UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 4 al 8 de JULIO - 1983

11

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
1984

Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil

Domingo Alberto TARZIA

Continuando la Introducción del presente Seminario, en este Cursillo se estudiarán los problemas de frontera móvil para la ecuación del calor unidimensional. Se tendrá como base trabajos de principios de siglo, en especial al [11, Cap. 29]. Dicho Capítulo, a mi criterio, está escrito de una manera clara e inteligente y por lo tanto su lectura es vivamente recomendada, como así también los trabajos originales [1,9, 10,12-14].

Previamente se analizarán algunas propiedades básicas de la ecuación del calor unidimensional; sobre todo su solución fundamental y la llamada fórmula de salto que son elementos necesarios para obtener la existencia de una solución, expresable por los potenciales de calor, en problemas de conducción del calor con fronteras móviles. Asimismo se verán consecuencias de la fórmula de Green que nos darán un método para obtener la unicidad de soluciones regulares.

La importancia de los problemas con frontera móvil no radica sólo en si misma (ver en [18, p. 154-158] numerosas referencias sobre diferentes métodos teóricos, numéricos y aplicaciones) sino que su estudio es necesario para los problemas de frontera libre, en especial para el problema de Stefan. Más aún, se verá en el Cursillo C5 que un problema de frontera libre de tipo Stefan podrá interpretarse como el límite de una

sucesión de problemas de frontera móvil.

Para comenzar se verán:

I. DIVERSOS PROBLEMAS DE FRONTERA MÓVIL CON SOLUCIÓN EXPLÍCITA.

Una formulación matemática general de problemas de conducción del calor unidimensional con una *frontera móvil* (conocida *a priori*) para un medio semi-infinito es la siguiente: Hallar las funciones $\theta_1 = \theta_1(x,t)$ y $\theta_2 = \theta_2(x,t)$ de manera que satisfagan el sistema:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1^2\,\theta_{1_{xx}} = \theta_{1_t} & , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \\ a_2^2\,\theta_{2_{xx}} = \theta_{2_t} & , \quad s(t) < x \quad , \quad t > 0 \\ \theta_1(0,t) = \psi_1(t) & , \quad t > 0 \\ \theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = \psi_2(t) & , \quad t > 0 \\ \theta_2(x,0) = h(x) & , \quad x > 0 = s(0) \end{cases}$$

donde $s = s(t)$ es la dada ley de movimiento de la frontera móvil con la condición $s(0) = 0$ y ψ_1, ψ_2 y h son funciones dadas.

El problema anterior puede separarse en dos problemas de conducción del calor: uno para el intervalo $(0,s(t))$ y el otro para el intervalo $(s(t), +\infty)$. El primer problema consiste en hallar $\theta_1 = \theta_1(x,t)$, solución de:

$$(2)\quad \begin{cases} a_1^2\,\theta_{1_{xx}} = \theta_{1_t} & , \quad 0 < x < s(t) \quad , \quad t > 0 \quad (s(0) = 0) \\ \theta_1(0,t) = \psi_1(t) & , \quad t > 0 \\ \theta_1(s(t),t) = \psi_2(t) & , \quad t > 0 \end{cases}$$

y el segundo consiste en hallar $\theta_2 = \theta_2(x,t)$, solución de:

$$(3)\quad \begin{cases} a_2^2\,\theta_{2_{xx}} = \theta_{2_t} & , \quad s(t) < x \quad , \quad t > 0 \\ \theta_2(x,0) = h(x) & , \quad x > 0 = s(0) \\ \theta_2(s(t),t) = \psi_2(t) & , \quad t > 0 \end{cases}$$

donde $s = s(t)$ es la dada frontera móvil con $s(0) = 0$.

OBSERVACION 1.

Numerosos problemas de este tipo han sido considerados en [15-17],

algunos de los cuales serán presentados aquí. Para una mayor información de las soluciones exactas dadas y su forma de obtención se recomienda ver dichos trabajos.

EJERCICIO 1.

Bajo las hipótesis:

$$(4)\quad \psi_1(t) = A_1 t^{n/2}\ ,\ \psi_2(t) = A_2 t^{n/2}\ \ (n = 0,1,2,\ldots)\ ,\ s(t) = \beta\sqrt{t}\ ,\ h(x) = 0,$$

los problemas (2) y (3) tienen por solución a:

$$(5)\quad \begin{cases} \theta_1(x,t) = C_1(4t)^{n/2}\ i^n\ \mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) + C_2(4t)^{n/2}\ i^n \mathrm{erfc}\left(\dfrac{-x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\ \theta_2(x,t) = C_3(4t)^{n/2}\ i^n\ \mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

donde las constantes C_i $(i = 1,2,3)$ están dadas por:

$$(6)\quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{A_1\ i^n\ \mathrm{erfc}\left(-\dfrac{\beta}{2a_1}\right) - A_2\ i^n\ \mathrm{erfc}(0)}{\Delta}\ , \\ C_2 = \dfrac{A_2\ i^n\ \mathrm{erfc}(0) - A_1\ i^n\ \mathrm{erfc}\left(\dfrac{\beta}{2a_1}\right)}{\Delta} \\ C_3 = \dfrac{A_2}{4^{n/2}\ i^n\ \mathrm{erfc}\left(\dfrac{\beta}{2a_2}\right)}\ , \quad \Delta = 4^{n/2}\ i^n\ \mathrm{erfc}(0)\left[\, i^n\ \mathrm{erfc}\left(\dfrac{-\beta}{2a_1}\right) - i^n\ \mathrm{erfc}\left(\dfrac{\beta}{2a_1}\right)\right]\ . \end{cases}$$

Cabe destacar que esta solución puede ser extendida a los casos en que las funciones ψ_1 y ψ_2 sean polinomios de cualquier potencia en t o $\sqrt{t}$. Para el caso particular:

$$(7)\qquad \psi_1(t) = A_1\ ,\quad \psi_2(t) = A_2\quad (n = 0)$$

la solución viene dada por:

$$(8)\quad \theta_1(x,t) = A_1 + (A_2 - A_1)\,\frac{\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right)}{\mathrm{erf}\left(\dfrac{\beta}{2a_1}\right)}\ ,\ \theta_2(x,t) = A_2\,\frac{\mathrm{erfc}\left(\dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)}{\mathrm{erfc}\left(\dfrac{\beta}{2a_2}\right)}\ .$$

EJERCICIO 2

Bajo las hipótesis:

$$(9)\qquad \psi_2(t) = 0\ ,\quad h(x) = Ax + B\ ,\quad s(t) = \beta\sqrt{t}$$

el problema (3) tiene por solución:

$$(10)\quad \begin{cases} \theta_2(x,t) = Ax + B + C_1\sqrt{t}\ \text{ierfc}\left(\dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) + C_2\ \text{erfc}\left(\dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\ C_1 = \dfrac{-A\beta}{\text{ierfc}\left(\dfrac{\beta}{2a_2}\right)} \quad , \quad C_2 = \dfrac{-B}{\text{erfc}\left(\dfrac{\beta}{2a_2}\right)} \quad . \end{cases}$$

EJERCICIO 3.

