [43].

APENDICE 1
DIMENSIONES FISICAS

La ecuación del calor para un material unidimensional isótropo y homogéneo está dada por:

(A1-1) $\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

donde:

- (A1-2) {
- t > 0 : tiempo

x : variable del material unidimensional

$\rho > 0$: densidad de masa

c > 0 : calor específico

k > 0 : conductividad térmica

$a^2 = \alpha = \frac{k}{\rho c} > 0$: difusividad térmica

$\theta = \theta(x,t)$: temperatura del punto material x al instante t

$q(x,t) = - k \frac{\partial \theta}{\partial x} (x,t)$: flujo de calor en el punto material x al instante t (con respecto a la dirección de los x > 0) por unidad de tiempo y de área transversal.

La condición de Stefan para un problema de solidificación o fusión unidimensional a una fase está dada por:

$$(A1-3) \quad k \frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t), t) = \pm \rho \ell \dot{s}(t)$$

donde:

$$(A1-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell : \text{calor latente de fusión por unidad de masa} \\ L = \rho \ell : \text{calor latente de fusión por unidad de volumen} \\ Ste = \frac{c\theta}{\ell} : \text{número de Stefan.} \end{array} \right.$$

Si con [A] se representa la *dimensión* de la variable física A y se tienen en cuenta las siguientes:

UNIDADES BASICAS:

$$(A1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\text{Masa}] = m, \quad [\text{Longitud}] = x, \quad [\text{Tiempo}] = t \\ [\text{Temperatura}] = T, \quad [\text{Energía}] = \frac{m x^2}{t^2} \end{array} \right.$$

entonces, para las cantidades físicas definidas anteriormente, se obtienen las siguientes expresiones:

$$(A1-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\rho] = \frac{m}{x^3}, \quad [L] = \frac{\text{energía}}{x^3} = \frac{m}{t^2 x}, \quad [\ell] = \frac{x^2}{t^2} \\ [k] = \frac{mx}{T t^3}, \quad [c] = \frac{x^2}{T t^2}, \quad [\alpha] = \frac{x^2}{t} \\ [q] = \frac{\text{energía}}{t x^2} = \frac{m}{t^3}, \quad \left[\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = \left[k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] = \frac{\text{energía}}{t x^3} = \frac{m}{x t^3} \\ [\rho c \theta] = \frac{\text{energía}}{x^3} = \frac{m}{x t^2}, \quad \left[\frac{x}{\sqrt{\alpha t}} \right] = 1, \quad [Ste] = 1 \end{array} \right.$$

APENDICE 2

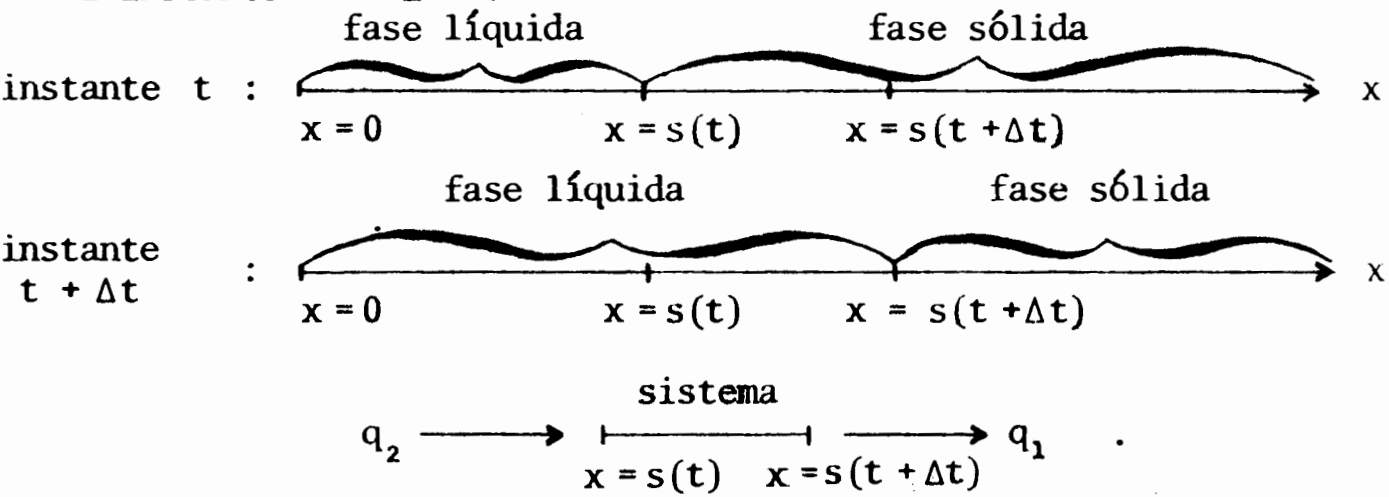
DEDUCCION DE LA CONDICION DE STEFAN (5vii)

