ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le problème de Stefan à deux phases.* Note (*) de **Domingo Alberto Tarzia,** présentée par Georges Duvaut.

On donne ici les résultats d'existence et d'unicité des inéquations variationnelles correspondant au problème de Stefan à deux phases, dans deux situations concrètes. L'une avait été proposé par G. Duvaut [1]. On étudie aussi le comportement de ces deux solutions lorsque la chaleur latente de fusion tend vers zéro et lorsque le temps tend vers l'infini.

We give here some results about the existence and unicity of variational inequalities which concern the two-phase Stefan problem in two real situations. One of them was proposed by G. Duvaut [1]. *We study too the behavior of these two solutions when the latent heat of fusion goes to zero and when the time goes to infinity.*

1. Énoncé du problème. — Soit Ω la région ouverte de R^3, de frontière Γ régulière, occupée par le matériau. On suppose Γ composée de deux parties Γ_1 et Γ_2, et Γ_1 de mesure strictement positive. On désigne par $\theta(x, t), (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, la température. On suppose que la température du changement de phase (entre la phase solide et la phase liquide) est représentée par $\theta = 0$ (zéro degré centigrade). On cherche un champ de température θ [2] qui satisfait :

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \theta_1(x, t) < 0 & \text{si } (x, t) \in Q_1, \\ 0 & \text{si } (x, t) \in \Sigma, \\ \theta_2(x, t) > 0 & \text{si } (x, t) \in Q_2. \end{cases} \tag{1}$$

$$c_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - k_i \Delta \theta_i = g \quad \text{dans } Q_i, \qquad i = 1, 2. \tag{2}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \qquad (k_1 \operatorname{grad} \theta_1 - k_2 \operatorname{grad} \theta_2).\mathbf{n} = L\mathbf{V}.\mathbf{n} \quad \text{sur } \mathscr{L}(t). \tag{3}$$

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n}\Big/\Gamma_2 = \tilde{h} \quad \text{si } \theta/\Gamma_2 < 0, \qquad -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n}\Big/\Gamma_2 = \tilde{h} \quad \text{si } \theta/\Gamma_2 > 0. \tag{4}$$

$$\begin{cases} -k_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial n}\Big/\Gamma_1 = \alpha(k_1 \theta_1 - b_0) & \text{si } \theta/\Gamma_1 < 0, \\ -k_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial n}\Big/\Gamma_1 = \alpha(k_2 \theta_2 - b_0) & \text{si } \theta/\Gamma_1 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \tag{6}$$

où

(7) $k_i > 0$, conductivité calorifique dans Q_i; $\mathbf{n}$: vecteur normal à $\mathscr{L}(t)$; $c_i > 0$, chaleur spécifique dans Q_i; $L > 0$: chaleur latente de fusion; $\mathbf{V}$, vitesse de propagation de $\mathscr{L}(t)$ dans R^3; $b_0 = k_2 b^+ - k_1 b^-$ sur Γ_1; $b = b(x)$, température donnée sur Γ_1 qui prend des valeurs positives et négatives; $\tilde{h} = \tilde{h}(x, t)$, flux de chaleur donné sur $\Gamma_2 \times (0, T)$; $g = g(x, t)$, apport d'énergie par unité de temps donné dans Q; $\alpha > 0$, coefficient positif; θ_0 : température initiale.

2. Formulation variationnelle. — Introduisons le cadre fonctionnel suivant :

$$\begin{cases} V = H^1(\Omega), & K = \{ v \in V \,/\, v/\Gamma_1 = b_0 \}, \\ H = L^2(\Omega), & V_0 = \{ v \in V \,/\, v/\Gamma_1 = 0 \}, \end{cases} \tag{8}$$

et les notations

$$
(9)\quad \begin{cases}
(u, v)=\int_\Omega uv\,dx, \qquad a(u, v)=\int_\Omega \operatorname{grad} u.\operatorname{grad} v\,dx,\\
a_\alpha(u, v)=a(u, v)+\alpha\int_{\Gamma_1} uv\,dx, \qquad \beta(v)=\frac{c_2}{k_2}\,v^+-\frac{c_1}{k_1}v^-,\\
g_{0L}=c_2\,\theta_0^+-c_1\,\theta_0^-+LH_0(\theta_0), \quad H_0 : \text{fonction de Heaviside},\\
G_L(t)=g_{0L}+\int_0^t g(\tau)\,d\tau, \qquad h(t)=\int_0^t \tilde{h}(\tau)\,d\tau,\\
\langle f_L(t), v\rangle=\langle G_L(t), v\rangle-\int_{\Gamma_2} h(t)\,v\,d\gamma, \qquad j(v)=\int_\Omega v^+\,dx,\\
\langle f_{L\alpha}(t), v\rangle=\langle f_L(t), v\rangle+\alpha t\int_{\Gamma_1} b_0\,v\,d\gamma.
\end{cases}
$$