Bajo la hipótesis $h(x) = 0$, el problema (3) tiene las soluciones siguientes (por simplicidad se usa $\theta = \theta_2$, $a = a_2$, $\psi = \psi_2$):

A) Caso $s(t) = \beta\sqrt{t}$:

i) $\theta(x,t) = \dfrac{C\exp\left(\dfrac{\beta^2}{2a^2}\right)}{\beta}\ \dfrac{x\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right)}{t\sqrt{t}}$ si $\psi(t) = \dfrac{C}{t}$

ii) $\theta(x,t) = C\exp\left(\dfrac{\beta^2}{4a^2}\right)\dfrac{\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right)}{\sqrt{t}}$ si $\psi(t) = \dfrac{C}{\sqrt{t}}$

B) Caso $s(t) = \beta t$:

i) $\theta(x,t) = C\ \text{erfc}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ si $\psi(t) = C\ \text{erfc}\left(\dfrac{\beta\sqrt{t}}{2a}\right)$

ii) $\theta(x,t) = \dfrac{C}{\sqrt{t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right)$ si $\psi(t) = \dfrac{C}{\sqrt{t}}\exp\left(-\dfrac{\beta^2t}{4a^2}\right)$

iii) $$\begin{cases} \theta(x,t) = C\exp\left[-\dfrac{\beta}{2a^2}(x-\beta t)\right]\ V(x,t) \quad , \\ V(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[\exp\left[-\dfrac{\beta}{2a^2}(x-\beta t)\right]\text{erfc}\left(\dfrac{x-\beta t}{2a\sqrt{t}} - \dfrac{\beta}{2a}\sqrt{t}\right) + \right. \\ \qquad \left. + \exp\left\{\dfrac{\beta}{2a^2}(x-\beta t\right]\text{erfc}\left(\dfrac{x-\beta t}{2a\sqrt{t}} + \dfrac{\beta}{2a}\sqrt{t}\right)\right] \quad \text{si} \quad \psi(t) = C \end{cases}$$

iv) $\theta(x,t) = C\exp\left[-\dfrac{\beta}{2a^2}(x-\beta t)\right]\displaystyle\int_0^t V(x,\tau)d\tau$ si $\psi(t) = Ct$

v) $\theta(x,t) = \dfrac{\pi C}{2}\exp\left[-\dfrac{\beta}{2a^2}(x-\beta t)\right]\displaystyle\int_0^t \dfrac{V(x,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau$ si $\psi(t) = \dfrac{C}{\sqrt{t}}$

C) Caso $s(t) = \beta t^{3/2}$:

i) $\theta(x,t) = \dfrac{Cx}{\beta t^{3/2}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right)$ si $\psi(t) = C\exp\left(-\dfrac{\beta^2t^2}{4a^2}\right)$.

II. LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR $u_{xx} = u_t$.

Sea $K(x,t;\xi,\tau)$ la función definida por:

$$(11)\qquad K(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] & \text{si} \quad t > \tau \\ 0 & \text{si} \quad t \leq \tau \end{cases}$$

conocida como la *solución fundamental* de la ecuación del calor, la cual goza de las propiedades siguientes:

LEMA 1:

i) K es una función C^∞ en las variables x,t excepto en el punto $(x = \xi\ ,\ t = \tau)$, satisface la ecuación del calor

$$(12)\qquad K_{xx} - K_t = 0$$

y la condición siguiente

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t;\xi,\tau)dx = 1 \quad .$$

ii) K es una función C^∞ en las variables ξ,τ excepto en el punto $(\xi = x\ ,\ \tau = t)$, satisface la ecuación adjunta del calor

$$(14)\qquad K_{\xi\xi} + K_\tau = 0$$

y las siguientes propiedades

$$(15)\qquad K_x = -K_\xi \quad , \quad K_t = -K_\tau \quad .$$

iii) Derivando un número cualquiera de veces la función K respecto de las variables x,t,ξ,τ se obtienen nuevas funciones $K^i(x,t;\xi,\tau)$ que tienen las mismas propiedades que la función K . Cada una de estas funciones consideradas como función de las variables x,t es una solución de la ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$, regular en todo el plano excepto en el punto $(x = \xi\ ,\ \tau = t)$; considerada como función de las variables ξ,τ es una solución de la ecuación adjunta del calor $u_{xx} + u_t = 0$, regular en todo el plano excepto en el punto $(\xi = x\ ,\ \tau = t)$. Además, todas estas funciones son idénticamente nulas para $t \leq \tau$.

DEMOSTRACION.

Toda derivada parcial de K , respecto de x,t , es una suma fini

ta de términos de la forma:

$$\frac{P(x,\xi)}{(t-\tau)^{n+\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right]$$

donde P es un polinomio y $n \in \mathbb{N}$. Esta expresión tiende a cero cuando $(t-\tau) \to 0^+$ siempre que $x-\xi$ no tienda también a cero.

El resto queda como EJERCICIO 4.

OBSERVACION 2.

De la solución fundamental K se pueden deducir por cuadraturas, nuevas integrales de la ecuación del calor. Sean $P(\xi,\tau)$ y $Q(\xi,\tau)$ dos funciones continuas cualesquiera de las coordenadas (ξ,τ) , las cuales se mueven a lo largo de una curva C . La integral curvilínea:

$$u(x,t) = \int_C K(x,t;\xi,\tau)\,[P(\xi,\tau)d\xi + Q(\xi,\tau)d\tau] \tag{16}$$

representa una integral de la ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$, la cual es regular, junto con todas sus derivadas parciales, en todo dominio D que no tenga ningún punto en común con la curva C ; más aún, si el punto $(x,t) \in D$, entonces se pueden aplicar las fórmulas habituales de derivación un número cualquiera de veces.

De acuerdo a la definición de K , para el cálculo de $u(x,t)$ se debe tomar la porción de C situado por debajo de la característica $t = cte$ pasando por el punto (x,t) , es decir $\tau < t$. Además, u es nula para todo punto (x,t) situado por debajo de la característica que pasa por el punto de C de ordenada mínima; también es nula para para todo punto situado en dicha característica que no pertenezca a C . Por otra parte, arriba de la característica que deja a C por debajo, u es una función holomorfa de las variables x,t .

Para analizar que sucede con $u(x,t)$ cuando el punto (x,t) se acerca a un punto de la curva C , se estudiarán dos casos (ver parágrafo siguiente):

(I) la curva C es un segmento de característica representado por el intervalo (a,b) con $a < b$.

(II) la curva C está representada por $\xi = s(\tau)$, donde s es una función continua en el intervalo (a,b) con $a < b$.

III. FÓRMULA DE POISSON Y DEL SALTO PARA LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL.

En primer lugar estudiaremos el Caso (I) en que la curva C es un segmento de característica $t = \tau$ representado por el intervalo (a,b), con $a < b$. Sea la siguiente integral definida:

$$u(x,t) = \int_a^b K(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi \tag{17}$$

donde φ es una función continua en (a,b). La función u satisface la ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$, es regular en todo punto que satisfaga $t > \tau$, es nula en todo punto debajo de la característica $t = \tau$, y en todo punto de esta característica fuera del segmento $[a,b]$ (es decir, para $x < a$ ó $x > b$). Solo resta estudiar cual es el límite de la expresión

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi \quad , \quad t > \tau \tag{18}$$

cuando el punto (x,t), con $t > \tau$, tiende hacia un punto perteneciente a $(a,b) \times \{\tau\}$. Para ello veremos, en primer lugar, el siguiente:

LEMA 2.

Sea:

$$I(t) = \int_a^b F(x) \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}} dx \quad , \tag{19}$$

donde F es una función continua o al menos integrable y acotada, teniendo a lo sumo discontinuidades de primera especie (saltos). Entonces se tienen los resultados:

$$\lim_{t \to 0^+} I(t) = \begin{cases} \text{(i)} & 0 & \text{si} \quad 0 < a < b \\ \text{(ii)} & \sqrt{\pi}\, F(0^+) & \text{si} \quad a = 0 < b \\ \text{(iii)} & -\sqrt{\pi}\, F(0^-) & \text{si} \quad b < a = 0 \\ \text{(iv)} & \sqrt{\pi}\,(F(0^+) + F(0^-)) & \text{si} \quad a < 0 < b \end{cases} \tag{20}$$

DEMOSTRACION.

i) Sea $M = \sup_{x \in [a,b]} |F(x)|$. Por lo tanto, se tiene que $|I(t)| \leq$

$\leq \frac{M}{\sqrt{t}} (b-a) \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$, lo cual tiende a cero cuando $t \to 0^+$.

ii) Sean β, η dos números que satisfagan $0 < \eta < \beta < b$ de manera

que $|F(x) - F(0^+)| \leq \eta$, $\forall\, x \in [0,\beta]$. Se puede elegir β pequeño de manera que η sea inferior a cualquier número dado. Se puede escribir

$$(21)\quad \begin{cases} I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) \quad , \quad \text{donde} \\ I_1(t) = F(0^+) \displaystyle\int_0^{\beta} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}}\, dt \quad , \quad I_3(t) = \int_{\beta}^{b} \frac{F(x)}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dt \\ I_2(t) = \displaystyle\int_0^{\beta} [F(x) - F(0^+)]\, \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}}\, dt \quad . \end{cases}$$

De acuerdo a la parte i), se tiene que $\lim_{t \to 0^+} I_3(t) = 0$. Haciendo en la expresión de I_1 el cambio de variable $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$, se obtiene:

$$I_1(t) = 2F(0^+) \int_0^{\beta/2\sqrt{t}} \exp(-z^2)dz \to \sqrt{\pi}\, F(0^+) \quad , \quad \text{cuando} \quad t \to 0^+ \quad .$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$|I_2(t)| \leq \eta \int_0^{\beta} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{\sqrt{t}}\, dx = 2\eta \int_0^{\beta/2\sqrt{t}} \exp(-z^2)dz \leq \eta\sqrt{\pi} < \varepsilon$$

eligiendo β de manera que $\eta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$, con lo cual se obtiene que $I(t) \to \sqrt{\pi}\, F(0^+)$, cuando $t \to 0^+$.