Deduciremos la condición de Stefan (5vii) correspondiente al problema de Stefan a dos fases, planteado en el Comentario E), consistente en hallar la función $s(t)$ (frontera libre que separa las fases líquida y sólida) y la temperatura $\theta(x, t)$ de manera que satisfagan el sistema (5). Por simplicidad, supondremos que el material semi-infinito $x \geq 0$ tiene un área transversal A constante.

Por consideraciones físicas $s(t)$ debe estar representada por una

función creciente del tiempo t .

Sea $t > 0$ un instante de tiempo fijo y sea Δt un tiempo infinitamente pequeño (destinado a tender a cero); consideremos el sistema representado por el intervalo material $(s(t), s(t + \Delta t))$. Dicho sistema se encuentra en estado sólido al instante t y en estado líquido al instante $t + \Delta t$.



El sistema recibe en su parte izquierda $x = s(t)$ una energía igual a:

(A2-1)
$$q_2 \, A \, dt = - \, k_2 \, \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \, (s(t), t) \, A \, dt$$

y en cambio, en su parte derecha $x = s(t + \Delta t)$, el sistema entrega una energía igual a:

(A2-2)
$$q_1 \, A \, dt = - \, k_1 \, \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \, (s(t + \Delta t) , t + \Delta t) \, A \, dt$$

La energía sobrante, igual a $(q_2 - q_1)A \, dt$, se utiliza para transformar el sistema del estado sólido al estado líquido. La energía necesaria para dicha transformación está dada en función del calor latente de fusión de la siguiente manera:

(A2-3)
$$\rho \ell [s(t + \Delta t) - s(t)] A$$

con lo cual, por conservación de la energía, se obtiene la igualdad

(A2-4)
$$k_1 \, \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \, (s(t + \Delta t), t + \Delta t) - k_2 \, \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \, (s(t), t) = \rho \ell \, \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

que por pasaje al límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se deduce la condición de Stefan (5vii).

APENDICE 3

EL PROBLEMA DE LA DIFUSION-CONSUMO DE OXIGENO EN TEJIDOS VIVOS

El problema consiste en lo siguiente [7]: Primeramente se deja difundir oxígeno en un medio; parte del oxígeno es absorbido por el medio siendo por lo tanto eliminado del proceso de difusión. La concentración de oxígeno en la superficie del medio es mantenida constante. Esta primera fase del problema continúa hasta alcanzar un estado estacionario en el cual el oxígeno no penetra más lejos en el medio. La provisión de oxígeno es entonces cortada y la superficie del medio es aislada de manera que no entre ni salga más oxígeno. El medio continúa absorbiendo el oxígeno disponible en su interior y por consiguiente la *frontera libre*, que establece la separación entre la zona de concentración positiva y nula de oxígeno y que marca el ancho de penetración máximo en el caso estacionario, comienza a retroceder hacia la frontera aislada. El problema más importante es el de localizar el movimiento de la frontera libre durante esta fase del proceso y determinar la distribución de oxígeno en el medio como una función del tiempo.

