Bollettino U. M. I.
(6) 2-B (1983), 589-603

Etude de l'inéquation variationnelle proposée par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases, II.

DOMINGO ALBERTO TARZIA (*)

Sunto. – *Si studia il comportamento delle soluzioni delle disequazioni variazionali paraboliche di tipo II riguardanti il problema di Stefan a due fasi in vari casi quando il calore latente di fusione tende a zero e quando il tempo tende all'infinito.*

1. – Introduction.

On continue le travail [31], et toutes les notations qui ne changent pas ne seront pas répetées ici. Par $(I - n)$, on fera reference à la formule (n) de [31].

Soient u_L et $u_{L\alpha}$ les solutions des inéquations variationnelles (I-27) et (I-28) respectivement, pour chaque $L > 0$, $\alpha > 0$. Le plan de ce travail est le suivant:

(i) On démontre que les applications $L \to u_L(u_{L\alpha}) \in L^\infty(0, T; V)$ et $L \to u'_L(u'_{L\alpha}) \in L^2(0, T; H)$ sont lipschitziennes pour chaque $\alpha > 0$

(ii) On étudie le comportement de $u_L(u_{L\alpha})$ lorsque $L \to 0$, et on démontre que $u_L(u_{L\alpha})$ converge, dans des espaces convenables (9), vers un élément $\omega(\omega_\alpha)$ qui est solution d'une équation variationnelle laquelle étudie, après un changement de variable, le cas d'évolution du problème de Stefan dont la chaleur latente de fusion est négligeable, et tenant compte de la condition (I-7) ((I-7 bis)) sur Γ_1. Enfin, on démontre que $u_\alpha \to \omega$ lorsque $\alpha \to +\infty$, dans les espaces (23).

(iii) Pour le cas $g = 0$ et $\tilde{h} = 0$, on étudie le comportement asymptotique des inéquations variationnelles paraboliques de type II

(*) Ce travail a été fini d'être écrit pendant la durée d'une bourse du CNR italien (G.N.F.M.) que l'auteur a eu à l'Istituto di Matematica « U. Dini », Università degli Studi di Firenze.

correspondantes aux fonctions u_L, ω, $u_{L\alpha}$ et ω_α. On démontre que $u_L(t)$ et $\omega(t)$ convergent vers u_∞, et que $u_{L\alpha}(t)$ et $\omega_\alpha(t)$ convergent vers u_∞^α, selon (32). On remarque que le comportement asymptotique est indépendant de la chaleur latente de fusion $L > 0$. En plus, on obtient le comportement asymptotique des températures $\theta_L(t)$ et $\theta^*(t)$ vers θ_∞, et des températures $\theta_{L\alpha}(t)$ et $\theta_\alpha(t)$ vers θ_∞^α, tous dans $L^2(\Omega)$ fort.

2. – Comportement avec la chaleur latente de fusion des inéquations variationnelles correspondantes à deux problèmes de Stefan à deux phases.

THÉORÈME 1. – i) *Les applications* $L > 0 \to u_L \in L^\infty(0, T; V)$ *et* $L > 0 \to u'_L \in L^2(0, T; H)$ *sont lipschitziennes, c'est-à-dire si* u_{L_i} *est la solution de l'inéquation variationnelle* (I-27) *pour* L_i $(i = 1, 2)$, *alors il existe deux constantes* A *et* B (*indépendantes de* L_1 *et* L_2) *telles que*:

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} a) & \|u'_{L_1} - u'_{L_2}\|_{L^2(0,T;H)} \leqslant A|L_2 - L_1| \,. \\ b) & \|u_{L_1} - u_{L_2}\|_{L^\infty(0,T;V)} \leqslant B|L_2 - L_1| \,. \end{cases}$$

ii) *Des estimations analogues aux* (1) *sont aussi valables pour les fonctions* $u_{L_i\alpha}$, *solution de l'inéquation variationnelle* (I-28) *pour* L_i $(i = 1, 2)$.