Para el caso (iii) se usa el resultado obtenido para (ii), y para el caso (iv) se utilizan los resultados de los dos casos anteriores para la descomposición siguiente: $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$.

Ahora veremos el estudio correspondiente a (18).

LEMA 3.

Si φ es continua en $[a,b]$ y si $u(x,t)$ está dada por (18), entonces se tiene:

i)

$$(22)\quad \lim_{\substack{(x,t) \to (x_0,\tau) \\ x = x_0,\, t > \tau}} u(x,t) = \begin{cases} \varphi(x_0) & \text{si} \quad x_0 \in (a,b) \\ \dfrac{\varphi(a)}{2} & \text{si} \quad x_0 = a \\ \dfrac{\varphi(b)}{2} & \text{si} \quad x_0 = b \end{cases}$$

ii)

(23) $$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_o,\tau)\\ t>\tau}} u(x,t) = \varphi(x_o)\ ,\ \forall\ x_o \in (a,b)$$ *(Fórmula de Poisson)*

Más aún, si x_o es uno de los extremos a ó b , el límite de la integral (18) depende de la forma como el punto (x,t) se acerca al punto límite (a,τ) ó (b,τ) .

DEMOSTRACION.

i) Se quiere hallar el límite de la integral

(24) $$u(x_o,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a-x_o}^{b-x_o} \frac{\varphi(x_o+\eta)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right]d\eta$$

cuando $t \to \tau^+$. Si $x_o \in (a,b)$, entonces $a - x_o < 0$ y $b - x_o > 0$ con lo cual el límite es $\varphi(x_o)$; si $x_o = a$ ó $x_o = b$, se obtiene $\frac{\varphi(a)}{2}$ ó $\frac{\varphi(b)}{2}$ respectivamente aplicando (20).

ii) Supongamos ahora que $(x,t) \to (x_o,\tau)$ de una manera cualquiera con $x_o \in (a,b)$. Se quiere pues hallar el límite de la integral

(25) $$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+\eta)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right]d\eta = I_1(x,t) + I_2(x,t),$$

donde:

(26)
$$\begin{cases} I_1(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x_o)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right]d\eta = \\ \qquad = \dfrac{\varphi(x_o)}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{b-x}{2\sqrt{t-\tau}}} \exp(-z^2)dz \quad , \\ I_2(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+\eta) - \varphi(x_o)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\tau)}\right]d\eta \quad . \end{cases}$$

Para la primera integral se tiene que $I_1(x,t) \to \varphi(x_o)$, cuando $(x,t) \to (x_o,\tau)$, con $x_o \in (a,b)$.

En cuanto a la segunda integral, se tiene que $|I_2(x,t)| \to 0$, cuando $(x,t) \to (x_o,\tau)$, con $x_o \in (a,b)$, usando la descomposición $\int_{a-x}^{b-x} = \int_{a-x}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b-x}$, donde $\varepsilon > 0$ pequeño . Para ello , sea

$\delta = \sup_{x \in (x_o-\epsilon\ ,\ x_o+\epsilon),\eta \in (-\epsilon,\epsilon)} |\varphi(x+\eta) - \varphi(x_o)|$, con lo cual el valor absoluto de la segunda integral es inferior a δ , y por lo tanto puede ser más pequeño que todo número positivo dado tomando ϵ suficientemente pequeño. Siendo ϵ elegido de esta manera, se demuestra que la primera y la tercera integral tienden a 0 , cuando $(x,t) \to (x_o,\tau)$, con $x_o \in (a,b)$ (EJERCICIO 5), obteniéndose de este modo la *fórmula de Poisson* (23), que en forma más explícita resulta ser:

$$(27) \qquad \lim_{\substack{(x,t) \to (x_o,\tau) \\ t > \tau}} \int_a^b \varphi(\xi)K(x,t;\xi,\tau)d\xi = \varphi(x_o) \quad , \quad \forall\, x_o \in (a,b) \ .$$

OBSERVACION 3.

Es importante observar que la presente demostración no puede aplicarse cuando el punto (x,t) tiende hacia uno de los puntos extremos (a,τ) ó (b,τ) , pues la segunda expresión de la integral $I_1(x,t)$ (26) está indeterminada cuando $x \to a$ $(x \to b)$ y $t \to \tau^+$ simultáneamente. El límite de esta integral depende de la manera como el punto (x,t) se acerque a (x_o,τ) con $x_o = a$ ó b . Para ello, analizaremos, por ejemplo, el caso $x_o = a$. Sabemos que $u(x,t)$ y $I_1(x,t)$ tienen igual límite cuando $(x,t) \to (a,\tau)$, siempre que $I_1(x,t)$ tenga límite.

Además, $I_1(x,t)$ puede descomponerse como sigue:

$$(28) \quad I_1(x,t) = \frac{\varphi(x_o)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}}}^{0} \exp(-z^2)dz + \frac{\varphi(x_o)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{b-x}{2\sqrt{t-\tau}}} \exp(-z^2)dz \ .$$

El segundo sumando tiende a $\frac{\varphi(x_o)}{2}$ cuando $(x,t) \to (a,\tau)$; en cambio, el primer sumando tiene límite si y sólo si $\frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}} \to -\lambda$ cuando $(x,t) \to (a,\tau)$, y en dicho caso el límite del primer sumando será: $\frac{\varphi(x_o)}{2}\,\mathrm{erf}(\lambda)$. Resumiendo, se tiene el siguiente resultado:

COROLARIO 4.

Si $\lim_{(x,t) \to (a,\tau)} \frac{a-x}{2\sqrt{t-\tau}} = -\lambda$, entonces

$$(29) \qquad \lim_{\substack{(x,t) \to (a,\tau) \\ t > \tau}} u(x,t) = \frac{\varphi(x_o)}{2}\,(1 + \mathrm{erf}(\lambda)) \ .$$

En caso contrario $u(x,t)$ no tiene límite.

Algo similar puede decirse para el caso $x_o = b$ (EJERCICIO 6).

OBSERVACION 4 [11].

Si φ es continua en $(-\infty, +\infty)$ de manera que $\varphi(\xi)\exp(-K\xi^2)$ sea acotada, entonces la integral definida

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi \tag{30}$$

es una solución de la ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$ que es holomorfa en la banda limitada por $t = \tau$ y $t = \tau + \frac{1}{4K}$, y tiende hacia $\varphi(x_o)$ cuando el punto $(x,t) \to (x_o,\tau)$, siendo este último resultado conocido también como *fórmula de Poisson*. Además, si $\varphi(\xi)\exp(-K\xi^2)$ es acotada para toda constante positiva K, entonces $u(x,y)$ es holomorfa en toda la región $t > \tau$. Lo mismo puede decirse si φ es acotada.

Por otra parte, si φ es discontinua en x_o, se tiene $\lim_{t \to \tau^+} u(x_o,t) = \varphi(x_o)$, en cambio no existe el límite de $u(x,t)$ cuando $(x,t) \to (x_o,\tau)$ con $t > \tau$.

Ahora estudiaremos el caso (11) en que la curva C está representada de la siguiente manera:

$$C \begin{cases} \xi = s(\tau) & , \text{ con } s \text{ función continua} \\ a < \tau < b & , \text{ con } a < b \ . \end{cases} \tag{31}$$

Sea la siguiente integral definida:

$$\Phi(x,t) = \int_C K(x,t;s(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t \leq a \end{cases} \tag{32}$$

donde φ es una función continua en $[a,b]$.