El proceso de difusión con absorción o consumo está representado por la ecuación:

$$(A3-1) \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} - m$$

donde:

$$(A3-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(\xi, \tau) : \text{es la concentración de oxígeno libre a difundirse} \\ \quad \text{a la distancia } \xi \text{ del borde externo del medio} \\ \quad (\xi = 0) \text{ al instante } \tau. \\ D > 0 : \text{coeficiente de difusión} \\ m > 0 : \text{razón de consumo de oxígeno por unidad de volumen} \\ \quad \text{del medio.} \end{array} \right.$$

El proceso de difusión-consumo de oxígeno consta de dos partes:

- i) la primera parte consiste en hallar la solución estacionaria $C_{\infty}(\xi)$ y el punto $\xi = \xi_{\infty}$ (a partir del cual la concentración y su gradiente son nulos) de manera que satisfagan el siguiente sistema:

$$(A3-3) \quad \begin{cases} D C_{\infty}' - m = 0 & , \quad 0 < \xi < \xi_{\infty} \\ C_{\infty}(0) = C_0 & , \\ C_{\infty}(\xi_{\infty}) = C_{\infty}'(\xi_{\infty}) = 0 & , \end{cases}$$

donde C_0 representa la concentración de oxígeno entrante por la superficie exterior del medio $\xi = 0$.

La solución de (A3-3) está dada por:

$$(A3-4) \quad \begin{cases} C_{\infty}(\xi) = \frac{m}{2D} (\xi - \xi_{\infty})^2 & , \\ \xi_{\infty} = \left(\frac{2DC_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} & . \end{cases}$$

ii) la segunda parte consiste en aislar el borde $\xi = 0$ y por lo tanto el oxígeno ya existente en el medio, en la región $0 \leq \xi \leq \xi_{\infty}$, continúa a ser consumido. El punto de concentración cero que inicialmente está dado por $\xi = \xi_{\infty}$ retrocede hacia $\xi = 0$. Si representamos con $S(\tau)$ la posición de dicho punto al instante τ , entonces el problema consiste en hallar $C = C(\xi, \tau)$ y $S = S(\tau)$ soluciones del siguiente sistema:

$$(A3-5) \quad \begin{cases} C_{\tau} - D C_{\xi\xi} = -m & , \quad 0 < \xi < S(\tau) & , \quad \tau > 0 \\ C(\xi, 0) = C_{\infty}(\xi) & , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_{\infty} \\ C_{\xi}(0, \tau) = 0 & , \quad \tau > 0 \\ C(S(\tau), \tau) = C_{\xi}(S(\tau), \tau) = 0 & , \quad \tau > 0 \\ S(0) = \xi_{\infty} & , \end{cases}$$

donde $\tau = 0$ es el instante cuando el borde $\xi = 0$ es aislado.

Realizando el cambio de variables:

$$(A3-6) \quad \begin{cases} x = \frac{\xi}{\xi_{\infty}} & , \quad t = \frac{D}{\xi_{\infty}^2} \tau & , \\ u = \frac{1}{2C_0} C & , \quad s(t) = \frac{S(\tau)}{\xi_{\infty}} & , \end{cases}$$

el problema (A3-5) se reduce a la forma adimensional siguiente:

$$(A3-7) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = -1 & , \quad 0 < x < s(t) & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} (1 - x)^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(s(t), t) = u_x(s(t), t) = 0 & , \quad t > 0 \\ s(0) = 1 & . \end{cases}$$

En [23] se indica que el tratamiento exitoso de cáncer por radioterapia está determinado principalmente por la posibilidad de aplicar una dosis de radiación lo suficientemente grande como para dañar considerablemente las células cancerosas sin dañar las células sanas circundantes, y mantenerse aún dentro del nivel de tolerancia a la radiación de los tejidos. Se ha demostrado que la susceptibilidad de las células cancerosas a la radiación aumenta con concentraciones crecientes de oxígeno dentro del tumor; más aún, existe una disminución de 2 a 3 veces en la dosis de radiación que se precisaría para obtener el grado de destrucción de las células oxigenadas con respecto de las células en ausencia total de oxígeno.

APENDICE 4

EQUIVALENCIA ENTRE CIERTOS PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE DE TIPO EXPLÍCITO E IMPLÍCITO.