Si on effectue le changement de fonction inconnue

$$
(10)\qquad u(t)=\int_0^t [k_2\,\theta^+(\tau)-k_1\,\theta^-(\tau)]\,d\tau,
$$

on déduit que u satisfait

$$
(11)\quad \begin{cases}
(\beta(u'(t)), v-u'(t))+a_\alpha(u(t), v-u'(t))+L\,j(v)-L\,j(u'(t))\geqq\langle f_{L\alpha}(t), v-u'(t)\rangle,\\
\forall v\in V, \qquad u'(t)\in V, \qquad u(t)\in V, \qquad u(0)=0.
\end{cases}
$$

Variante. — Si on remplace la condition (5) par

$$
(5\ bis)\qquad \theta/\Gamma_1=b,
$$

les autres conditions restant inchangées, on est conduit, pour u, défini par (10), à la formulation variationnelle suivante [1] :

$$
(12)\quad \begin{cases}
(\beta(u'(t)), v-u'(t))+a(u(t), v-u'(t))+Lj(v)-Lj(u'(t))\geqq\langle f_L(t), v-u'(t)\rangle,\\
\forall v\in K, \qquad u'(t)\in K, \qquad \frac{u(t)}{t}\in K, \qquad u(0)=0.
\end{cases}
$$

3. Propriétés. — On obtient les résultats suivants :

Propriété 1. — L'opérateur β est une application biunivoque et bicontinue de H dans H, et il est fortement monotone, c'est-à-dire :

$$
(13)\qquad \exists\, c_0>0\,/\,(\beta(v)-\beta(u), v-u)\geqq c_0\,\|v-u\|_H^2, \qquad \forall u, v\in H.
$$

En plus, il existe $\psi : H\to R$ qui est Gâteaux-différentiable tel que $\psi'=\beta$ et ψ est strictement convexe.

Propriété 2. — Il existe un seul élément u_1 solution du problème

$$
(14)\qquad (\beta(u_1), v-u_1)+L\,j(v)-L\,j(u_1)\geqq(g_{0L}, v-u_1), \qquad \forall v\in V, \qquad u_1\in V,
$$

ce qui est caractérisé par

$$J(u_1) \leqq J(v), \qquad \forall v \in V, \quad u_1 \in V, \tag{15}$$

où

$$J(v) = (\psi + L\, j)(v) - (g_{0L}, v). \tag{16}$$

De plus, u_1 est donné par

$$u_1 = k_2\, \theta_0^+ - k_1\, \theta_0^- \in K. \tag{17}$$

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses* $f_{L\alpha}$, $f'_{L\alpha} \in L^2(0, T; V')$, $f''_{L\alpha} \in L^1(0, T; V')$ *et* $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, *il existe un seul élément* $u_{L\alpha}$ *solution de* (11) *avec* $u'_{L\alpha}(0) = u_1$, $\forall \alpha > 0$, $\forall L > 0$.

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 1 *et* $f''_L \in L^\infty(0, T; V')$ *on a, lorsque* $\alpha \to +\infty$:

$$\begin{cases} u_{L\alpha} \to u_L \text{ et } u'_{L\alpha} \to u'_L & \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible étoile,} \\ u''_{L\alpha} \to u''_L & \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible,} \end{cases} \tag{18}$$

où u_L *est la seule solution de* (12) *avec* $u'_L(0) = u_1$, $\forall L > 0$.

Remarque 1. — L'existence de la solution u_L de (12) peut être démontrée directement en utilisant un résultat de H. Brézis [3], sous les hypothèses f_L, $f'_L \in L^2(0, T; V'_0)$, $f''_L \in L^1(0, T; V'_0)$ et $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, et les propriétés 1 et 2.