La función Φ satisface la ecuación del calor $\Phi_{xx} - \Phi_t = 0$, es de clase C^∞ en toda región del plano que no tenga ningún punto en común con la curva C, y es además continua cuando el punto (x,t) viene sobre la curva C, pues la integral (32) es uniformemente con-

vergente en un entorno de un punto cualquiera de este arco En efecto, sea $M = \sup_{\tau \in [a,b]} |\varphi(\tau)|$, con lo cual se tiene:

$$(33)\quad |\Phi(x,t) - \Phi(x,t_o)| \leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_o}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = M\sqrt{\frac{t-t_o}{\pi}} \quad , \quad a \leq t_o < t \leq b$$

que es pequeño con la diferencia $(t - t_o)$.

Otras propiedades que caracterizan a la función Φ son:

LEMA 5 [11].

i) Si $t > b$ entonces Φ es una función holomorfa de las dos variables (x,t).

ii) Si $t \in (a,b)$ entonces Φ es una función holomorfa de la variable x .

iii) Si $(x_o,t) \notin C$, $\forall\, t \in [a,b]$, entonces $\Phi(x_o,t)$ es una función de clase C^∞ en (a,b) , pero no es, en general, una función holomorfa de la variable t en el caso en que φ sea sólo una función continua cualquiera. Más aún, llamando $f(t) = \Phi(x_o,t)$, ésta resulta ser una *función de clase 2 de Holmgren en* (a,b) , es decir:

$$(34)\quad \begin{cases} a) & f \in C^\infty(a,b) \\ b) & \exists\, M, r > 0 \,/\quad |f^{(n)}(t)| < M\,\dfrac{(2n)!}{r^n} \quad , \quad \forall\, t \in (a,b) \end{cases} .$$

OBSERVACION 5.

El concepto de función de clase 2 fue introducido por Holmgren en sus trabajos [12,13]. Por otra parte, la *clase* 1 está formada por las *funciones holomorfas*, las cuales son también de clase 2.

Por otra parte, veremos que Φ_x es discontinua cuando el punto (x,t) atraviesa la curva C , obteniéndose como consecuencia la importante *fórmula del salto* (43).

La derivada de Φ respecto de x está dada por:

$$(35)\quad \begin{cases} \Phi_x(x,t) = \displaystyle\int_a^t K_x(x,t;s(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = -\frac{1}{2}\Psi(x,t) \\ \Psi(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_a^t \varphi(\tau)\,\frac{x-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau \end{cases} .$$

La función Ψ es una solución de la ecuación del calor $\Psi_{xx} - \Psi_t = 0$ y regular en toda la banda $a < t < b$ excepto sobre la curva C. Se puede extender su definición a todo el plano (x,t) tomando $\varphi(\tau) = 0$, $\forall\ \tau > b$. De esta forma resulta ser una función holomorfa de la variable x para cada $t = cte$. Además, si $(x_o,t) \notin C$, $\forall\ t \in [a,b]$, entonces $\Psi(x_o,t)$ es una función de t de clase 2 de Holmgren en (a,b).

A continuación veremos una propiedad auxiliar. Sea F la función definida por:

$$F(x,t) = \int_a^t \frac{x-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau \quad , \tag{36}$$

integral que tiene sentido cuando $(x,t) \notin C$, es decir para $x = s(t)$ con $t \in [a,b]$; por otra parte veremos que $F(x,t)$ tiende hacia límites diferentes según que el punto (x,t) esté a la derecha o a la izquierda de la curva C.

LEMA 6.

Si $s \in C^1(a,b)$, entonces se tiene el resultado siguiente:

$$\lim_{x \to s(t)^{\pm}} F(x,t) = F(s(t),t) \pm 1 \tag{37}$$

donde $+(-)$ significa que el punto x se mueve por la derecha (izquierda) de $s(t)$ para cada $t \in (a,b)$.

DEMOSTRACION. Sea

$$F_1(x,t) = \int_a^t -2\frac{s'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left|-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right| d\tau \quad . \tag{38}$$

que resulta ser continua sobre la curva C por ser una integral que tiene la forma ya estudiada en (32).

Además, haciendo los cambios de variables $z = \frac{x-s(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}$ y $z = \frac{s(t)-s(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}$ se obtienen respectivamente:

$$F(x,t) + F_1(x,t) = \int_{\frac{x-s(a)}{2\sqrt{t-a}}}^{+\infty} 4\exp(-z^2)dz \quad , \tag{39}$$

$$(40)\qquad F(s(t),t) + F_1(s(t),t) = \int_{\frac{s(t)-s(a)}{2\sqrt{t-a}}}^{0} 4\exp(-z^2)dz \quad .$$

Pasando al límite cuando $x \to s(t)^{\pm}$ y teniendo en cuenta (39) y (40) y que F_1 es continua, se deduce que:

$$\lim_{x \to s(t)^{\pm}} F(x,t) - F(s(t),t) = 4\int_0^{\pm\infty} \exp(-z^2)dz = \pm 2\sqrt{\pi}$$

que resulta ser (37), resultado que en forma más explícita se reduce a:

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\lim_{x \to s(t)^{\pm}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \frac{x-s(t)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{s(t)-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(s(t)-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau \pm 1 \quad . \end{aligned}$$

Esta última expresión es un caso particular de la conocida fórmula del salto que obtendremos a continuación.

LEMA 7 [11].

Si $s \in C^1(a,b)$ y φ es Lipschitz en (a,b) entonces se tiene la siguiente *fórmula del salto*:

$$(42)\qquad \begin{aligned} \lim_{x \to s(t)^{\pm}} \Psi(x,t) &= \pm\varphi(t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t \varphi(\tau) \frac{s(t)-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{(s(t)-s(\tau))^2}{4(t-\tau)}\right]d\tau \quad . \end{aligned}$$

que resulta ser equivalente a la siguiente expresión:

$$(43)\qquad \begin{aligned} &\lim_{x \to s(t)^{\pm}} \int_a^t \varphi(\tau)K_x(x,t;s(\tau),\tau)d\tau = \\ &= \mp\frac{\varphi(t)}{2} + \int_a^t \varphi(\tau)K_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau \quad . \end{aligned}$$

DEMOSTRACION. (EJERCICIO 7)

Utilizar la descomposición siguiente:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^t [\varphi(\tau) - \varphi(t)] \frac{x - s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x - s(\tau))^2}{(t - \tau)}\right]d\tau +$$

$$+\frac{\varphi(t)}{2\sqrt{\pi}}\int_a^t \frac{x - s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x - s(\tau))^2}{4(t - t)}\right]d\tau$$

y aplicar el resultado anterior al segundo sumando para obtener (42).

OBSERVACION 6.

En [7,8], la fórmula del salto es obtenida bajo las hipótesis:

(44) $\varphi \in C^0(a,b)$, s Lipschitz en (a,b)

las cuales son más débiles que las exigidas en el Lema 7 pero con una demostración muchísimo más laboriosa.

COROLARIO 8.

Si la curva C es un segmento paralelo al eje t ($s(t) \equiv x_o$, $\forall\ t \in (a,b)$) , entonces la integral del segundo miembro en (42) es nula y por lo tanto se tiene:

(45) $$\lim_{x \to x_o^{\pm}} \int_a^t \varphi(\tau) K_x(x,t;x_o,\tau)d\tau = \mp\frac{\varphi(t)}{2} \quad .$$

IV. ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA FORMULA DE GREEN. ESTUDIO DE LA UNICIDAD.

Sean:

(46) $$\begin{cases} \mathcal{L}(v) = v_{xx} - v_t : & \textit{operador del calor,} \\ \mathcal{L}^*(v) = v_{xx} + v_t : & \textit{operador adjunto del calor.} \end{cases}$$

LEMA 9.

Si u,v son dos funciones regulares en un dominio D del plano x,t cuya frontera es ∂D , entonces se tiene la *fórmula de Green* siguiente:

(47) $$\iint_D [v\,\mathcal{L}(u) - u\,\mathcal{L}^*(v)]dx\,dt = \oint_{\partial D} uv\,dx + (vu_x - uv_x)dt \quad .$$

DEMOSTRACION.

Se utiliza el teorema de Green en el plano teniendo en cuenta la igualdad:

(48) $$v\,\mathcal{L}(u) - u\,\mathcal{L}^*(v) = (vu_x - uv_x)_x - (uv)_t \quad .$$

COROLARIO 10 (EJERCICIO 7).