Consideremos la siguiente formulación general de un problema de frontera libre para la ecuación del calor o difusión:

$$(A4\ 1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} - u_t = F(x,t) & , \quad a < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \alpha u_x(a,t) + \beta u(a,t) = f(t) & , \quad 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x) & , \quad a \leq x \leq b \\ u(s(t),t) = g(s(t),t) & , \quad 0 < t < T \\ \gamma(s(t),t)\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t) + h(s(t),t) & , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \end{array} \right.$$

y los siguientes tres pasos particulares:

PROBLEMA P1 (problema de frontera libre de tipo implícito con condiciones de Cauchy).

$$(A4\ 2) \quad \gamma \equiv 0 \quad , \quad g_x \neq h \quad .$$

PROBLEMA P2 (problema de frontera libre de tipo implícito de la forma difusión-consumo de oxígeno):

$$(A4\ 3) \quad \gamma \equiv g \equiv h \equiv 0 \quad , \quad F \neq 0 \quad .$$

PROBLEMA P3 (problema de frontera libre de tipo explícito de la forma Stefan):

(A4-4)

$$\gamma \neq 0.$$

En [37] se presenta un método simple para reducir los problemas (P1) y P2) a un problema del tipo (P3), bajo razonables condiciones (ver en [37] las hipótesis sobre los datos y las definiciones para que el triple $\{T, s(t), u(x, t)\}$ sea solución en los diferentes casos). Entonces, bajo ciertas hipótesis [37], se tienen las siguientes equivalencias:

EJERCICIO 4:

- i) Si (T, s, u) es solución de (P1) con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ entonces (T, s, v) con $v = u_x$ es solución del siguiente problema (P3):

$$(A4-5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_{xx} - v_t = F_x(x, t) & , \quad a < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(a, t) = f(t) & , \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = \varphi'(x) & , \quad a \leq x \leq b \\ v(s(t), t) = h(s(t), t) & , \quad 0 < t < T \\ \left[h(s(t), t) - g_x(s(t), t) \right] \dot{s}(t) = -v_x(s(t), t) + F(s(t), t) + \\ \quad + g_t(s(t), t) & , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \end{array} \right.$$

- ii) Recíprocamente, si (T, s, v) es solución de (A4-5) entonces (T, s, u) , con u definido por:

$$(A4-6) \quad u(x, t) = - \int_x^{s(t)} v(\xi, t) d\xi + g(s(t), t) \quad ,$$

es solución de (P1) con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

EJERCICIO 5:

- i) Si (T, s, u) es solución de (P2) con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ entonces (T, s, v) con $v = u_t$ es solución del siguiente problema (P3):

$$(A4-7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_{xx} - v_t = F_t(x, t) & , \quad a < x < s(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ v(a, t) = \dot{f}(t) & , \quad 0 < t < T \\ v(x, 0) = \varphi''(x) - F(x, 0) & , \quad a \leq x \leq b \\ v(s(t), t) = 0 & , \quad 0 < t < T \\ F(s(t), t) \dot{s}(t) = -v_x(s(t), t) & , \quad 0 < t < T \\ s(0) = b \end{array} \right.$$

ii) Recíprocamente, si (T, s, v) es solución de (A4-7), entonces (T, s, u) , con u definido por:

$$(A4-8) \quad u(x, t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_{\xi}^{s(t)} [v(y, t) + F(y, t)] dy, \quad ,$$

es solución de (P2) con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Para finalizar conviene recalcar la conveniencia de tener el problema bajo una formulación del tipo (P3), ya sea desde un punto de vista teórico como numérico.

APENDICE 5

ALGUNAS SOLUCIONES DADAS POR STEFAN

Se dijo anteriormente que Lamé-Clapeyron en 1831 hallaron la solución exacta del problema de solidificación (2) o de fusión (2bis) en [21] (problema de Stefan a una fase), y que Neumann, en los alrededores de 1840 (?) [4,44], explicaba a sus alumnos en la universidad la solución exacta del problema (5) (problema de Stefan a dos fases). El propio J. Stefan publicó en los años 1890 varias soluciones exactas, a saber:

- i) Solución de Lamé-Clapeyron del problema (2) ó (2bis) [39-41].
- ii) Solución de Neumann del problema (5) [39].
- iii) Solución cuasi-estacionaria del problema (2) ó (2bis) [39-40].
- iv) Problema inverso de Stefan a una fase con una frontera que tiene velocidad constante ($\dot{s}(t) = m$) [40,41].