DÉMONSTRATION. – i) On note $u_i = u_{L_i}$ $(i = 1, 2)$. Si on prend $v = u'_2(t) \in K$ dans l'inéquation variationnelle correspondant à u_1, et $v = u'_1(t) \in K$ dans l'inéquation variationnelle correspondant à u_2, on les ajoute, on tient compte des propriétés (I-32), (I-36) et du fait que

$$\text{(2)}\qquad \langle f_{L_2}(t) - f_{L_1}(t), v\rangle = (g_{0L_2} - g_{0L_1}, v) = (L_2 - L_1)(H_0(\theta_0), v) \,,$$

on utilise l'inégalité (I-57) avec $\varepsilon = (C_0)^{1/2}$, et après on intègre sur $[0, t]$, alors il en résulte:

$$\text{(3)}\qquad C_0\int_0^t \|\delta'(s)\|_H^2\, ds + \alpha_0\|\delta(t)\|_V^2 \leqslant \frac{4T}{C_0}\,\text{mes}(\Omega)(L_2 - L_1)^2 \,, \quad \forall t \in [0, T] \,,$$

où

$$\text{(4)}\qquad \delta(t) = u_2(t) - u_1(t) \in V \,, \qquad \delta'(t) = u'_2(t) - u'_1(t) \in V_0 \,,$$

$$\text{(5)}\qquad \alpha_0 > 0 \colon\ a(v, v) \geqslant \alpha_0\|v\|_V^2 \,, \qquad \forall v \in V_0 \,.$$

De (3), on en déduit les estimations (1) avec:

$$(6)\qquad A = 2\,[T\,\mathrm{mes}(\Omega)]^{1/2}/C_0\,, \qquad B = 2\,[T\,\mathrm{mes}(\Omega)/\alpha_0\,C_0]^{1/2}\,.$$

ii) Avec une méthode analogue à celle de la partie i), on trouve que la constante de Lipschitz pour $\|u'_{L_2\alpha} - u'_{L_1\alpha}\|_{L^2(0,T;H)}$ est A, définie par (6), et que celle de $\|u_{L_2\alpha} - u_{L_1\alpha}\|_{L^\infty(0,T;V)}$ est $B_\alpha = B(\alpha_0/\lambda_\alpha)^{1/2}$. ∎

Si on introduit les notations suivantes:

$$(7)\qquad \left|\begin{aligned} &g_{00} = C_2\theta_0^+ - C_1\theta_0^-\,, \qquad G_0(t) = g_{00} + \int_0^t g(s)\,ds\,,\\ &\langle f_0(t), v\rangle = \langle G_0(t), v\rangle - \int_{\Gamma_2} h(t)\,v\,d\gamma \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(8)\qquad \langle f_L(t), v\rangle = \langle f_0(t), v\rangle + L\big(H_0(\theta_0), v\big)\,.$$

THÉORÈME 2. – *Sous les hypothèses du Théorème* I-6, *et lorsque* $L \to 0$:

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{ll} u_L \to \omega & \textit{dans } L^\infty(0,T;V) \textit{ faible étoile et } L^2(0,T;V) \textit{ faible},\\ u'_L \to \omega' & \textit{dans } L^\infty(0,T;V) \textit{ faible étoile et } L^2(0,T;V) \textit{ faible},\\ u''_L \to \omega'' & \textit{dans } L^2(0,T;H) \textit{ faible}, \end{array}\right.$$

où $\omega(t)$ *est la seule solution de l'équation variationnelle*:

$$(10)\qquad \left|\begin{aligned} &\big(\beta(\omega'(t)), v - \omega'(t)\big) + a(\omega(t), v - \omega'(t)) =\\ &\qquad\qquad = \langle f_0(t), v - \omega'(t)\rangle\,, \qquad \forall v \in K\,, \quad t \in [0,T]\,,\\ &\omega'(t) \in K\,, \quad \frac{\omega(t)}{t} \in K\,, \quad \omega(0) = 0\,. \end{aligned}\right.$$

DÉMONSTRATION. – Pour démontrer l'unicité de l'équation variationnelle (10), on utilise des méthodes classiques en supposant qu'il y en a deux solutions. Pour montrer que la fonction u_L tend vers un élément ω, qui est solution de (10), lorsque $L \to 0$, on établit des estimations à priori sur u_L qui permettent le passage à la limite.

