DEPARTAMENTO DE GRADUADOS

Departamento de Matemática - Instituto de Matemática " Beppo Levi ".

Complemento del Curso:

" LAS ECUACIONES E INECUACIONES VARIACIONALES EN LA MECANICA DEL CONTINUO. TEORIA , APLICACIONES Y APROXIMACION NUMERICA "

Profesor: Domingo Alberto TARZIA

- Febrero de 1980 -

Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería - Universidad Nacional de Rosario -
Av. Pellegrini 250 - 2.000 ROSARIO - Argentina.

INTRODUCCION

El temario del curso " LAS ECUACIONES E INECUACIONES VARIACIONALES EN LA MECANICA DEL CONTINUO. TEORIA, APLICACIONES Y APROXIMACION NUMERICA " incluyó los siguientes tópicos:

- Inecuaciones variacionales en R^n.
- Inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert. Teorema de Lax - Milgram. Teorema de Stampacchia - Lions.
- Aplicaciones a la Mecánica del Contínuo:
  a. Problemas térmicos.
  b. Elasticidad lineal. Desigualdad de Korn. Formulación variacional dual y mixta.
  c. Fluído visco-plástico de Bingham.
  d. Ecuación de Stokes.
- Aplicaciones a problemas de frontera libre:
  a. Problema del obstáculo.
  b. Problema del dique poroso. Transformación de Baiocchi.
  c. Problema del cambio de fase (Problema de Stefan).
- Aproximación numérica:
  a. Diversos métodos iterativos para los problemas variacionales.
  b. Método de los elementos finitos. Aplicaciones.

En este cuadernillo se presentan algunos temas que lo complementan, como ser:

I- Formulación variacional dual de la elasticidad.
II- Formulación variacional mixta de la elasticidad.
III- Aproximación numérica de ecuaciones e inecuaciones variacionales.
IV- Métodos iterativos para los problemas variacionales.
V- Inecuaciones variacionales con formas bilineales no negativas.
VI- Inecuaciones variacionales con operadores monótonos.
VII- Formulación variacional primal, dual y mixta del problema :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u/_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

VIII-Formulación variacional mixta.
IX- Las inecuaciones variacionales y su aplicación a problemas de control óptimo.

I- FORMULACION VARIACIONAL DUAL DE LA ELASTICIDAD LINEAL

En la formulación variacional primal de la elasticidad lineal la incógnita es el desplazamiento $\vec{u}$.

La búsqueda de los pequeños desplazamientos a partir del estado natural de un sólido elástico, homogeneo e isótropo Ω sometido a una densidad volúmica $\vec{f}$ en Ω y a una densidad superficial $\vec{g}$ en Γ_1 y estando empotrado en la porción restante de superficie Γ_0, se obtiene resolviendo el problema (salvo casos de ambiguedad, está implícita la sumatoria cuando dos índices se repiten).

$$(P) \quad \begin{cases} -\sigma_{ij,j}(\vec{u}) = f_i \text{ en } \Omega, & i = 1,2,3 \\ u_i/\Gamma_0 = 0, & i = 1,2,3 \\ \sigma_{ij}(\vec{u}) \cdot n_j/\Gamma_1 = g_i, & i = 1,2,3 \end{cases}$$

siendo la ley de comportamiento:

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda\, \varepsilon_{kk}(\vec{u})\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\vec{u}), \quad i,j = 1,2,3$$

donde:

$$\begin{cases} \delta_{ij} : & \text{delta de KRONECKER} \\ \lambda,\mu : & \text{coeficientes de LAME } (\lambda \geq 0, \mu > 0) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) : & \text{vector desplazamiento} \\ \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) : & \text{tensor de deformaciones linearizado} \\ \sigma_{ij} : & \text{tensor de tensiones} \end{cases}$$

La formulación variacional del problema (P) está dada por:

$$(P_1)\quad \begin{cases} a(\vec{u};\vec{v}) = \langle L;\vec{v}\rangle, \ \forall \vec{v}\in K \\ \vec{u}\in K \end{cases}$$

donde:

$$\begin{cases} V=(H^1(\Omega))^3, \quad \vec{f}\in (L^2(\Omega))^3, \ \vec{g}\in (L^2(\Gamma_1))^3 \\ K=\{\vec{v}\in V / \ \vec{v}/_{\Gamma_0}=\vec{0}\}, \ \text{medida}(\Gamma_0)>0, \\ a(\vec{u};\vec{v}) = \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\,\varepsilon_{ij}(\vec{v})\,dx \\ \langle L;\vec{v}\rangle = \int_\Omega \vec{f}\times\vec{v}\,dx + \int_{\Gamma_1}\vec{g}\times\vec{v}\,d\gamma \end{cases}$$

Además, la única solución de (P_1) minimiza la energía potencial total del cuerpo, es decir:

$$(P_2)\begin{cases} J(\vec{u})\le J(\vec{v}), \forall\vec{v}\in K \\ \vec{u}\in K \end{cases}$$

donde:

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2}\,a(\vec{v};\vec{v}) - \langle L;\vec{v}\rangle$$

Observación:

Físicamente, es importante el cálculo de las tensiones σ_{ij}. Como σ_{ij} es una combinación lineal de las derivadas de los desplazamientos u_i, existen dificultades desde el punto de vista del cálculo numérico, sobre todo cuando por el método empleado la solución $\vec{u}$ de (P_1) ó (P_2) es C^0 y no C^1.

La formulación variacional dual consistirá en formular el problema en función de los σ_{ij} (nueva incógnita) con la creación de una energía complementaria que se tratará de minimizar.

Sean:

$$\begin{cases} Q=\{\ \tau=(\tau_{ij})_{3\times 3}\in (L^2(\Omega))^9 / \tau_{ij}=\tau_{ji}\ (i,j=1,2,3),\ \tau_{ij,j}\in L^2(\Omega)\ (i=1,2,3)\} \\ Z_0=\{\tau\in Q / \ \tau_{ij,j}=0 \text{ en } \Omega\ (i=1,2,3),\ \tau\cdot\vec{n}/_{\Gamma_1}=\vec{0}\ \} \\ Z=\{\tau\in Q / -\tau_{ij,j}=f_i \text{ en } \Omega\ (i=1,2,3),\ \tau\cdot\vec{n}/_{\Gamma_1}=\vec{g}\ \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha : Q\times Q \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \alpha(\tau;\sigma) = \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_\Omega \tau_{ij}\,\sigma_{ij}\,dx - \dfrac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\displaystyle\int_\Omega \tau_{\ell\ell}\,\sigma_{kk}\,dx \\ \qquad = \dfrac{1+\nu}{E}\,(\tau_{ij};\sigma_{ij})_{L^2(\Omega)} - \dfrac{\nu}{E}\,(\tau_{\ell\ell};\sigma_{kk})_{L^2(\Omega)} \\ I : Q \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, I(\tau) = \dfrac{1}{2}\,\alpha(\tau;\tau) : \text{energía complementaria} \\ \nu = \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} : \text{Coeficiente de POISSON } (0<\nu<1/2) \\ E = \dfrac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda} > 0 : \text{módulo de YOUNG.} \end{cases}$$

Verificar las siguientes proposiciones:

1) Q es un espacio de HILBERT con el producto escalar:

$$(\tau;\sigma)_Q = \sum_{i,j=1}^{3} (\tau_{ij};\sigma_{ij})_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij,j};\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j}\Big)_{L^2(\Omega)}$$

2) $\tau\in Q \implies \tau\cdot\vec{n}\in \left[(H^{1/2}(\Gamma))^3\right]'$ de manera que vale la siguiente igualdad:

$$\int_\Omega \tau_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\vec{u})\,dx = -\int_\Omega \tau_{ij,j}\,u_i\,dx + \int_\Gamma (\tau\cdot\vec{n})\times\vec{u}\,d\gamma$$

$\Big(\int_\Gamma (\tau\cdot\vec{n})\times\vec{u}\,d\gamma = \int_\Gamma \tau_{ij}\,n_j\,u_i\,d\gamma$, debe interpretarse como $\langle \tau\cdot\vec{n};\vec{u}\rangle\Big)$.