La solución de Lamé-Clapeyron y de Neumann y sus propiedades serán desarrolladas con mayores detalles en el cursillo C3, con lo cual aquí solo explicitaremos los caso iii) y iv).

- iii) La *solución cuasi-estacionaria* del problema (2bis) es aquella que se obtiene de resolver el siguiente problema de frontera libre (se supone, sin pérdida de generalidad, que $\theta_f = 0$; en caso contrario se realiza una traslación de la escala de temperatura):

$$(A5-1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \theta_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{ii)} & \theta(0,t) = \theta_0 > 0 \quad , \quad t > 0 \\ \text{iii)} & \theta(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ \text{iv)} & -k\theta_x(s(t),t) = \rho\ell \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{v)} & s(0) = 0 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 6:

Verificar que la solución de (A5-1) está dada por:

$$(A5-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x,t) = \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s(t)} \right) \quad , \\ s(t) = \sqrt{\frac{2k\theta_0}{\rho\ell}} t \quad . \end{array} \right.$$

Para mayores detalles sobre soluciones aproximadas ver CG1.

iv) Consideremos el siguiente problema inverso de Stefan a una fase con una frontera que tiene velocidad constante $m > 0$, es decir: Hallar la temperatura $\theta = \theta(x,t)$, y por ende $\theta(0,t)$, de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$(A5-3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \alpha\theta_{xx} = \theta_t \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{ii)} & \theta(s(t),t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ \text{iii)} & k\theta_x(s(t),t) = \rho\ell \dot{s}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \text{iv)} & \dot{s}(t) = m > 0 \quad , \quad s(0) = 0 \quad (s(t) = mt) \quad . \end{array} \right.$$

EJERCICIO 7:

Verificar que la solución de (A5-3) está dada por:

$$(A5-4) \quad \theta(x,t) = \frac{\ell}{c} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{m}{\alpha} (mt - x) \right] \right\} \quad ,$$

con lo cual se obtiene lo siguiente: Para que en el problema de solidificación (2) la frontera libre avance con velocidad constante m es condición necesaria y suficiente que la temperatura en el borde fijo $x = 0$ sea variable en el tiempo de la forma:

$$(A5-5) \quad f(t) = \theta(0,t) = -\frac{\ell}{c} \left[\exp \left(\frac{m^2 t}{\alpha} \right) - 1 \right] < 0 = \theta_f \quad , \quad \forall t > 0 \quad .$$

Para mayores detalles sobre el problema inverso de Stefan ver el cursillo C4.

APENDICE 6

EL METODO DE SEMEJANZA, LA FUNCION DE ERROR Y SU APLICACION A LA ECUACION DEL CALOR.

La ecuación del calor para un cuerpo unidimensional isótropo y homogéneo está dada por:

$$(A6-1) \quad \theta_t = a^2 \theta_{xx} \quad (\text{ver Apéndice 1}) \quad .$$

EJERCICIO 8:

Verificar que la ecuación (A6-1) es *invariante* bajo una transformación de las variables x, t de la manera siguiente:

$$(A6-2) \quad \xi = \lambda x \quad , \quad \tau = \lambda^2 t \quad (\lambda \neq 0) \quad ,$$

es decir, si $\theta(x, t) = \theta\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda^2}\right) = \varphi_\lambda(\xi, \tau)$, entonces se tiene la siguiente equivalencia:

$$(A6-3) \quad (A6-1) \iff \varphi_{\lambda_\tau} = a^2 \varphi_{\lambda_{xx}} \quad , \quad \forall \lambda \neq 0 \quad .$$

EJERCICIO 9 (Método de semejanza)