THÉORÈME 3. — *Pour le cas* $g = 0$ *et* $\tilde{h} = 0$, *et sous les hypothèses du théorème* 2, *on a :*

$$\lim_{t \to +\infty} \| u'_L(t) - u_\infty \|_H = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \left\| \frac{u_L(t)}{t} - u_\infty \right\|_V = 0, \qquad \forall L > 0. \tag{19}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \| u'_{L\alpha}(t) - u^\alpha_\infty \|_H = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \left\| \frac{u_{L\alpha}(t)}{t} - u^\alpha_\infty \right\|_V = 0, \qquad \forall L, \alpha > 0, \tag{20}$$

où u_∞ et u^α_∞ sont les solutions des problèmes (21) et (22) respectivement :

$$a(u_\infty, v - u_\infty) = 0, \qquad \forall v \in K, \quad u_\infty \in K. \tag{21}$$

$$a_\alpha(u^\alpha_\infty, v) = \alpha \int_{\Gamma_1} b_0\, v\, d\gamma, \qquad \forall v \in V, \quad u^\alpha_\infty \in V. \tag{22}$$

Remarque 2. — La température θ_∞ définie par

$$\theta_\infty = \frac{1}{k_2} u^+_\infty - \frac{1}{k_1} u^-_\infty \tag{23}$$

représente la solution stationnaire du problème de Stefan à deux phases [4].

PROPRIÉTÉ 3. — Le comportement de la température $\theta_L(t)$ [solution des équations (2) à (4), (5 *bis*) et (6)] lorsque le temps tend vers l'infini est donné par

$$\lim_{t \to +\infty} \| \theta_L(t) - \theta_\infty \|_H = 0, \qquad \forall L > 0. \tag{24}$$

On a un résultat analogue pour la température $\theta_{L\alpha}(t)$, solution des équations (2) à (6).

Remarque 3. — Le théorème 3 nous donne le comportement à l'infini de la solution d'une inéquation variationnelle d'évolution du type II [5].

PROPRIÉTÉ 4. — Les applications $L \to u_L \in L^\infty(0, T; V)$ et $L \to u'_L \in L^2(0, T; H)$ sont lipschitziennes.

PROPRIÉTÉ 5. — On peut aussi considérer le comportement des solutions $u_{L\alpha}$ et u_L lorsque la chaleur latente de fusion L tend vers zéro. Ces résultats peuvent être résumés par le tableau suivant :

$$\begin{tikzcd}
u_{L\alpha}(t)[u'_{L\alpha}(t)] \arrow[rr, "t\to+\infty"] \arrow[dr, "L\to 0"] & & u^\alpha_\infty = u^{L\alpha}_\infty \\
& u_\alpha(t)[u'_\alpha(t)] \arrow[r, "\alpha\to+\infty"] & w(t)[w'(t)] \arrow[dr, "t\to+\infty"] \\
u_L(t)[u'_L(t)] \arrow[uu, "\alpha\to+\infty"] \arrow[ur, "L\to 0"] \arrow[rr, "t\to+\infty"] & & u_\infty = u^L_\infty \arrow[uu, "\alpha\to+\infty"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 4. — On voit que chaque fois qu'on fait la limite $t \to +\infty$, avec $L = \text{Cte}$, on obtient une limite qui est indépendante de L.

(*) Remise le 21 mai 1979 et acceptée, après révision, le 28 mai 1979.

[1] G. DUVAUT, *Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus* (2e *Congrès français de Mécanique*, Toulouse, 1975, Rapport de recherche n° 185, I.R.I.A., 1976).

[2] $$\begin{cases} Q_1 = \{(x, t) \in Q / \theta(x, t) < 0\}, \qquad Q_2 = \{(x, t) \in Q / \theta(x, t) > 0\}, \\ \mathscr{L}(t) = \{x \in \Omega / \theta(x, t) = 0\} \text{ frontière libre inconnue } a\ priori, \\ \Sigma = \bigcup_{0<t<T} \mathscr{L}(t) \times \{t\}. \end{cases}$$

[3] H. BRÉZIS, *J. Math. Pures et Appl.*, 51, 1972, p. 1-168.

[4] D. A. TARZIA, *El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Cap. 2, *Trabajo Especial de la Licenciatura en Física*, Fac. de Ciencias Ex. e Ing., Univ. Nac. de Rosario, décembre 1977 [*Mat. Notae* (à paraître)].

[5] G. DUVAUT et J.-L. LIONS, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.

[6] A. FRIEDMAN, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 132, 1968, p. 51-87.

[7] D. A. TARZIA, *Sur le problème de Stefan à deux phases* (*Thèse de* 3e *cycle*, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, mars 1979).

Laboratoire associé de Mécanique théorique, Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, *place Jussieu*, 75230 *Paris Cedex* 05;
C.E.B.T.P., 12, *rue Brancion*, 75737 *Paris Cedex* 15
et *Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,*
Universidad Nacional de Rosario,
Avenida Pellegrini 250, 2000 *Rosario, Argentina.*