1) Si $\mathcal{L}(u) = 0$ y $\mathcal{L}^*(v) = 0$, entonces se tiene:

$$(49) \qquad \oint_{\partial D} uv\,dx + (v\,u_x - u\,v_x)dt = 0 \quad .$$

Casos particulares para $v = 1, x, x^2 - 2t$ se obtienen respectivamente:

$$(50) \quad \begin{cases} (i) \quad \oint_{\partial D} u\,dx + u_x\,dt = 0 \quad , \quad (ii) \quad \oint_{\partial D} xu\,dx + (x\,u_x - u)dt = 0 \\ (iii) \quad \oint_{\partial D} u(x^2-2t)dx + [(x^2-2t)u_x - 2x\,u]dt = 0 \quad . \end{cases}$$

2) Si $\mathscr{L}(u) = 0$, $v = 1$ y se toma la relación de Green para u^2 en tonces se tiene:

$$(51) \qquad 2 \iint_D u_x^2\,dx\,dt = \oint_{\partial D} u^2\,dx + 2\,u u_x\,dt \quad .$$

Como una consecuencia importante de (51) se deduce la unicidad en el problema de frontera móvil siguiente:

$$(52) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en} \quad D = \{(x,t)/s_1(t) < x < s_2(t) \quad , \quad a < t < b\} \\ u(x,0) = h(x) \quad , \quad s_1(a) \le x \le s_2(a) \\ u(s_2(t),t) = f_2(t) \quad , \quad a < t < b \\ u(s_1(t),t) = f_1(t) \quad , \quad a < t < b \end{cases}$$

donde f_1, f_2, h son funciones continuas y s_1, s_2 son funciones Lipschitz con $s_1 < s_2$ (hipótesis bajo las cuales veremos que existirá solución).

LEMA 11.

Si el problema (52) tiene soluciones regulares en D , entonces todas coinciden.

DEMOSTRACION.

Sean u_1 y u_2 dos soluciones regulares de (52). Sea $z = u_2 - u_1$ que satisface $\mathscr{L}(z) = 0$ en D y $z/\partial_p D = 0$ en la frontera parabólica $\partial_p D$ de D . Sea $P = (x_o, t_o) \in D$ y sean $P_2 = (s_2(t_o), t_o)$ y $P_1 = (s_1(t_o), t_o)$. Consideremos como D' el dominio $D \cap \{t < t_o\}$. Entonces, utilizando (51) para z y el conjunto D' , se tiene:

$$(53) \qquad 2 \iint_{D'} z_x^2 \, dx \, dt + \int_{s_1(t_0)}^{s_2(t_0)} z^2(x,t_0)dx = 0 \quad ,$$

con lo cual $z \equiv 0$ en $\overline{D'}$. Como el punto (x_0,t_0) es arbitrario en D , se obtiene la unicidad para el problema (52).

EJERCICIO 8.

Demostrar la unicidad en el problema (52) utilizando el principio del máximo (ver Cursillo C2). Este método, consistente en utilizar el hecho de que la función z (ver demostración del Lema anterior) no puede tener ni máximo ni mínimo en el interior de D , era ya conocido a principios de siglo (ver [9, p. 372].

OBSERVACION 7.

Un tercer método para demostrar la unicidad de soluciones regulares en el problema (52) ha sido utilizado. Sean D y z como en el Lema 11. Sea la integral

$$(54) \qquad J(t) = \frac{1}{2} \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z^2(x,t)dx \quad , \quad t \in [a,b] \quad ,$$

realizada sobre el segmento $(s_1(t),s_2(t))$. Entonces, se tiene:

$$(55) \qquad \begin{cases} \dfrac{dJ}{dt}(t) = \displaystyle\int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z z_t \, dx = \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z \, z_{xx} \, dx = \\ \qquad = -\displaystyle\int_{s_1(t)}^{s_2(t)} z_x^2 \, dx \le 0 \quad , \quad \forall \, t \in (a,b) \quad . \end{cases}$$

Como $z(x,a) = 0$, $\forall \, x \in [s_1(a) , s_2(a)]$, se obtiene $J(a) = 0$ y por lo tanto $J(t) \le 0$, $\forall \, t \in [a,b]$. Por hipótesis J es no negativa, con lo cual $J \equiv 0$ en $[a,b]$. De la continuidad de z se deduce que $z \equiv 0$, de donde surge la unicidad del problema (52).

OBSERVACION 8.

Siempre hemos supuesto que las soluciones son *regulares* (hipótesis de continuidad necesarias para que los métodos y procedimientos utilizados sean aplicables). Un análisis de las hipótesis para que cada uno de los tres métodos utilizados para la demostración de la unicidad de solución en (52) sea posible, está realizado en la conferencia [3].

los inconvenientes surgen por la existencia de las llamadas *soluciones singulares*; éstas son aquellas funciones, soluciones de la ecuación del calor, que tienden a cero cuando uno se acerca a la frontera normalmente, sin ser ellas mismas idénticamente nulas. Por ejemplo, la función

$$\psi(x,t) = \frac{x}{2t\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad . \tag{56}$$

es una solución singular para la ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$, en el dominio $x > 0$, $t > 0$. Obsérvese que ψ no es continua en $(0,0)$.

OBSERVACION 9.

Un nuevo método, consistente en aplicar el Teorema de punto fijo de Banach, ha sido utilizado para probar la unicidad (y por ende, la existencia) de solución en un problema de frontera móvil con condiciones de contorno no-lineales [5] (ver el Ejemplo 5, que será tratado más adelante).

LEMA 12.

Sea D el dominio definido en (52) y sean

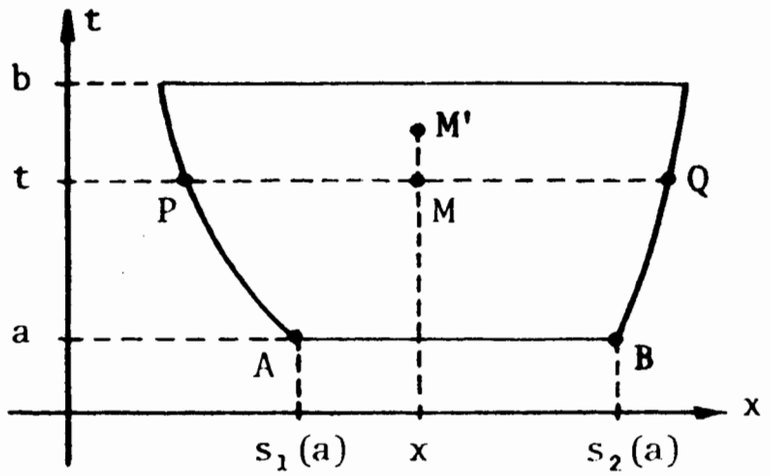
$$\begin{cases} D_t = \{(x,\tau) / s_1(\tau) < x < s_2(\tau) \ , \ a < \tau < t\} \ , \quad t \in (a,b) \\ A = (s_1(a),a) \ , \qquad B = (s_2(a),a) \\ P = (s_1(t),t) \ , \qquad Q = (s_2(t),t) \\ \partial_p D_t = \overset{\frown}{PABQ} \ : \text{ frontera parabólica de } D_t \\ \partial D_t = \partial_p D_t \cup \overset{\frown}{QP} \ : \text{ frontera de } D_t \ . \end{cases} \tag{57}$$

Si u es una solución regular de la ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$ en D , entonces se tiene para u la representación integral siguiente:

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\int_{\partial_p D_t} K(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi + \\ \qquad + \left[K(x,t;\xi,\tau)u_\xi(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)K_\xi(x,t;\xi,\tau)\right]d\tau \ . \end{cases} \tag{58}$$

DEMOSTRACION.