Si las condiciones de contorno para la ecuación (A6-1) no se modifican bajo un cambio de escala del tipo (A6-2), entonces la temperatura θ satisface la igualdad:

$$(A6-4) \quad \theta(x, t) = \theta(\lambda x, \lambda^2 t) \quad , \quad \forall x, t \quad , \quad \forall \lambda \neq 0 \quad .$$

Si se pone $\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{t}}$, se obtiene

$$(A6-5) \quad \theta(x, t) = \theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}, \frac{1}{4a^2}\right) = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

con lo cual, la temperatura θ depende sólo del argumento $z = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ llamada *variable de semejanza*. Entonces:

i) La función $\theta = \theta(x, t)$ es solución de (A6-1) si y sólo si la función $\Phi = \Phi(z)$ es solución de la ecuación diferencial:

$$(A6-6) \quad \Phi''(z) + 2z\Phi'(z) = 0 \quad .$$

ii) La solución general de (A6-6) está dada por:

$$(A6-7) \quad \Phi(z) = C_1 + C_2 \int_0^z \exp(-u^2) du \quad , \quad C_1, C_2 : \text{constantes} \quad .$$

EJERCICIO 10.

Se define como *función de error* a:

$$(A6-8) \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du = \operatorname{erf}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad .$$

i) La función f tiene las siguientes propiedades:

$$a) \quad f(0) = 0 \quad ; \quad b) \quad f(+\infty) = 1 \quad ; \quad c) \quad f(-x) = -f(x)$$

$$d) \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad e) \quad f''(x) = -2xf'(x) < 0 \quad , \quad \forall x > 0$$

f) Puede ser representada por una serie de potencias $f(x) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad , \quad \text{cuyo radio de convergencia es } +\infty \quad .$$

ii) Teniendo en cuenta la función de error f , la temperatura θ viene dada por:

$$(A6-9) \quad \theta(x,t) = A + B f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

donde las constantes A y B se determinan de las **condiciones** de contorno del problema correspondiente a la ecuación (A6-1).

iii) Aplicar el método anterior para resolver los problemas:

$$I) \begin{cases} \theta_t = a^2 \theta_{xx} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0 \\ \theta(x,0) = \theta_o \quad , \quad x > 0 \\ \theta(0,t) = \theta_b \quad , \quad t > 0 \end{cases} \quad II) \begin{cases} \theta_t = a^2 \theta_{xx} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad t > 0 \\ \theta(x,0) = \begin{cases} \theta_o & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

EJERCICIO 11.

Se define como *función de error complementaria* a:

$$(A6-10) \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - f(x) \quad .$$

Además, se definen las funciones iteradas de error complementaria de la siguiente manera:

$$(A6-11) \quad \begin{cases} i^0 \operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erfc}(x) \\ i^1 \operatorname{erfc}(x) = i \operatorname{erfc}(x) = \int_x^{+\infty} \operatorname{erfc}(t) dt \\ i^n \operatorname{erfc}(x) = \int_x^{+\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc}(t) dt \quad , \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades:

i) Integrando por partes, se tiene:

$$\int_x^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t^2} dt .$$

Repitiendo el proceso, se obtiene:

$$\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(x) = \exp(-x^2) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{2^2 x^5} - \dots (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1} x^{2n-1}} + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t^{2n}} dt \right] .$$

$$\text{Como } \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t^{2n}} dt < \exp(-x^2) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}} = \frac{\exp(-x^2)}{(2n-1) x^{2n-1}} \text{ y como}$$

el término de la derecha tiende a 0 cuando $x \rightarrow +\infty$, entonces se tiene la siguiente aproximación, válida para valores de x grandes:

$$(A6-12) \quad \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2^2 x^4} - \frac{3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots .$$

ii) Verificar que se tienen las expresiones:

$$(A6-13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } i \operatorname{erfc}(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} - x \operatorname{erfc}(x) . \\ \text{b) } i^2 \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{4} \left[(1 + 2x^2) \operatorname{erfc}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2) \right] . \end{array} \right.$$

EJERCICIO 12.