3) $\sigma(\vec{u})\in Z$ (por lo tanto: $Z\neq\emptyset$)

4) $\exists\,\beta>0 \,/\, \dfrac{1+\nu}{E}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}^2 - \dfrac{\nu}{E}\Big(\sum_{i=1}^{3}\tau_{ii}\Big)^2 \geq \beta\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}^2 \;,\; \forall\,\tau=(\tau_{ij})_{3\times3}\in\mathbb{R}^9$

(Basta tomar: $0<\beta\leq\dfrac{1-2\nu}{E}$).

5) $\alpha(\tau;\tau)\geq\beta\,\|\tau\|_Q \,,\, \forall\,\tau\in Z_0$ (Por lo tanto α es Z_0 - elíptico)

6)
- i) Existe una solución σ del problema:
$$\begin{cases}\alpha(\sigma;\tau-\sigma)=0\,,\ \forall\,\tau\in Z\\ \sigma\in Z\end{cases}$$
- ii) Además, σ es solución del problema de minimización:
$$I(\sigma)\leq I(\tau),\ \forall\,\tau\in Z \;,\; \sigma\in Z$$

7) $\begin{cases} i) & \alpha(\sigma(\vec{u});\tau) = (\tau_{ij};\varepsilon_{ij}(\vec{u}))_{L^2(\Omega)}, \forall \tau \in Q \\ ii) & \alpha(\sigma(\vec{u});\tau) = 0, \quad \forall \tau \in Z_0 \end{cases}$

8) $\sigma = \sigma(\vec{u})$.

9) $\begin{cases} i) & \alpha(\sigma(\vec{u});\sigma(\vec{u})) = a(\vec{u};\vec{u}) \\ ii) & J(\vec{u}) + I(\sigma) = 0 \,. \end{cases}$

10) Generalizar el estudio para $\vec{g} \in \left[(H^{1/2}(\Gamma_1))^3\right]'$.

II- FORMULACION VARIACIONAL MIXTA DE LA ELASTICIDAD LINEAL

Sea el siguiente problema mixto (o problema primal-dual):

encontrar: $(p;\lambda)\in Q\times M\,/$

$$(P)\quad \begin{cases} \alpha(p;q)+\beta(q;\lambda)=0\,,\ \forall q\in Q \\ \qquad\qquad \beta(p;\mu)=\varphi(\mu)\,,\ \forall \mu\in M \end{cases}$$

donde:

$$\begin{cases}
Q=\left\{ q=(q_{ij})_{3\times 3}\in\left(L^2(\Omega)\right)^9 \,/\, q_{ij}=q_{ji}\ (i,j=1,2,3)\,,\ q_{ij,j}\in L^2(\Omega)\ (i=1,2,3)\right\} \\
M=\left\{ \mu=(\mu_1;\mu_2;\mu_3)\in\left(H^1(\Omega)\right)^3 \,/\, \mu_{/\Gamma_0}=0\right\},\ \text{medida}(\Gamma_0)>0 \\
\alpha: Q\times Q\longrightarrow\mathbb{R}\,/\ \alpha(p;q)=\dfrac{1+\nu}{E}\left(p_{ij};q_{ij}\right)_{L^2(\Omega)}-\dfrac{\nu}{E}\left(p_{\ell\ell};q_{kk}\right)_{L^2(\Omega)} \\
\beta: Q\times M\longrightarrow\mathbb{R}\,/\ \beta(q;\mu)=-\left(q_{ij};\varepsilon_{ij}(\mu)\right)_{L^2(\Omega)} \\
\varepsilon_{ij}(\mu)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\mu_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial\mu_j}{\partial x_i}\right) \\
L: M\longrightarrow\mathbb{R}\,/\ L(\mu)=\displaystyle\int_\Omega f_i\,\mu_i\,dx+\int_{\Gamma_1} g_i\,\mu_i\,d\gamma \\
\varphi: M\longrightarrow\mathbb{R}\,/\ \varphi(\mu)=-L(\mu) \\
f=(f_1;f_2;f_3)\in\left(L^2(\Omega)\right)^3:\ \text{densidad de fuerza por unidad de volumen} \\
g=(g_1;g_2;g_3)\in\left(L^2(\Gamma_1)\right)^3:\ \text{densidad de fuerza por unidad de superficie}\ (\Gamma_1=\Gamma-\Gamma_0)
\end{cases}$$

Verificar las siguientes proposiciones:

1) i) $p=\sigma(\vec{u})$ y $\lambda=\vec{u}$ es una solución del problema (P),

donde $\vec{u}$ y $\sigma(\vec{u})$ son el desplazamiento y el tensor de tensiones de la elasticidad lienal respectivamente.

ii) La solución de (P) es única.

2) el lagrangiano $\mathcal{L}: Q\times M \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{L}(q;\mu)=\frac{1}{2}\alpha(q;q)+\beta(q;\mu)-\varphi(\mu)$$

(energía de HELLINGER-REISSNER)

tiene un único punto de ensilladura $(p;\lambda)$ que es la solución del problema mixto (P), es decir:

$$(P_1)\quad \begin{cases} \mathcal{L}(p;\mu)\leq \mathcal{L}(p;\lambda)\leq \mathcal{L}(q;\lambda), & \forall q\in Q, \forall \mu\in M \\ (p;\lambda)\in Q\times M \end{cases}$$

3) El elemento $p\in Q$ es solución de un problema de minimización con restricción, es decir:

$$(P_2)\quad \begin{cases} I(p)\leq I(q), \ \forall q\in Z \\ p\in Z \end{cases}$$

Con $Z\ (\subset Q)$ y $I: Q\longrightarrow \mathbb{R}$ a determinar.

4) Hallar la formulación variacional correspondiente al problema de minimización (P_2).

III - APROXIMACION NUMERICA DE ECUACIONES E INECUACIONES VARIACIONALES.

El objeto esencial del Análisis Numérico es reemplazar el problema contínuo (en un espacio de dimensión infinita), por un problema aproximado en un espacio de dimensión finita.

I) Aproximación numérica de ecuaciones variacionales:

Problema contínuo:

$$(P_1)\quad \begin{cases} a(u;v) = \langle L; v \rangle, \ \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

donde:

$$\begin{cases} V: \text{espacio de Hilbert, } V' \text{ dual de } V \\ a: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ forma bilineal, contínua } \left(|a(u;v)| \leq M \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V \right) \\ \text{simétrica y coerciva } \left(\exists \alpha > 0 / \ a(v;v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V \right) \\ L \in V' \end{cases}$$

Por el Teorema de LAX-MILGRAM existe un único elemento $u \in V$ solución de (P_1)

Problema discreto o aproximado:

$$(P_{1h})\quad \begin{cases} a(u_h; v_h) = \langle L; v_h \rangle, \ \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h \end{cases}$$

donde $V_h \subset V$ (Método de Aproximación Interna) es un sub-espacio vectorial de dimensión finita N_h, con $h > 0$ parámetro destinado a tender a cero (en general, $h = 1/m$ con m natural)

Verificar las siguientes proposiciones:

1) Existe un único elemento $u_h \in V_h$ solución de (P_{1h})

2) Lema de CEA: $\|u - u_h\| \leq \dfrac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$

3) $u_h = P_{V_h}(u)$, donde P_{V_h} es el operador proyección sobre V_h con respecto al producto escalar $a(\cdot;\cdot)$.

4) Usando 3) se obtiene:

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

Esta estimación mejora la obtenida en 2), pues $\alpha \leq M$.