Sean $M = (x,t) \in D$ y $M'(x,t+h) \in D$ con $h > 0$ destinado a tender a 0 . Si se utiliza la fórmula (47) tomando $u = u(x,t)$ (que satisface la ecuación del calor $\mathcal{L}(u) = 0$) , $v = K(x,t+h;\xi,\tau)$ (que



satisface la ecuación adjunta del calor $\mathscr{L}^*(v) = 0$) y se reemplazan las variables x,t por las ξ,τ entonces se obtiene

$$(59)\qquad \int_{PQ} u(\xi,\tau)K(x,t+h;\xi,t)d\xi = \int_{PA\,BQ} uv\,d\xi + (v\,u_\xi - u\,v_\xi)d\tau \quad .$$

El primer miembro de (59) tiene por límite $u(x,t)$ cuando $h \to 0^+$ pues $s_1(t) < x < s_2(t)$; en cambio el límite del segundo miembro de (59) se obtiene rápidamente por continuidad, obteniéndose de este modo (58).

OBSERVACION 10.

La fórmula (59) no da la solución al problema de contorno (52) pues el segundo miembro no puede ser calculado si no se conoce simultáneamente u y u_ξ a lo largo de las curvas s_1 y s_2 . Sin embargo , se puede eliminar u_ξ sobre toda porción de contorno compuesto de un segmento de recta (ver [11, p. 321]).

De la solución fundamental K se definen:

$$(60)\quad \begin{cases} G(x,t;\xi,\tau) = K(x,t;\xi,\tau) - K(-x,t;\xi,\tau) : \textit{Función de Green} \text{ en } x > 0 \\ N(x,t;\xi,\tau) = K(x,t;\xi,\tau) + K(-x,t;\xi,\tau) : \textit{Función de Neumann} \text{ en } x > 0 \end{cases}$$

las cuales tienen las siguientes propiedades:

EJERCICIO 9.

$$(61)\quad \begin{cases} \text{i)}\ G_{\xi\xi} + G_\tau = 0 \ , & \text{ii)}\ N_{\xi\xi} + N_\tau = 0 \ , & \text{iii)}\ G_x = -N_\xi \\ \text{iv)}\ N_x = -G_\xi \ , & \text{v)}\ G(x,t;0,\tau) = 0 \ , & \text{vi)}\ G(0,t;\xi,\tau) = 0 \\ \text{vii)}\ G_\xi(0,t;0,\tau) = 0 & & \text{viii)}\ N_\xi(x,t;0,\tau) = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 10.

Si $u = u(\xi,\tau)$ satisface $u_{\xi\xi} - u_\tau = 0$, entonces se tienen las siguientes *identidades de Green:*

$$(62)\qquad \begin{cases} \text{i)} & (G u_\xi - u G_\xi)_\xi - (G u)_\tau = 0 \\ \text{ii)} & (N u_\xi - u N_\xi)_\xi - (N u)_\tau = 0 \end{cases}$$

las cuales serán útiles para problemas con condición de contorno tipo Dirichlet y Neumann respectivamente.

EJERCICIO 11.

1) Si u es una solución regular del problema

$$(63)\qquad \begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \quad , & 0 < x < s(t) \quad , & t > 0 \\ \text{ii)} & u(x,0) = h(x) \quad , & 0 \le x \le b = s(0) & \\ \text{iii)} & u(s(t),t) = 0 & , & t > 0 \\ \text{iv)} & u(0,t) = f(t) & & t > 0 \end{cases}$$

se integra la identidad de Green (62 i) en el dominio $D_{t,\varepsilon} = \{(\xi,\tau) / 0 < \xi < s(\tau) \ , \ \varepsilon < \xi < t-\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ y se realiza el límite cuando $\varepsilon \to 0$, entonces se obtiene la siguiente representación integral:

$$(64)\qquad \begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\int_0^b h(\xi) G(x,t;\xi,0)\,d\xi + \int_0^t f(\tau) G_\xi(x,t;0,\tau)\,d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t u_\xi(s(\tau),\tau) G(x,t;s(\tau)\,d\tau \quad . \end{cases}$$

2) Si u es una solución regular del problema (63 bis) (problema (63) con la condición (63 iv bis) en lugar de la (63 iv) , donde

$$(63\text{ iv bis})\qquad u_x(0,t) = g(t) \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

se integra la identidad de Green (62 ii) en el dominio $D_{t,\varepsilon}$ y se realiza el límite $\varepsilon \to 0$, entonces se obtiene la siguiente representación integral:

$$(65)\qquad \begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\int_0^t h(\xi) N(x,t;\xi,0)\,d\xi - \int_0^t g(\tau) N(x,t;0,\tau)\,d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_n^t u_\xi(s(\tau),\tau) N(x,t;s(\tau),\tau)\,d\tau \quad . \end{cases}$$

OBSERVACION 11.

Las fórmulas (64) y (65) serán utilizadas en el problema de Stefan a una fase para obtener la ecuación integral equivalente para la nueva función incógnita $v(t) = u_x(s(t),t)$ (conocido como *método de Friedman* [7]) con condiciones de contorno (63 iv) y (63 iv bis)(ver Cursillo C5).

Como una consecuencia de todo lo visto anteriormente se deducen las siguientes propiedades [9-14].

LEMA 13.

Si u es una solución regular de la ecuación del calor $u_{xx} - u_t = 0$ en un dominio D, entonces:

i) Todas las derivadas parciales de u son regulares en D.

ii) A lo largo de un segmento $t = cte$, interior a D, u es una función holomorfa en la variable x.

iii) A lo largo de un segmento $x = cte$, interior a D, u es una función de clase 2 de Holmgren en la variable t (lo mismo puede decirse para u_x).

iv) Inversamente, dadas dos funciones $\varphi = \varphi(t)$ y $\psi = \psi(t)$ de clase 2 de Holmgren en (a,b), existe una única solución de la ecuación del calor que satisface las condiciones de Cauchy para $x = x_o$:

$$u(x_o,t) = \varphi(t) \quad , \quad u_x(x_o,t) = \psi(t) \tag{66}$$

y que es regular en el rectángulo limitado por las rectas $t = a$, $t = b$, $x = x_o \pm r$, con $r > 0$ convenientemente elegido. La única solución está dada por la serie uniformemente convergente:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\varphi^{(n)}(t)}{(2n)!} (x-x_o)^{2n} + \frac{\psi^{(n)}(t)}{(2n+1)!} (x-x_o)^{2n+1} \right] . \tag{67}$$

v) La última propiedad vale también si se toma un arco de curva AB, representada por $x = s(t)$, holomorfa en t en el intervalo (a,b), en lugar de un segmento paralelo al eje t. Si u es una solución regular de la ecuación $u_{xx} - u_t = 0$ en un dominio D que contiene al arco AB en su interior, entonces la función $u(s(t),t)$ es de clase 2 de Holmgren en (a,b).

Inversamente, dadas dos funciones φ y ψ de clase 2 de Holmgren en (a,b), existe una única solución de la ecuación del calor que resulta ser regular en un dominio que contiene al arco AB y es limitado por $t = a$, $t = b$, $x = s(t) \pm r$, con $r > 0$ convenientemente elegido, y que satisface a lo largo de AB las

condiciones de Cauchy siguientes:

(68) $$u(s(t),t) = \varphi(t) \quad , \quad u_x(s(t),t) = \psi(t) \quad .$$

OBSERVACION 12.

Los últimos resultados resultan útiles en el estudio del llamado *problema inverso de Stefan* (ver Cursillo C4).

V. ALGUNOS EJEMPLOS DE EXISTENCIA DE SOLUCION.

Se analizará aquí la existencia de solución de algunos problemas de frontera móvil para la ecuación del calor, dados en una formulación bastante general, a través de las *ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie* [11, cap. 30], teoría que asegurará la existencia de solución bajo las hipótesis que se darán. Conviene recalcar que se supone que *las soluciones son representables por los potenciales de calor a través de la solución fundamental*, el cual no es el caso de las soluciones singulares (ver [3]). Por otra parte, la unicidad de solución se obtiene como consecuencia de algunos de los métodos vistos anteriormente. Se cosiderarán los siguientes problemas:

1)
$$\text{(69)} \quad \begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en} \quad D = \{(x,t) \,/\, s(t) < x \,,\, a < t < b\} \\ \text{ii)} & u(x,a) = 0 \quad , \quad x \geq s(a) \\ \text{iii)} & u(s(t),t) = f(t) \quad , \quad a < t < b \end{cases}$$

donde $f \in C^0(a,b)$ y s es una función Lipschitz en (a,b) .