i) Deducir la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(A6-14) \quad 2n i^n \operatorname{erfc}(x) = i^{n-2} \operatorname{erfc}(x) - 2x i^{n-1} \operatorname{erfc}(x) .$$

ii) Verificar que:

$$(A6-15) \quad i^n \operatorname{erfc}(0) = \frac{1}{2^n \Gamma(1 + \frac{n}{2})} .$$

iii) Verificar que la función $y(x) = i^n \operatorname{erfc}(x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$(A6-16) \quad y'' + 2xy' - 2ny = 0 .$$

iv) La función $\theta(x, t) = t^m g\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ es solución de (A6-1) si y sólo si la función $g = g(z)$ $\left(z = \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ es solución de la ecuación diferencial:

$$(A6-17) \quad g''(z) + 2z g'(z) - 4m g(z) = 0 .$$

v) Verificar que la función $\theta(x, t) = t^{n/2} i^n \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ es solu-

ción de (A6-1), $\forall n \in \mathbb{N}$.

vi) Aplicar el resultado anterior para verificar que la función $\theta(x,t) = -\frac{2ha}{k} \sqrt{t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ es solución del siguiente problema:

$$(A6-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_t = a^2 \theta_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ \theta(x,0) = 0, \quad x > 0 \\ k \theta_x(0,t) = h, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

REFERENCIAS

- [1] ALBRECHT, J. - COLLATZ, L - HOFFMANN, K.H. (Ed.), "Numerical Treatment of Free Boundary Value Problems", Birkhäuser Verlag, Basel (1982).
- [2] BANKOFF, S.G., "Heat conduction of diffusion with change of phase", in Advances in Chemical Engineering, Vol. 5, Academic Press, New York (1964), 75-150.
- [3] BLOCK, H., "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique", Arkiv Matematik Astronomi Fysik, 6 N° 31 (1911), 1-42.
- [4] BRILLOUIN, M., "Sur quelques problèmes non résolus de la Physique Mathématique classique. Propagation de la fusion", Annales de L'Inst. H. Poincaré, 1(1930/31), 285-308.
- [5] CARSLAW, H.S.-JAEGER, J.C., "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).
- [6] CRANK, J., "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).
- [7] CRANK, J.-GUPTA, R.S., "A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue", Journal Institute Math. Appl., 10(1972), 19-33.
- [8] DATZEFF, A., "Sur le problème linéaire de Stefan", Mémoires des Sciences Physiques N°69, Gauthier-Villars, Paris (1970).
- [9] ELLIOT, C.M.-OCKENDON, J.R., "Weak and variational methods for moving boundary problems", Pitman, London (1982).
- [10] FASANO, A., "Un esempio di controllo ottimale in un problema del tipo di Stefan", Boll. U.M.I., 4(1971), 846-858.
- [11] FASANO, A., "Alcune osservazioni su una classe di problemi a contorno libero per l'equazione del calore", Le Matematiche, 29(1974), 397-411.
- [12] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., "General free boundary problems for the heat equation", J. Math. Anal. Appl. Part I: 57(1977), 694-723;

Part II: 58(1977), 202-231; Part III: 59(1977), 1-14.