5) $\begin{cases} \text{i)} & \|u_h\| \leq C, \ \forall h \\ \text{ii)} & a(u_h;u_h) \leq a(u;u), \ \forall h \end{cases}$, donde C es una constante independiente de h.

6) Supongamos que exista $\mathcal{V} \subset V$ (denso en V) y una aplicación

$$r_h : \mathcal{V} \longrightarrow V_h \ / \ \lim_{h \to 0} \|v - r_h v\| = 0, \ \forall v \in \mathcal{V}.$$

Entonces $\lim_{h \to 0} \|u - u_h\| = 0$, con lo cual el problema aproximado es convergente.

7) Prácticamente se da una base $\{w_1; \dots ; w_{N_h}\}$ del espacio V_h de manera que la solución $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i w_i$ del problema (P_{1h}) se obtiene por la resolución del sistema lineal:

$$(S) \quad \sum_{i=1}^{N_h} a(w_i;w_j)\, u_i = \langle L ; w_j \rangle, \ \forall j = 1; \dots ; N_h$$

Verificar que (S) tiene única solución $u_1; \dots ; u_{N_h}$.

Observación:

El método de los elementos finitos es en su forma simple un método de aproximación interna en el cual los sub-espacios V_h son elegidos de una manera particular. En general, se trata que la matriz de coeficientes del sistema lineal (S) tenga la mayor cantidad de ceros posible. Practicamente, se tiene la propiedad siguiente:

$$\text{medida}\left(\text{Sop}(w_i) \cap \text{Sop}(w_j)\right) = 0 \Rightarrow a(w_i;w_j) = 0 .$$

De dicha propiedad surge la importancia de la buena elección de la base $\{w_i\}$ de V_h. Para una información completa del tema, ver por ejemplo, P.G. CIARLET, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam (1978).

II) Aproximación numérica de inecuaciones variacionales

Problema contínuo:

$$(P_2) \begin{cases} a(u;v-u) \geq \langle L ; v-u \rangle, \ \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

donde K es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de V, y a es una forma no simétrica.

Por el Teorema de LIONS-STAMPACCHIA, existe un único elemento $u \in K$ solución de (P_2).

Problema aproximado:

$$(P_{2h}) \quad \begin{cases} a(u_h; v-u_h) \geq \langle L; v_h-u_h \rangle, \ \forall v_h \in K_h \\ u_h \in K_h \end{cases}$$

donde K_h es un sub-conjunto convexo, cerrado y no vacío de V_h.
En general, K_h no es un sub-conjunto de K.

Verificar las siguientes proposiciones:

8) Existe un único elemento $u_h \in K_h$ solución de (P_{2h}).

9) i) La aplicación $A: V \longrightarrow V'$, definida por $\langle Au; v \rangle = a(u;v), \forall u, v \in V$ es lineal y contínua.

ii) Sea H otro espacio de Hilbert, de norma $|\cdot|$, con las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \bar{V} = H \quad (V \text{ es denso en } H) \\ V \hookrightarrow H \quad (\text{la identidad de } V \text{ en } H \text{ es inyectiva y contínua}) \end{cases}$$

Si se identifica H con su dual H' (Teorema de representación de RIESZ) entonces $H \hookrightarrow V'$.

Prácticamente se tiene el caso: $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$ (Ver (13))

10) Si $Au - L \in H$, entonces:

i) $$\begin{cases} \alpha \|u-u_h\|^2 \leq |Au-L| \left(|u-v_h| + |u_h - v|\right) + M \|u-u_h\| \, \|u-v_h\|, \\ \forall v \in K_h, \ \forall v \in K \end{cases}$$

(Partir de la desigualdad:

$$\alpha \|u-u_h\|^2 \leq a(u-u_h; u-u_h) = a(u;u) + a(u_h;u_h) - a(u;u_h) - a(u_h;u) \Big).$$

ii) Existe $C > 0$ (constante independiente de h), tal que:

$$\|u-u_h\| \leq C \left[\operatorname*{Inf}_{v_h \in K_h} \left(\|u-v_h\|^2 + |Au-L| \, |u-v_h| \right) + \right.$$
$$\left. + |Au-L| \operatorname*{Inf}_{v \in K} |u_h - v| \right]^{1/2}.$$

(Utilizar la desigualdad $\quad xy \leq \dfrac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2\varepsilon^2} \quad$ válida $\forall \varepsilon > 0$)

11) De 10) ii) se obtienen:

i) $K = V \implies \|u-u_h\| \leq C \operatorname*{Inf}_{v_h \in K_h} \|u - v_h\|.$

ii) $K_h \subset K \Rightarrow \|u-u_h\| \leq c \left[\operatorname{Inf}_{v_h \in K_h} \left(\|u-v_h\|^2 + |Au-L|\,|u-v_h| \right) \right]^{1/2}$

12) Para el caso en que no se introduzca el espacio de HILBERT H (solo se tiene $Au \in V'$ y $L \in V'$) obtener el resultado correspondiente al 10) ii).

Observación:

Es interesante recalcar que las estimaciones anteriores son válidas para el caso en que la forma a no es simétrica.

13) Sean
$$\begin{cases} V = H_0^1(\Omega) \\ a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; a(u;v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx \end{cases}$$

Si $u \in H^2(\Omega)$, entonces $Au \in L^2(\Omega)$.

(tener presente que $V = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H = L^2(\Omega)$).

IV - METODOS ITERATIVOS PARA LOS PROBLEMAS VARIACIONALES

Sean:

- V: espacio de HILBERT,
- K: conjunto convexo, cerrado y no vacío de V,
- $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, forma bilineal, simétrica,
  - contínua ($|a(u;v)| \leq M \|u\| \|v\|, \forall u,v \in V, M>0$) y
  - coerciva ($\exists \alpha > 0 \;/\; a(v;v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V$),
- V' : dual de V , $f \in V$,
- $L \in V'$ con $\langle L; v \rangle = (f; v), \forall v \in V$,
- $A : V \longrightarrow V \;/\; (Au; v) = a(u; v), \forall u, v \in V$,
- $P_K : V \longrightarrow K$, operador proyección sobre K

Sean los siguientes problemas:

$$(P_1) \quad \begin{cases} a(u; v-u) \geq \langle L; v-u \rangle, \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} a(u; v) = \langle L; v \rangle, \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

1) Consideremos el siguiente algoritmo:

(A)
- a) $u_0 \in V$, arbitrariamente elegido
- b) conocido u_n se define u_{n+1} como la única solución de:

$$u_{n+1} = P_K(u_n - \rho(Au_n - f)), \quad n \geq 0.$$

i) Si se elige ρ de manera que $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M}$, entonces $\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\| = 0$, donde u es la única solución de (P_1) (Utilizar el teorema del punto fijo y el teorema de LIONS- STAMPACCHIA)

ii) La condición b) de (A) puede ponerse bajo la siguiente forma variacional:

$$\begin{cases} (u_{n+1}; v-u_{n+1}) \geqslant (u_n; v-u_{n+1}) - \rho\left[a(u_n; v-u_{n+1}) - \langle L; v-u_{n+1}\rangle\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v\in K \\ u_{n+1}\in K \end{cases}$$

iii) Si se considera el problema (P_2), entonces el algoritmo (A) puede reemplazarse por:

$$(B)\begin{cases} \text{a)} \quad u_0 \in V \quad \text{, arbitrariamente elegido} \\ \text{b)} \quad \text{Conocido } u_n \text{ se define } u_{n+1} \text{ como:} \\ \qquad u_{n+1} = u_n - \rho\,(Au_n - f)\,, \quad n \geqslant 0 . \end{cases}$$

obteniéndose el mismo resultado que en i)

2) Supongamos que la forma a no sea simétrica y que exista: b: $V\times V \longrightarrow R$, forma bilineal, continua, coerciva y simétrica.