Para la existencia de solución de (69), se representará a u como una integral del tipo (35), analizada anteriormente, de la forma siguiente:

(70) $$u(x,t) = \int_a^t \lambda(\tau) K_x(x,t;s(\tau),\tau)\, d\tau$$

donde λ es una función continua a ser determinada en (a,b) .

La función u , definida por (70), es una solución regular en D de (69 i) , que verifica además la condición (69 ii). Para satisfacer la restante condición (69 iii) se utiliza la correspondiente fórmula del salto cuando $x \to s(t)^+$, obteniéndose de este modo la ecuación integral de Volterra de segunda especie siguiente:

$$(71) \quad -\frac{\lambda(t)}{2} + \int_a^t \lambda(\tau) K_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau = f(t) \quad , \quad t \in (a,b) \quad .$$

que determinará la función λ .

COROLARIO 14.

Si en el ejemplo 1), la frontera móvil es fija, es decir $s(t) \equiv x_o$, $\forall\, t \in (a,b)$, entonces la ecuación integral (71) puede resolverse inmediatamente teniendo por solución a $\lambda(t) = -2f(t)$. Es decir que

$$(72) \quad u(x,t) = -2\int_a^t f(t)K_x(x,t;x_o,\tau)d\tau$$

es la solución del problema:

$$(73) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 \quad , & x > x_o \ , \ t > a \\ u(x,a) = 0 \quad , & x \geq x_o \\ u(x_o,t) = f(t), & t > a \end{cases}$$

2)

$$(74) \quad \begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \ \text{ en } \ D = \{(x,t) \,/\, s_2(t) < x < s_1(t) \ , \ a < t < b\} \\ \text{ii)} & u(x,a) = 0 \ , \ s_2(0) \leq x \leq s_1(0) \\ \text{iii)} & u(s_1(t),t) = f_1(t) \ , \ a < t < b \\ \text{iv)} & u(s_2(t),t) = f_2(t) \ , \ a < t < b \end{cases}$$

donde s_1, s_2 y f_1, f_2 son funciones Lipschitz y continuas en (a,b) respectivamente, con $s_1 < s_2$. Sin pérdida de generalidad se ha supuesto que la temperatura inicial es nula.

Para la existencia de solución de (74), se tratará de representar a u por una suma de dos integrales del tipo (35), analizadas anteriormente, de la forma siguiente:

$$(75) \quad u(x,t) = \int_a^t \lambda_1(\tau)K_x(x,t;s_1(\tau),\tau)d\tau + \int_a^t \lambda_2(\tau)K_x(x,t;s_2(\tau),\tau)d\tau$$

donde λ_1, λ_2 son dos funciones continuas a ser determinadas en el intervalo (a,b) .

La función u , derinida por (75), es una solución regular en D de (75 i) , que verifica además la condición (75 ii) . Para satisfacer

las dos restantes condiciones (75 iii-iv) se utiliza la correspondiente fórmula del salto cuando $x \to s_1^+(t)$ y $x \to s_2^-(t)$ respectivamente. El sistema de ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie que se obtiene es el siguiente:

$$(76)\quad \begin{cases} -\dfrac{\lambda_1(t)}{2} + \displaystyle\int_a^t \lambda_1(\tau)K_x(s_1(t),t;s_1(\tau),\tau),\tau)d\tau + \\ + \displaystyle\int_a^t \lambda_2(\tau)K_x(s_1(t),t;s_2(\tau),\tau)d\tau = f_1(t) \\ \displaystyle\int_a^t \lambda_1(\tau)\ K_x(s_2(t),t;s_1(\tau),\tau)d\tau + \dfrac{\lambda_2(t)}{2} + \\ + \displaystyle\int_a^t \lambda_2(\tau)K_x(s_2(t),t;s_2(\tau),\tau)d\tau = f_2(t) \end{cases}$$

que determinará las funciones λ_1, λ_2 .

EJERCICIO 12.

Resolver los problemas (69) y (74) considerando que la temperatura inicial es no nula, es decir:

(69 ii bis) $u(x,0) = h(x)$, $x \geq s(a)$ en el problema (69) ,

(74 ii bis) $u(x,0) = h(x)$, $s_1(a) \leq x \leq s_2(a)$ en el problema (74) .

3)

$$(77)\quad \begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en} \quad D = \{(x,t) / 0 < x < s(t) , 0 < t < T\} \\ \text{ii)} & u(x,0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b = s(0) \\ \text{iii)} & u(s(t),t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iv)} & u_x(0,t) = g(t) \quad , \quad 0 < t < T \end{cases}$$

donde $h \in C^0[0,b]$, $g \in C^0(0,T)$ y s es una función Lipschitz en $(0,T)$ con $b > 0$.

Para la existencia de solución de (77), se representará a u de la manera siguiente:

$$(78)\quad \begin{cases} u(x,t) = H(x,t) + \displaystyle\int_0^t K(x,t;0,\tau)\lambda_1(\tau)d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t K(x,t;s(\tau),\tau)\lambda_2(\tau)d\tau \\ \text{con} \quad H(x,t) = \displaystyle\int_0^t K(x,t;\xi,0)h(\xi)d\xi \end{cases}$$

donde λ_1, λ_2 son dos funciones continuas a ser determinadas en el intervalo $(0,T)$.

La función u , definida por (78), satisface (77 i, ii). De las dos condiciones restantes resulta el sistema de ecuaciones integrales siguiente:

$$(79)\quad \begin{cases} \text{i)} & -\frac{1}{2}\lambda_1(t) + \int_0^t K_x(0,t;s(\tau),\tau)\lambda_2(\tau)d\tau = g(t) - H_x(0,t) \quad , \\ \text{ii)} & \int_0^t K(s(t),t;0,\tau)\lambda_1(\tau)d\tau + \int_0^t K(s(t),t;s(\tau),\tau)\lambda_2(\tau)d\tau = \\ & \qquad = -H(s(t),t) \quad . \end{cases}$$

Verificar que (79 i, ii) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie (79 i, ii bis) (EJERCICIO 13), (ver [2]), donde:

$$(79\ \text{ii bis})\quad \begin{cases} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k_1(t,\tau)\lambda_1(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k_2(t,\tau)\lambda_2(\tau)d\tau + \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda_2(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{H(s(\tau),\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \end{cases}$$

con

$$(80)\quad \begin{cases} k_1(t,\tau) = \int_\tau^t \frac{K(s(y),y;0,\tau)}{\sqrt{t-y}}\,dy \quad , \\ k_2(t,\tau) = \int_\tau^t \frac{K(s(y),y;s(\tau),\tau)}{\sqrt{t-y}}\,dy \end{cases}$$

sistema que determinará las funciones λ_1, λ_2 .

Más aún, en [2] se demuestra que si h verifica además la condición

$$(81)\qquad \exists N > 0 \ / \ 0 \le h(x) \le N(b-x) \quad , \quad \forall x \in [0,b]$$

entonces $u_x(s(t),t)$ existe y es continuo en $(0,T]$. Este resultado será útil en el estudio teórico del problema de Stefan a una fase (ver Cursillo C5).

EJERCICIO 14.

i) Hallar la solución del problema

$$(82)\quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 \quad , & x > s(t) \quad , & 0 < t < T \\ u(x,0) = 0 \quad , & x \ge s(0) & \\ u_x(s(t),t) = 0 & & 0 < t < T \end{cases}$$

donde $g \in C^0(0,T)$ y s es una función Lipschitz en $(0,T)$, mediante una representación integral para u del tipo (32).

ii) Verificar que, en el caso $s \equiv 0$ en $[0,t]$, la solución del problema (82) viene dada por:

$$u(x,t) = -2\int_0^t g(\tau)K(x,t;0,\tau)d\tau \quad . \tag{83}$$

Más aún, si $g(t) = g_o$ en $(0,T)$, entonces se tiene:

$$u(x,t) = -2\, g_o \sqrt{t}\ \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \tag{84}$$

iii) Hallar la solución de (82) para el caso en que se tenga

$$u(x,0) = h(x) \quad , \quad x \geq s(0) \tag{85}$$

donde $h \in C^0[s(0), +\infty)$.