- [13] FASANO, A.-PRIMICERIO, M. (Ed) , *"Free boundary problems : Theory and applications"*, Vol.I,II, Pitman, London (1983).
- [14] FRIEDMAN, A., *"Partial differential equations of parabolic type"*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.Y. (1964).
- [15] GEVREY, M., *"Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique"*, J. Math. Pures Appl., (6) 9(1913), 305-471.
- [16] GEVREY, M., *"Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite)"*, J. Math. Pures Appl., (6) 10(1914), 105-148.
- [17] GOODMAN, T.R., *"The heat-balance integral and its applications to problems involving a change of phase"*, Trans. of the ASME, 80(1958), 335-342.
- [18] GOURSAT, E., *"Cours d'analyse mathématique"*, Gauthier-Villars, Paris(1927).
- [19] HOLMGREN, E., *"Sur l'équation de la propagation de la chaleur"*, Arkiv Matematik Astronomi Fysic, 4 N°14(1908), 1-11.
- [20] HOLMGREN, E., *"Sur l'équation de la propagation de la chaleur , Deuxième note"*, Arkiv Matematik Astronomi Fysic, 4 N°18 (1908), 1-28.
- [21] LAME, G.-CLAPEYRON, B.P., *"Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide"*, Annales Chimie Physique, 47 (1831), 250-256.
- [22] LEVI, E.E., *"Sull'equazione del calore"*, Ann. Mat. Pura Appl. , (3) 14 (1908), 187-264.
- [23] LIAPIS, A.I.-LIPSCOMB, G.G.-CROSSER, O.K.-TSIROYIANNI - LIAPIS, E., *"A model of oxygen diffusion in absorbing tissue"*, Mathematical Modelling, 3(1982), 83-92.
- [24] LUNARDINI, V.J., *"Heat transfer in cold climates"*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1981).
- [25] MAGENES, E., *"Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems"*, in Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations, H.G. Garnier (Ed.) , D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht (1976), 239-312.
- [26] MAGENES, E. (Ed.), *"Free boundary problems"*, Vol. I , II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (1980).
- [27] MUEHLBAUER, J.C.-SUNDERLAND, J.E., *"Heat conduction with freezing or melting"*, Appl. Mech. Reviews, 18(1965), 951-959.
- [28] OCKENDON, J.R.-HODGKINS, W.R.(Ed.). *"Moving boundary problems in heat flow and diffusion"*, Clarendon Press, Oxford (1975).
- [29] ÖZİŞİK, M.N., *"Heat conduction."*, J. Wiley, New York(1980).
- [30] PEKERIS, C.L.-SLICHTER, L.B., *"problem of ice formation"*. J. Appl. Physics, 10(1939), 135-137.
- [31] PRIMICERIO, M., *"Problemi a contorno libero per l'equazione della*

- diffusione*", Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 32(1973/74), 183-206.
- [32] PRIMICERIO, M., "*Problemi di diffusione a frontiera libera*", Boll. U.M.I., 18 A (1981), 11-68.
 - [33] PROTTER, M.H.-WEINBERGER, H.F., "*Maximun principles in differential equations*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1967).
 - [34] QUILGHINI, D., "*Un problema di controllo ottimale nel cambiamento di stato in uno strato*", Ann. Mat. Pura Appl., 84(1970), 309-320.
 - [35] RUBINSTEIN, L.I., "*The Stefan problem*", Trans. Math. Monographs Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).
 - [36] RUBINSTEIN, L.I., "*The Stefan problem: comments on its present State*", J. Inst. Math. Appl., 24(1979), 259-277.
 - [37] SCHATZ, A., "*Free boundary problems of Stephan type with prescribed flux*", J. Math. Anal. Appl. 28(1969), 569-580.
 - [38] SESTINI, G. "*Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*", Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari, N°55-56, (1960).
 - [39] STEFAN, J., "*Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung*", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche classe, 98(1889), 473-484.
 - [40] STEFAN, J., "*Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere*", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch - naturwissenschaftliche classe, 98(1889), 965-983. Annalen der Physik und Chemie, 42(1891) 269-286.
 - [41] STEFAN, J., "*Über die Theorie der Eisbildung*", Monatshefte für Mathematik und Physik, 1(1890), 1-6.
 - [42] TARZIA, D.A., "*Sobre el problema de Stefan unidimensional*", Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago de Chile, Conferencia del 9 Diciembre 1981, 31 pag.
 - [43] TARZIA, D.A., "*Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan*", Mathematicae Notae, 29(1981-82), 147-241.
 - [44] WEBER, H., "*Die Partiellen Differential Gleinungen der Mathematischen Physic, nach Riemann's Vorlesungen*", Braunswschweig, (1901), T. II.
 - [45] WILSON, D.G.-SOLOMON, A.D.-BOGGS, P.T. (Ed.), "*Moving boundary problems*", Academic Press, New York (1978).

PROMAR (CONICET-UNR)

Instituto de Matemática "Beppo Levi"

Avenida Pellegrini 250

2000 Rosario - ARGENTINA.