Consideremos el siguiente algoritmo:

$$(C)\begin{cases} \text{a)} \quad u_0 \in V \quad \text{, arbitrariamente elegido} \\ \text{b) conocido } u_n \text{ se define } u_{n+1} \text{ como la única solución de} \\ \quad \begin{cases} b(u_{n+1}; v) = b(u_n; v) - \rho\left[a(u_n; v) - \langle L; v\rangle\right], \forall v\in V \\ u_{n+1}\in V \end{cases} \end{cases}$$

i) $|||v||| = \sqrt{b(v;v)}$ es una norma equivalente a $\|v\|$ en V.

ii) Sea $\xi_n = u_n - u$, donde u es la solución de (P_2). Entonces:

a) $b(\xi_{n+1} - \xi_n ; v) = -\rho\, a(\xi_n; v)\,, \forall v\in V.$

b) Eligiendo $v = \xi_{n+1} - \xi_n \in V$ y $v = \xi_{n+1} + \xi_n \in V$ en i) se obtiene:

$$|||\xi_{n+1}|||^2 \leq \left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2\right) |||\xi_n|||^2$$

iii) Si se elige ρ de manera que $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{M}$ se tiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\| = 0 .$$

<u>Observación:</u>

En cada iteración del algoritmo (C) se debe resolver un problema variacional del mismo tipo que el problema incógnita (P_2) pero mucho más simple si la forma b es bien elegida.

3) Supongamos que la forma a no sea simétrica y que además existan:

W: espacio de Hilbert con norma $|||\cdot|||$

$W \hookrightarrow V$ (inyección contínua, es decir: $\exists c>0 / \|v\| \leq c\, |||v|||, \forall v \in W$)

b: $W \times W \longrightarrow R$, forma bilineal, contínua, coerciva y simétrica.

Por simplicidad, se toma por norma en W a $|||v||| = \sqrt{b(v;v)}, \forall v \in W$.

Consideramos el algoritmo siguiente:

(D)
a) $u_0 \in W$, arbitrariamente elegido

b) conocido u_n se define u_{n+1} como la única solución de:

$$\begin{cases} b(u_{n+1};v) = b(u_n;v) - \rho\left[a(u_n;v) - \langle L;v\rangle\right], \forall v \in W \\ u_{n+1} \in W \end{cases}$$

Sea $\xi_n = u_n - u$, donde u es la solución de (P_2) . se supone $u \in W$.

Entonces:

i) $b(\xi_{n+1} - \xi_n; v) = -\rho\, a(\xi_n; v), \forall v \in W$

ii) Eligiendo $v = \xi_{n+1} - \xi_n \in W$ y $v = \xi_{n+1} + \xi_n \in W$ en i) se obtiene:

$$\rho\left(2\alpha - \rho M^2 c^2\right)\|\xi_n\|^2 \leq |||\xi_n|||^2 - |||\xi_{n+1}|||^2$$

iii) Si se elige ρ de manera que $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{M^2 c^2}$, se tiene:

$$\begin{cases} \text{a)} \quad u_n \longrightarrow u & \text{en V fuerte .} \\ \text{b)} \quad u_n \longrightarrow u & \text{en W débil .} \end{cases}$$

V - INECUACIONES VARIACIONALES CON FORMAS BILINEALES NO NEGATIVAS

Sean:

$$\begin{cases} V\text{: espacio de HILBERT con producto escalar } (\cdot\,,\,\cdot) \\ K\text{: conjunto convexo, cerrado y no vacío de } V, \\ L \in V',\ a: V \times V \longrightarrow R, \text{ forma bilineal, contínua } \left(|a(u;v)| \leq M\|u\|\,\|v\|, \right. \\ \left. \forall u, v \in V \right) \qquad \text{y no negativa } \left(a(v;v) \geqslant 0,\ \forall v \in V \right) \end{cases}$$

Sea el problema:

$$(P) \qquad \begin{cases} a(u;v-u) \geqslant \langle L; v-u \rangle,\ \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

1) Introducción

Supongamos que (P) tenga al menos una solución. Sea X el conjunto:

$$X = \left\{ u \in K \quad / \quad u \text{ es solución de } (P) \right\}$$

i) Sea el operador lineal y contínuo

$$A: V \longrightarrow V' \ / \quad \langle A(u); v \rangle = a(u;v),\ \forall u, v \in V$$

entonces, el operador $T: V \longrightarrow V'$ definido por $T(v) = A(v) - L$ es monótono.

ii) $(P) \iff (P') \quad \begin{cases} a(v; v-u) \geqslant \langle L; v-u \rangle,\ \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$

iii) X es un conjunto convexo y cerrado.

2) Método de Regularización:

Sean $\quad \begin{cases} G \in V', \\ b: V \times V \longrightarrow R, \text{ forma bilineal, contínua y coerciva.} \end{cases}$

i) Si $X \neq \emptyset$, entonces $\exists !\, u_0 \in X \ / \ b(u_0; v-u_0) \geqslant \langle G; v-u_0 \rangle, \forall v \in X$

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists !\, u_\varepsilon \in K \ / \ a(u_\varepsilon; v-u_\varepsilon) + \varepsilon\, b(u_\varepsilon; v-u_\varepsilon) \geqslant \langle L + \varepsilon G; v-u_\varepsilon \rangle,$
$\forall v \in K.$

iii) La aplicación $\quad v \in V \longrightarrow a(v;v) \in \mathbb{R} \quad$ es semi-contínua inferiormente en V débil.

iv) $X \neq \emptyset \iff \|u_\varepsilon\| \leq C \qquad$ (constante independiente de ε)

v) Si $X \neq \phi$, entonces $\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u_0\| = 0$

vi) Que puede decirse del elemento $u_0 \in X$ en los siguientes casos particulares:

$$\begin{cases} \text{a)} & b(u;v) = (u;v) \\ \text{b)} & b(u;v) = (u;v) \text{ y } G = 0. \end{cases}$$

vii) Si el convexo y cerrado K es acotado en V, entonces (P) tiene al menos una solución.

viii) Si K no es acotado en V, sea

$$\begin{cases} K_R = K \cap B_R(0) , \quad R > 0 \\ \text{Con} \quad B_R(0) = \{ v \in V / \ \|v\| \leq R \} \end{cases}$$

(Para R suficientemente grande, $K_R \neq \phi$)

Sea además, el problema:

$$\begin{cases} a(w_R ; v - w_R) \geq \langle L ; v - w_R \rangle, \ \forall v \in K_R \\ w_R \in K_R \end{cases}$$

entonces:

a) El conjunto $X_R = \{ w_R \in K_R / \quad w_R$ es solución de $(P_R) \}$ es no vacío.

b) Si $w_R \in X_R$ con $\|w_R\| < R$, entonces $w_R \in X$.

c) Si para un dado $R > 0$, X_R contiene al menos dos elementos, entonces $X \neq \phi$.

VI - INECUACIONES VARIACIONALES CON OPERADORES MONOTONOS

Sean

$$\begin{cases} X : \text{espacio de Banach reflexivo con dual } X' \text{ y dualidad } \langle \cdot, \cdot \rangle, \\ K : \text{conjunto convexo, cerrado y no vacío de } X. \end{cases}$$

Definiciones:

Sea el operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X'$,

i) A es monótono $\Longleftrightarrow \langle Au - Av ; u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in D(A).$

ii) A es estrictamente monótono $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{a) } A \text{ es monótono} \\ \text{b) } \langle Au - Av ; u - v \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = v \end{cases}$$

iii) Si $D(A)$ es convexo, entonces:

A es hemicontínuo $\Longleftrightarrow$ la función $t \in [0;1] \longrightarrow \langle A(tu + (1-t)v) ; u - v \rangle$ es contínua.

iv) $A : K \longrightarrow X'$ $(K \subset D(A))$ es contínuo sobre los sub-espacios de dimensión finita $\Longleftrightarrow A : K \cap M \longrightarrow X'$ es contínua $\forall M \subset X$ de dimensión finita.