4)

$$\begin{cases} \text{i)} & u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en} \quad D = \{(x,t) \,/\, 0 < x < s(t)\ ,\ 0 < t < T\} \\ \text{ii)} & u(x,0) = h(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq b = s(0) \\ \text{iii)} & u(s(t),t) = \chi(t) \quad 0 < t < T \\ \text{iv)} & u_x(0,t) = g(t) \quad 0 < t < T \end{cases} \tag{86}$$

con $h \in C^1[0,b]$, $\chi \in C^0[0,T]$, $g \in C^0[0,T]$, s es Lipschitziana en $[0,T]$, con $h(0) = 0$, $h(b) = \chi(0)$ y $b > 0$. En este problema que es una variante del anterior (77) la solución será representada por otros sumandos que darán directamente un sistema de ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie [4,5].

La solución de (86) puede representarse de la manera siguiente:

EJERCICIO 15.

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\int_0^b h(x)K(x,t;\xi,0)d\xi + \int_0^t \lambda_1(\tau)K(x,t;0,\tau)d\tau + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \lambda_2(\tau)K_x(x,t;s(\tau),\tau)d\tau \end{cases} \tag{87}$$

donde λ_1, λ_2 satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie:

$$(88)\quad \begin{cases} \lambda_1(\tau) = \displaystyle\int_0^t K_{12}(t,\tau)\lambda_2(\tau)d\tau + f_1(t) \quad , \\ \lambda_2(\tau) = \displaystyle\int^t K_{21}(t,\tau)\lambda_1(\tau)d\tau + \int_0^t K_{22}(t,\tau)\lambda_2(\tau)d\tau + f_2(\tau) \quad , \end{cases}$$

con:

$$(89)\quad \begin{cases} K_{12}(t,\tau) = 2K(0,t;s(\tau),\tau)\left[\left(\dfrac{s(\tau)}{2(t-\tau)}\right)^2 - \dfrac{1}{2(t-\tau)}\right] \quad , \\ K_{21}(t,\tau) = -\ 2K(s(t),t;0,\tau) \quad , \\ K_{22}(t,\tau) = K(s(t),t;s(\tau),\tau)\ \dfrac{s(t)\ -\ s(\tau)}{t\ -\ \tau} \\ f_1(t) = -\ \dfrac{h(b)}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\ \dfrac{b^2}{4t}\right) + 2\displaystyle\int_0^b h'(\xi)K(0,t;\xi,0)d\xi - 2g(t) \quad , \\ f_2(t) = -\ 2\displaystyle\int_0^b h(\xi)K(s(t),t;\xi,0)d\xi + 2\chi(t) \quad . \end{cases}$$

A continuación se verá una aplicación del Ejemplo 4) al problema no-lineal siguiente:

5)

$$(90)\quad \begin{cases} \text{i)} \quad u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{en} \quad D = \{(x,t)\ /\ 0 < x < s(t)\ ,\ 0 < t < T\} \\ \text{ii)} \quad u(x,0) = h(x) \quad , \quad 0 \le x \le b = s(0) \\ \text{iii)} \quad u(s(t),t) = \chi(t) \quad , \quad 0 < t < T \\ \text{iv)} \quad u_x(0,t) = G(u(0,t),t) \quad , \quad 0 < t < T \end{cases}$$

donde $h \in C^1[0,b]$, $\chi \in C^0[0,T]$, $G \in C^0(-\infty,+\infty) \times [0,T]$, s es Lipschitziana en $[0,T]$, con $h(0) = 0$, $h(b) = \chi(0)$ y $b > 0$.

Se considera el siguiente operador:

$$(91)\qquad F : B_R \to B_R \ /\ F(y) = z$$

donde

$$(92)\quad \begin{cases} B_R = \{y \in C^0[0,T]\ /\ \|y\| = \max\limits_{0 \le t \le T} |y(t)| \le R\} \\ z(t) = v(0,t) \ \text{ con } \ v = v(x,t) \ \text{ única solución de (82) tomando } \ g(t) = G(y(t),t) \quad . \end{cases}$$

En [4] se demuestra que para un $R > 0$ oportuno se puede aplicar el teorema de punto fijo de Schauder, con lo cual se garantiza la exis

tencia de solución en (90)(Ejercicio 16).

EJERCICIO 17.

Si además $G = G(\xi,t)$ es una función monótona creciente de $\xi \in (-\infty,+\infty)$ entonces aplicando el principio del máximo el problema (90) admite a lo sumo una solución.

OBSERVACION 13.

En [5] se demuestra que bajo ciertas hipótesis complementarias sobre G, la aplicación F es una contracción en $[0,T]$ para un dado T convenientemente pequeño, llamado T_o. La constante de contracción $k(T_o)$ y el mismo T_o no dependen del dato inicial con lo cual la demostración puede repetirse en $\left[n\,T_o, (n+1)\,T_o\right]$ $(n \in \mathbb{N})$ y por lo tanto se tiene la existencia y unicidad de solución en $[0,T]$, cualquiera sea $T > 0$, aplicando el Teorema de punto fijo de Banach. Además, se demuestran propiedades sobre dependencia continua y monótona de la solución respecto de los datos, existencia y unicidad en el caso en que $s(0) = 0$. En otro trabajo [6] se realizan estimaciones para u y sus derivadas.

REFERENCIAS

[1] BLOCK, H, *"Sur les équations aux derivées partielles du type parabolique"*, Arkiv Matematik Astronomi Fysik, 6 N°31(1911), 1-42.

[2] CANNON, J.R.-HILL, C.D., *"Existence, uniqueness, stability, and monotone dependance in a Stefan problem for the heat equation"*, J. Math. Mech., 17(1967), 1-19.

[3] DOETSCH, G., *"Les équations aux dérivées partielles du tipe parabolique"*, Enseig. Math., 35(1936), 43-87.

[4] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., *"Esistenza e unicità della soluzione per una classe di problemi di diffusione con condizioni al contorno non lineari"*, Boll. U.M.I., 3(1970), 660-667.

[5] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., *"Su un problema unidimensionale di diffusione in un mezzo a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineary"*, Ann. Mat. Pura ed Appl., 93(1972), 333-357.

[6] FASANO, A.-PRIMICERIO, M., *"La diffusione del calore in uno strato de spessore variabile in presenza di scambi termici nonlineari con l'ambiente"*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 50(1973), 269-330.

[7] FRIEDMAN, A., *"Free boundary problems for parabolic equations I.*

Melting of solids", J. Math. Mech., 8(1959), 499-517.

[8] FRIEDMAN, A., *"Partial differential equations of parabolic type"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).

[9] GEVREY, M., *"Sur les équations aux derivées partielles du type parabolique"*, J. Math. Pure Appl., (6) 9(1913), 305-471.

[10] GEVREY, M., *"Sur les équations aux derivées partielles du type parabolique (suite)"*, J. Math. Pures Appl., (6)10(1914), 105-148.

[11] GOURSAT, E., *"Cours d'analyse mathématique"*, Gauthier-Villars, Paris(1927).

[12] HOLMGREN, E., *"Sur l'équation de la propagation de la chaleur"*, Arkiv Matematik Astronomi Fysik, 4 N°14(1908), 1-11.

[13] HOLMGREN, E., *"Sur l'équation de la propagation de la chaleur . Deuxième note"*, Arkiv Matematik Astronomi Fysic, 4N°18(1908), 1-28.

[14] LEVI, E.E., *"Sull'equazione del calore"*, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 14(1908), 187-264.

[15] REDOZUBOV, D.V., *"On linear heat problems with one moving boundary"*, Soviet Physics-Technical Physics, 2(1957), 1993-2000.

[16] REDOZUBOV, D.V., *"The solution of linear thermal problems with a uniformly moving boundary in a semiinfinite region"*, Soviet Physics-Technical Physics, 5(1960), 570-574.

[17] REDOZUBOV, D.V., *"The solution of certain types of linear thermal problems in limited and semiinfinite regions with motion of the boundary according to a* $\beta\sqrt{t}$ *law"*, Soviet Physics - Technical Physics, 7(1962), 459-461.

[18] TARZIA, D.A., *"Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan"*, Mathematicae Notae, 29(1981-82), 147-241.

PROMAR (CONICET- UNR)
Instituto de Matemática "Beppo Levi"
Universidad Nacional de Rosario
Avenida Pellegrini 250
2000 ROSARIO - ARGENTINA