Verificar las siguientes proposiciones:

1) Sean

$$\begin{cases} A : K \longrightarrow X' \quad (K \subset D(A)) \\ (P_1) \begin{cases} \langle Au ; v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \\ (P_2) \begin{cases} \langle Av ; v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \end{cases}$$

Entonces:

i) (P_1) y A monótono $\Longrightarrow (P_2)$

ii) (P_2) y A hemicontinuo $\Longrightarrow (P_1)$

iii) A monótono y hemicontínuo, entonces $(P_1) \Longleftrightarrow (P_2)$

2) Si A es monótono y hemicontínuo, entonces el conjunto de las soluciones del problema (P_1) ó (P_2) es un conjunto convexo y cerrado de K.

3) Sea K acotado y $0 \in K$ (no restrictivo).

Si $A : K \longrightarrow X'$ es monótono y contínuo sobre los espacios de dimensión finita entonces existe al menos una solución u de (P_1).

Si además A es estrictamente monótono, el elemento u es único.

Para la existencia, verificar:

i) $\forall M$ sub-espacio de dimensión finita de X $(\dim M = m)$

$$\exists\ \gamma_M \in K_M = K \cap M \ / \ \langle Av ; v - \gamma_M \rangle \geq 0 \ , \ \forall v \in K_M .$$

Utilizar las aplicaciones:

$$\begin{cases} j : M \longrightarrow X \text{ (inyección)} \\ j^* : X' \longrightarrow M' \approx M \text{ (dual de } j) \\ j^*Aj : K_M \longrightarrow M' \end{cases}$$

y los resultados de inecuaciones variacionales en dimensión finita y la equivalencia 1)iii)

ii) sea $S(v) = \{ u \in K \ / \ \langle Av ; v - u \rangle \geq 0 \}$ (convexo y cerrado)

entonces: $\exists\ u \in \bigcap_{v \in K} S(v)$ solución de (P_1)

Para ello verificar y utilizar:

a) $S(v)$ es débilmente cerrado, $\forall v \in K$.

b) K es débilmente compacto.

c) $\bigcap_{v \in K} S(v)$ es debilmente compacto.

d) $M = \text{S.E.} \{ v_1 ; \dots ; v_m \} \Rightarrow \gamma_M \in \bigcap_{i=1}^{m} S(v_i)$.

e) equivalencia 1)iii)

A) Si $A : X \longrightarrow X'$ es monótono y Hemicontínuo, entonces A es contínuo sobre los subespacios de dimensión finita de X.

Para ello verificar:

$$\begin{cases} \text{i) A lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados (por el absurdo)} \\ \text{ii) } v_n \longrightarrow v \ \text{ y } \ Av_n \longrightarrow w \ \Rightarrow \ w = Av \end{cases}$$

5) Sea $A : X \longrightarrow X'$ monótono y hemicontínuo, K acotado, entonces existe al menos una

solución del problema (P_1). Si Además A es estrictamente monótono la solución es única.

6) Si K es no acotado, sea:

$$\begin{cases} K_R = K \cap B_R(0), \quad R>0 \\ \text{con} \quad B_R(0) = \{ x \in X \;/\; \|x\| \leq R \} \end{cases}$$

(Para R suficientemente grande, con $K_R \neq \emptyset$)

Sea el problema:

$$(P_{1R}) \qquad \begin{cases} \langle A u_R ; v - u_R \rangle \geq 0, \; \forall v \in K_R \\ u_R \in K_R \end{cases}$$

Sea $A: K \longrightarrow X'$ monótono y contínuo sobre los sub-espacios de dimensión finita de K

(ó $A : X \longrightarrow X'$ monótono y hemicontínuo)

Verificar:

i) $\exists\, u_R \in K_R$ solución de (P_{1R})

ii) $\exists\, u$ solución de $(P_1) \Longleftrightarrow \exists\, R > 0$ / la solución u_R de (P_{1R}) satisface la desigualdad $\|u_R\| < R$.

iii) Casos en que la condición $\|u_R\| < R$ se cumple:

a)Sean $\varphi_0 \in K \;\exists\; \|\varphi_0\| < R \;/\; \langle Av ; v - \varphi_0 \rangle > 0 \;\; \forall v \in K$ con $\|v\| = R$ entonces $\|u_R\| < R$.

b)Sea A coercivo, es decir:

$$\exists\, \varphi_0 \in K / \lim_{\substack{\|v\| \to +\infty \\ v \in K}} \frac{\langle Av - A\varphi_0 ; v - \varphi_0 \rangle}{\|v - \varphi_0\|} = +\infty,$$

entonces tomando $H > \|A\varphi_0\|$, $R > \|\varphi_0\|$ y

$\langle Av - A\varphi_0 ; v - \varphi_0 \rangle \geq H \|v - \varphi_0\|, \; \forall \|v\| > R$, se tiene la hipótesis anterior a)

7) Aplicaciones:

i) Sean
- V : espacio de HILBERT
- K : conjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío de V,
- $T : V \to V / \begin{cases} a) \; \|Tu - Tv\| \leq \|u - v\| \\ b) \; T(K) \subset K \end{cases}$ (T operador no expansivo)

entonces existe un conjunto convexo de puntos fijos de T.

Para ello, verificar y utilizar:

$$\begin{cases} \text{a) } A = I - T : K \longrightarrow V \ \ (I \text{ identidad) es monótono.} \\ \text{b) } \exists u \in K \,/\, (Au; v-u) \geq 0, \ \forall v \in K. \\ \text{c) } T(u) = u. \end{cases}$$

ii) Sean

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ dominio acotado,} \\ A: L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \text{ monótono, coercivo y continuo,} \\ K = \{ v \in L^2(\Omega) \,/\, v \geq 0 \text{ en c.t.p. de } \Omega \} \end{cases}$$

Estudiar los problemas:

(1) $\begin{cases} (Au; v-u) \geq 0, \ \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$, (2) $\begin{cases} u \in K, \ Au \in K \\ u \cdot Au = 0, \text{ en c.t.p. de } \Omega. \end{cases}$

VII - FORMULACION VARIACIONAL PRIMAL, DUAL Y MIXTA DEL PROBLEMA

$$(P)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u/_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Sean

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: dominio acotado con frontera regular Γ y versor normal exterior n.

$$\begin{cases}
V = H_0^1(\Omega), \quad M = H = L^2(\Omega), \quad f \in H, \\
a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, a(u;v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx, \\
L : V \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, L(v) = \int_\Omega f v \, dx, \\
J : V \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, J(v) = \frac{1}{2} a(v;v) - L(v) \quad (\text{energía total}), \\
Q = H(\mathrm{div};\Omega) = \{ q \in H^n \,/\, \mathrm{div}(q) \in H \}, \\
Z_0 = \{ q \in Q \,/\, \mathrm{div}(q) = 0 \text{ en } \Omega \}, \\
Z = \{ q \in Q \,/\, \mathrm{div}(q) + f = 0 \text{ en } \Omega \} = q_0 + Z_0, \\
\alpha : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \alpha(p;q) = \int_\Omega p \times q \, dx = (p;q)_{H^n}, \\
I : Q \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, I(q) = \frac{1}{2} \alpha(q;q) = \frac{1}{2} \|q\|^2_{H^n}, \\
\qquad (\text{energía complementaria}) \\
\beta : Q \times M \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \beta(q;\mu) = \int_\Omega \mathrm{div}(q)\, \mu \, dx, \\
\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \varphi(\mu) = -L(\mu), \\
\mathcal{L} : Q \times M \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \mathcal{L}(q;\mu) = I(q) + \beta(q;\mu) - \varphi(\mu). \\
\qquad (\text{Lagrangiano})
\end{cases}$$

1) Formulación variacional primal :

i) Verificar que la formulación variacional del problema (P) está dada por:

$$(P_1)\quad \begin{cases} a(u;v) = L(v), \ \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

ii) El problema (P_1) tiene una única solución $u \in V$.

iii) La solución u de (P_1) es la única solución del problema:

$$(P_2)\quad \begin{cases} J(u) \leq J(v), \ \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

2) Formulación variacional dual

i) Q es un espacio de HILBERT con el producto escalar:

$$(p;q)_Q = (p;q)_{H^n} + (\operatorname{div}(p); \operatorname{div}(q))_H .$$

Además, se tiene la siguiente fórmula de GREEN:

$$\int_\Omega q \times \vec{\nabla} v \, dx = -\int_\Omega \operatorname{div}(q)\, v \, dx + \langle q \times n ; v \rangle_\Gamma, \ \forall q \in Q, \forall v \in H^1(\Omega)$$

donde $\langle \cdot ; \cdot \rangle_\Gamma$ representa la dualidad $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

$\left(\text{si } \lambda \in L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma) \text{ y } \mu \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ entonces } \langle \lambda ; \mu \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \lambda \mu \, d\gamma \right).$

ii) Existe una única solución $p \in Z$ del problema:

$$(P_3)\quad \begin{cases} \alpha(p; q-p) = 0, \ \forall q \in Z \\ p \in Z \end{cases}$$

iii) La solución $p \in Z$ de (P_3) es la única solución del problema de minimización:

$$(P_4)\quad \begin{cases} I(p) \leq I(q), \ \forall q \in Z \\ p \in Z \end{cases}$$

iv) $p = \vec{\nabla} u \in Z$, donde u es la solución de (P_1).

v) $I(p) + J(u) = 0$.

3) Formulación variacional primal-dual o mixta:

Sea el siguiente problema:

$$(P_5)\quad \begin{cases} \alpha(p;q)+\beta(q;\lambda)=0, \ \forall q\in Q \\ \beta(p;\mu)=\varphi(\mu), \ \forall \mu\in M \\ (p;\lambda)\in Q\times M \end{cases}$$

i) Verificar que $p=\vec{\nabla}u$, $\lambda=u$ es solución de (P_5)

ii) La solución $(p;\lambda)\in Q\times M$ de (P_5) es única.

iii) Verificar que las dos ecuaciones de (P_5) son equivalentes al sistema:

$$(P_6)\quad \begin{cases} D_1\mathcal{L}_\varphi(p;\lambda)(q)=0 \ , \ \forall q\in Q \\ D_2\mathcal{L}_\varphi(p;\lambda)(\mu)=0 \ , \ \forall \mu\in M \end{cases}$$

donde $D_i\mathcal{L}_\varphi$ representa la derivada de $\mathcal{L}_\varphi$ según GATEAUX en la variable i-ésima (i = 1,2)

iv) Verificar que $(p;\lambda)\in Z\times M$ es un punto de ensilladura de $\mathcal{L}_\varphi$, es decir

$$\mathcal{L}_\varphi(p;\mu)\le\mathcal{L}_\varphi(p;\lambda)\le\mathcal{L}_\varphi(q;\lambda), \ \forall q\in Q, \ \forall\mu\in M$$

($\lambda\in M$ se llama el multiplicador de LAGRANGE asociado a la restricción " $p\in Z$").

4) <u>Otra formulación variacional del problema (P)</u>

Sean:

$$\begin{cases} Q=\left(L^2(\Omega)\right)^n \ , \ M=H_0^1(\Omega) \ , \ f\in L^2(\Omega), \\ \alpha: Q\times Q\longrightarrow \mathbb{R} \ / \ \alpha(p;q)=\int_\Omega p\times q \, dx, \\ I: Q\longrightarrow\mathbb{R} \ / \ I(q)=\frac{1}{2}\alpha(q;q), \\ \beta: Q\times M\longrightarrow\mathbb{R} \ / \ \beta(q;\mu)=-\int_\Omega \vec{q}\times\vec{\nabla}\mu \, dx, \\ \varphi: M\longrightarrow\mathbb{R} \ / \ \varphi(\mu)=-\int_\Omega f\,\mu \, dx, \\ \mathcal{L}_\varphi: Q\times M\longrightarrow\mathbb{R} \ / \ \mathcal{L}_\varphi(q;\mu)=I(q)+\beta(q;\mu)-\varphi(\mu) \end{cases}$$

i) Verificar que el problema:

$$(P_7)\quad \begin{cases} \alpha(p;q)+\beta(q;\lambda)=0\,,\ \forall q\in Q \\ \qquad \beta(p;\mu)=\varphi(\mu)\,,\ \forall \mu\in M \\ (p;\lambda)\in Q\times M \end{cases}$$

tiene una solución única $p=\vec{\nabla}u\in Q$, $\lambda=u\in M$, donde u es la solución de (P_1).

ii) La solución $(p;\lambda)$ de (P_7) es un punto de ensilladura de $\mathcal{L}_\varphi$.

iii) Mostrar que $p\in Q$ es solución de un problema de minimización con restricción, es decir:

$$\begin{cases} I(p)\leq I(q)\,,\ \forall q\in Z \\ p\in Z \end{cases}$$

con Z a determinarse.

iv) Verificar que el problema (P_7) es equivalente al problema:

$$(P_8)\begin{cases} -\vec{\nabla}\lambda+p=0 \quad \text{en } \Omega \\ \quad -\operatorname{div}(p)=f \quad \text{en } \Omega \\ \qquad \lambda/_\Gamma=0 \end{cases}$$

v) Relacionar (P_8) con (P).

VIII - FORMULACION VARIACIONAL MIXTA

Sean:

Q, M : espacios de Hilbert con Q' y M' sus duales respectivos.

$\tau : Q' \longrightarrow Q$ y $\sigma : M' \longrightarrow M$ los isomorfismos correspondientes (Teorema de representación de RIESZ).

$\alpha : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$, forma bilineal y contínua.

$\beta : Q \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, forma bilineal y contínua.

$\psi \in Q'$, $\varphi \in M'$

El problema variacional mixto (ó primal dual) consiste en encontrar $(p;\lambda) \in Q \times M$ /

(P) $$\begin{cases} \alpha(p;q) + \beta(q;\lambda) = \psi(q), \ \forall q \in Q \\ \beta(p;\mu) = \varphi(\mu), \ \forall \mu \in M \end{cases}$$

1)

i) Existe un operador $A : Q \longrightarrow Q$, lineal y contínuo/

$$\begin{cases} (Ap;q)_Q = \alpha(p;q), \ \forall p, q \in Q \\ \|A\| = \|\alpha\| \end{cases}$$

ii) Existe un operador $B : Q \longrightarrow M$, lineal y contínuo /

$$\begin{cases} (Bq;\mu)_M = \beta(q;\mu), \ \forall q \in Q, \forall \mu \in M \\ \|B\| = \|\beta\| \end{cases}$$

iii) (P) $\Longleftrightarrow$ (P_1) $$\begin{cases} A(p) + B^*(\lambda) = \tau(\psi) \\ B(p) = \sigma(\varphi) \end{cases}$$

donde $B^* : M \longrightarrow Q$ es el operador adjunto de B definido por:

$$(Bq;\mu)_M = (q; B^*\mu)_Q, \ \forall q \in Q, \forall \mu \in M$$

iv) Ker (B) = $\{q \in Q \,/\, \beta(q;\mu) = 0, \forall \mu \in M\}$ $(= Z)$

2) Verificar que las dos condiciones siguientes son equivalentes ($b > 0$) :

i) $\displaystyle \sup_{q \in Q - \{0\}} \frac{|\beta(q;\mu)|}{\|q\|_Q} \geq b \|\mu\|_M, \forall \mu \in M$ (condición de BREZZI)

ii) $\|B^*\mu\| \geq b \|\mu\|_M, \forall \mu \in M$

3) Si β verifica la condición de BREZZI entonces:

$$\begin{cases} \text{i) } B^* : M \longrightarrow \operatorname{Im} B^* \subset Q \text{ es un isomorfismo} \\ \text{ii) } \operatorname{Im}(B^*) = (\operatorname{Ker}(B))^{\perp} \\ \text{iii) } B : Q \longrightarrow M \text{ es sobre} \end{cases}$$

4) Verificar que las tres condiciones son equivalentes $(k>0,\ \bar{k}>0)$:

$$\begin{cases} \text{i)} \begin{cases} \displaystyle\sup_{q\in Q-\{0\}} \frac{|\beta(q;\mu)|}{\|q\|_Q} \geq k\,\|\mu\|_M\,,\ \forall \mu\in M \\ \displaystyle\sup_{\mu\in M-\{0\}} \frac{|\beta(q;\mu)|}{\|\mu\|_M} \geq \bar{k}\,\|q\|_Q\,,\ \forall q\in Q \end{cases} \\ \text{ii)} \begin{cases} \|B^*\mu\|_Q \geq k\,\|\mu\|_M\,,\ \forall\mu\in M \\ \|Bq\|_M \geq \bar{k}\,\|q\|_Q\,,\ \forall q\in Q \end{cases} \\ \text{iii)} \begin{cases} B \text{ y } B^* \text{ son isomorfismos con:} \\ \qquad \|B^{-1}\| \leq 1/k\,,\ \ \|(B^*)^{-1}\| \leq 1/\bar{k} \end{cases} \end{cases}$$

5) <u>Teorema de BREZZI</u>

Si β verifica la condición de BREZZI y α es Z-elíptica (ó coerciva sobre Ker $(B)\subset Q$) entonces:

si $p = p_0 + p_1 \in Q \Big/ \begin{cases} p_0 \in \operatorname{Ker}(B) \\ p_1 \in (\operatorname{Ker}(B))^{\perp} \end{cases}$ se tiene

i) $(p;\lambda) \in Q\times M$ es solución de (P) ó (P_1) $\Longleftrightarrow$

$$(P_2)\quad \begin{cases} B\,p_1 = \sigma(\varphi) \\ \alpha(p_0;q) = \psi(q) - \alpha(p_1;q)\,,\ \forall q\in Z \\ B^*\lambda = \tau(\psi) - A(p) \end{cases}$$

ii) Existen únicos $p_0\in Z,\ \ p_1\in Z^{\perp}\,,\ \lambda\in M$ solución de (P_2)

6) Sean:

$$\begin{cases} I : Q \longrightarrow \mathbb{R} \,/\ I(q) = \frac{1}{2}\alpha(q;q) - \psi(q) \\ \mathcal{L} : Q\times M \longrightarrow \mathbb{R} \,/\ \mathcal{L}(q;\mu) = I(q) + \beta(q;\mu) - \varphi(\mu)\ \text{(Lagrangiano)} \end{cases}$$

Si se tienen las mismas hipótesis que en 5) y además α es simétrica y no negativa sobre Q

$(\alpha(q;q) \geq 0, \forall q\in Q)$ entonces:

i) $\mathcal{L}$ tiene un único punto de ensilladura que resulta ser la solución del problema mixto, es decir:

$$(P_3)\begin{cases} \mathcal{L}_\varphi(p;\mu) \leq \mathcal{L}_\varphi(p;\lambda) \leq \mathcal{L}_\varphi(q;\lambda), \forall q \in Q, \forall \mu \in M \\ p \in Q, \quad \lambda \in M \end{cases}$$

ii) Existe un único $p \in Z$ solución del problema de mínimo :

$$(P4) \quad \begin{cases} I(p) \leq I(q), \ \forall q \in Z \\ p \in Z \end{cases}$$

iii) La solución $p \in Z$ de (P_4) es el primer argumento del único punto de ensilladura $(p;\lambda)$ de $\mathcal{L}_\varphi$

7) Aplicar el Teorema de BREZZI en la formulación variacional mixta de la elasticidad (Ver la práctica con idéntico título).

8) Aplicar el Teorema de BREZZI en la formulación variacional mixta del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u/_\Gamma = 0 \end{cases}$$

(Ver la práctica con idéntico título).

IX - LAS INECUACIONES VARIACIONALES Y SU APLICACION A PROBLEMAS DE CONTROL OPTIMO

Introducción:

Sean:
$$\begin{cases} V: \text{espacio de HILBERT con dual } V'. \\ a: V \times V \longrightarrow R, \text{ forma bilineal, contínua } \left(|a(u;v)| \leq M \|u\| \|v\|, \right. \\ \left. \forall u,v \in V, \quad M>0 \right), \text{ coerciva } \left(a(v;v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V, \alpha > 0 \right) \\ L \in V' \end{cases}$$

Por el teorema de LIONS-STAMPACCHIA existe un único elemento $y \in V$ solución de la ecuación variacional:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} a(y;v) = \langle L;v \rangle, \forall v \in V \\ y \in V \end{cases}$$

Sea $A: V \longrightarrow V'$ el operador lineal y contínuo definido por:

$$\langle A(u);v \rangle = a(u;v), \forall u,v \in V.$$

1) $\begin{cases} \text{i) } y \text{ es solución de } (P_1) \Longleftrightarrow Ay = L \text{ en } V' \\ \text{ii) } A \text{ es un isomorfismo de } V \text{ en } V' \end{cases}$

Definición de un problema de control y sus propiedades:

Sean:
$$\begin{cases} \mathcal{U} : \text{espacio de Hilbert (espacio de los controles),} \\ u \in \mathcal{U} : \text{Control,} \\ B: \mathcal{U} \longrightarrow V', \text{ operador lineal y contínuo} \end{cases}$$

Sea un sistema (físico, mecánico, etc) regido por el operador A. Para cada control $u \in \mathcal{U}$ (fijo) el estado del sistema está dado por $y(u)$, única solución de:

$$(P_2) \qquad A(y(u)) = L + B(u)$$

Se define la observación $z(u) \in H$ del estado del sistema $y(u) \in V$ correspondiente al control $u \in \mathcal{U}$ por:

$$z(u) = C(y(u))$$

donde:

$$\begin{cases} \text{H: espacio de Hilbert} \\ \text{C: } V \longrightarrow H\text{, operador lineal y contínuo} \end{cases}$$

Para todo control $u \in U$, se define el costo a minimizar por:

$$J : U_{ad} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; J(u) = \|Z(u) - Z_0\|_H^2 + (N(u); u)_U$$

donde: $Z_0 \in H$,

$U_{ad} \subset U$: conjunto convexo, cerrado y no vacío (U_{ad} es el conjunto de controles admisibles),

$N: U \longrightarrow U$, operador lineal, contínuo, simétrico y coercivo $\left(\exists \beta > 0 / (Nv; v)_U \geq \beta \|v\|_U^2, \forall v \in U\right)$

Entonces, el problema de control óptimo está dado por:

$$(P_3) \quad \begin{cases} J(u) \leq J(v), \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

2) $y(u)$ es solución de (P_2) $\Longleftrightarrow$ $y(u)$ es solución del problema variacional:

$$(P_4) \quad \begin{cases} a(y(u); v) = \langle L; v \rangle + \langle B(u); v \rangle, \forall v \in V \\ y(u) \in V \end{cases}$$

3) La aplicación $u \in U \longrightarrow y(u) \in V$ es afín, es decir:

$$\begin{cases} y(u) = C_1 + C_2 u \\ \text{Con } C_1 \in V,\ C_2 : U \longrightarrow V \text{ operador lineal y contínuo} \end{cases}$$

4) El operador J puede escribirse bajo la forma:

$$J(v) = \frac{1}{2}\, \Pi(v; v) - L(v) + \|Z_0 - Z(0)\|_H^2, \forall v \in U$$

donde:

$$\begin{cases} \Pi(u; v) = 2\left(Z(u) - Z(0); Z(v) - Z(0)\right)_H + 2\,(Nu; v)_U, \forall u, v \in U \\ L(v) = 2\left(Z_0 - Z(0); Z(v) - Z(0)\right)_H, \forall v \in U \end{cases}$$

Con $\Pi(v; v) \geq (Nv; v)_U \geq \beta \|v\|_U^2, \forall v \in U$.

5) Existe un único elemento $u \in U_{ad}$ (llamado control optimal) solución del problema (P_3).

6) $u \in U_{ad}$ es solución de $(P_3) \Longleftrightarrow \begin{cases} \langle J'(u); v-u \rangle \geq 0, \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \pi(u; v-u) - L(v-u) \geq 0, \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$(P_5) \begin{cases} (Z(u) - z_0; Z(v) - Z(u))_H + (Nu; v-u)_U \geq 0, \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

7) Caso Particular ($N = 0$):

i) La forma bilineal π es no negativa $(\pi(v;v) \geq 0, \forall v \in U)$

ii) Si U_{ad} es además acotado, existe un sub-conjunto X no vacío de U_{ad} /

$$(P_6) \qquad J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in U_{ad}} J(v), \quad \forall u \in X.$$

iii) X es un conjunto convexo y cerrado de U que se llama el conjunto de los controles optimales.

Complementar este punto 7) con la práctica: "Inecuaciones variacionales con formas bilineales no negativas"

8) Sean:

$$\begin{cases} H' : \text{dual de } H, \quad U' : \text{dual de } U, \\ A^* : V \longrightarrow V', \text{ operador dual de } A \text{ (es un isomorfismo)} \\ B^* : V \longrightarrow U', \text{ operador dual de } B \\ C^* : H' \longrightarrow V', \text{ operador dual de } C \\ \Lambda_H : H \longrightarrow H', \text{ el isomorfismo canónico } (\langle \Lambda_H \varphi; \psi \rangle_{H' \times H} = (\varphi; \psi)_H) \\ \Lambda_U : U \longrightarrow U', \text{ el isomorfismo canónico} \end{cases}$$

Además, por definición se tienen:

$$\begin{cases} \text{a)} \ \langle C^* \Lambda_H C u; v \rangle_{V' \times V} = \langle \Lambda_H C u; C v \rangle_{H' \times H} = (Cu; Cv)_H, \forall u, v \in V \\ \text{b)} \ \langle A^* u; v \rangle_{V' \times V} = \langle A v; u \rangle_{V' \times V} = a(v; u), \ \forall u, v \in V \end{cases}$$

Verificar:

i) (P5) $\Longleftrightarrow$ (P7) $\begin{cases} \langle C^* \Lambda_H (Z(u)-Z_0); y(v)-y(u) \rangle_{V' \times V} + (Nu; v-u)_U \geq 0, & \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases}$

ii) Para todo control $v \in U$, se define el estado adjunto $p(v) \in V$ por:

$$A^* p(v) = C^* \Lambda_H (Z(v) - Z_0)$$

entonces:

$$(P_7) \Longleftrightarrow (P_8) \begin{cases} (\Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu; v-u)_U \geq 0, \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \langle B^* p(u) + \Lambda_U Nu ; v-u \rangle_{U' \times U} \geq 0, \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

iii) Utilizando los resultados anteriores, se tiene:

$$J'(u) = B^* p(u) + \Lambda_U Nu \in U'$$

iv) Resumiendo, se tiene:

u es el control optimal $\Longleftrightarrow$

$$(P9) \begin{cases} A\, y(u) = L + Bu, \quad Z(u) = C\, y(u) \\ A^* p(u) = C^* \Lambda_H (Z(u) - Z_0) \\ (\Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu; v-u)_U \geq 0, \forall v \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

9) <u>Aplicación</u>:

Sean:

$$\begin{cases} V = H_0^1(\Omega), \ U_{ad} = H = U = L^2(\Omega) \text{ que se identifica con su dual,} \\ a(u;v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v \, dx, \quad A = -\Delta \quad (\Delta: \text{laplaciano}) \\ \Lambda_U = \text{Identidad}, \quad \Lambda_H = \text{Identidad} \\ C: V \longrightarrow H \text{ inyección,} \\ B: U \longrightarrow V \text{ identidad} \\ N: U \longrightarrow U \text{ identidad} \\ Z_0 \in L^2(\Omega), \quad L \in L^2(\Omega) \subset V' \\ J(v) = \int_\Omega (y(x,v) - Z_0(x))^2 dx + \int_\Omega v^2(x)\, dx \end{cases}$$

Entonces:

i) (P_9) es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones a derivadas parciales:

$$\begin{cases} p + Ay = L \text{ en } \Omega \\ A^*p - y = -Z_o \text{ en } \Omega \\ y/_\Gamma = 0 \, , \; p/_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Siendo el control optimal : $u = -p$.

ii) Si $N: U \longrightarrow U$, no es la identidad como en i), pero es un operador lineal, continuo, simétrico y coercivo, entonces (P_9) es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones a derivadas parciales:

$$\begin{cases} Ay + N^{-1} p = L \text{ en } \Omega \\ A^* p - y = -Z_o \text{ en } \Omega \\ y/_\Gamma = 0 \, , \; p/_\Gamma = 0 \end{cases}$$

siendo el control optimal: $u = -N^{-1}p$.

OBSERVACION FINAL

Numerosos otros temas de la Mecánica del contínuo (como ser: Problemas de Frotamiento, Problema de SIGNORINI, Plasticidad, Elastoplasticidad, etc.) en los cuales la teoría de las inecuaciones variacionales puede aplicarse, no han sido considerados aquí, para tratarse con mayor amplitud en un posterior curso más específico "Las inecuaciones Variacionales y la Teoría Matemática de la Mecánica del Contínuo". Lo mismo podríamos decir sobre problemas de frontera libre (como ser: problemas de frontera libre en Hidráulica, en teoría de control, en semiconductores, en física del plasma, problemas de dominio optimal, etc).

Además, diversos temas que complementan y extienden los temas y métodos desarrollados en el presente curso (algunos de los cuales serán expuestos oportunamente) son:

1. Diversos temas presentados en este cuadernillo.
2. Función polar y sub-diferenciabilidad. El problema primal y el problema dual en optimización.
3. Langrangiano y punto de ensilladura. La dualidad a través de los problemas de Máx-Mín.
4. El método de los elementos finitos.
5. La ecuación de Laplace.
6. Minimización de funcionales y su aproximación.
7. El Problema de la reflexión y de la refracción a través del cálculo de variaciones.
8. El cálculo de variaciones en la Mecánica y en la Física.
9. Estudio de la regularidad de inecuaciones variacionales y su aplicación al problema del obstáculo.
10. El método de penalización en inecuaciones variacionales.
11. El método de regularización en inecuaciones variacionales.
12. Inecuaciones variacionales semi-coercivas.
13. Inecuaciones variacionales de orden cuarto.

Una extensa bibliografía sobre los sujetos tratados en el curso, como asimismo su redacción final, aparecerán en la colección CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi".

Para finalizar, cabe destacarse que todos los problemas estudiados hasta el presente han sido problemas estacionarios, es decir sin la presencia de la variable tiempo, de gran importancia en determinados problemas físicos. Un primer Curso sobre las inecuaciones variacionales de evolución y sus aplicaciones será realizado en Rosario por el Profesor G. DUVAUT de la Universidad Pierre-et-Marie-Curie (París VI)-Francia, durante el segundo semestre del corriente año 1980.-

Domingo A. TARZIA
Febrero de 1980.-