Soit ξ la solution de l'équation variationnelle (I-55), et soit

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &z_L(t) = u_L(t) - t\xi \in V_0\,,\\ &z'_L(t) = u'_L(t) - \xi \in V_0\,, \qquad z_L(0) = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Si on choisit $v = \xi$ dans l'inéquation variationnelle correspondant à u_L, on ajoute $-(\beta(\xi), \xi - u'_L(t))$ aux deux membres, on tient compte du fait que $a(\xi, z'_L(t)) = 0$ pour $0 < L \leqslant L_0$ avec $L_0 > 0$ constante, et on utilise (I-32) et l'inégalité (I-57), alors il vient:

$$\frac{C_0}{2}\|z'_L(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[a\big(z_L(t), z_L(t)\big)\right] \leqslant c_1 + c_2\|z_L(t)\|_V + \\ + \frac{d}{dt}\left[\langle f_0(t), z_L(t)\rangle\right], \qquad t \in [0, T].$$

Si on intègre sur $[0, t]$, et on utilise (5) et l'inégalité (I-57) avec $\varepsilon = \sqrt{\alpha_0/2}$, on obtient:

$$\frac{C_0}{2}\int_0^t \|z'_L(s)\|_H^2\,ds + \frac{\alpha_0}{4}\|z_L(t)\|_V^2 \leqslant c_3 + c_4\int_0^t \|z_L(s)\|_V\,ds, \qquad \forall t \in [0, T],$$

d'où, en appliquant l'inégalité de Gronwall, il en résulte:

$$(12) \qquad \begin{cases} \|z_L(t)\|_V \leqslant c_5, & \forall t \in [0, T], \\ \displaystyle\int_0^t \|z'_L(s)\|_H^2\,ds \leqslant c_6, & \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

où les constantes c_i utilisées sont inépendantes de L.

Soit maintenant un instant $t \in [0, T)$ et un nombre $h > 0$ tel que $t + h \in [0, T]$. Si on prend $v = u'_L(t + h)$ dans (I-27) à l'instant t, et $v = u'_L(t)$ dans (I-27) à l'instant $t + h$, on les ajoute, on utilise (I-32), on intègre sur $[0, t]$, on divise par h^2 et on passe à la limite $h \to 0$, on utilise (5) et (I-57), il en résulte:

$$C_0\int_0^t \|z''_L(s)\|_H^2\,ds + \frac{\alpha_0}{4}\|z'_L(t)\|_V^2 \leqslant c_7 + c_8\int_0^t \|z'_L(s)\|_V\,ds, \qquad \forall t \in [0, T],$$

d'où, on en déduit:

$$(13) \qquad \begin{cases} \|z'_L(t)\|_V \leqslant c_9, & \forall t \in [0, T], \\ \displaystyle\int_0^t \|z''_L(s)\|_H^2\,ds \leqslant c_{10}, & \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

où les constantes c_i utilisées sont indépendantes de L.

Des estimations (12) et (13), il vient:

$$
\begin{cases} u_L, u'_L \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V) \text{ et } L^2(0, T; V), \\ u''_L \in \text{borné de } L^2(0, T; H), \end{cases} \tag{14}
$$

d'où, lorsque $L \to 0$, au moins pour une sous-suite on a (9). Alors, on a les conséquences suivantes:

$$
\begin{cases} \omega(0) = 0, & \omega'(0) = u_1, \\ \omega'(t) \in K, & \dfrac{\omega(t)}{t} \in K. \end{cases} \tag{15}
$$

Il reste encore à démontrer que ω est solution de (10). L'élément u_L vérifie l'inéquation variationnelle:

$$
\begin{cases} a(u_L(t), v - u'_L(t)) + \psi(v) - \psi(u'_L(t)) + Lj(v) - Lj(u'_L(t)) \geqslant \\ \geqslant \langle f_0(t), v - u'_L(t)\rangle + L(H_0(\theta_0), v - u'_L(t)), \quad \forall v \in K, t \in [0, T], \\ u'_L(t) \in K, \quad \dfrac{u_L(t)}{t} \in K, \quad u_L(0) = 0. \end{cases} \tag{16}
$$

Si dans (16) on choisit $v \in \mathcal{K}$, défini par (I-65), on intègre sur $[0, T]$ on utilise la semi-continuité dans V faible des applications:

$$
v \to a(v, v), \quad v \to \psi(v), \tag{17}
$$

alors, à la limite $L \to 0$, et en utilisant une méthode analogue à celle du Théorème I-6, on obtient (10).

Remarque 1. – L'existence de la solution de (10) peut être démontrée directement pour un raisonnement similaire à celui fait au Théorème I-7 en utilisant [4], mais le passage à la limite $L \to 0$ nous donne un fait thermique concret.

Remarque 2. – On étudie la température $\theta^* = \theta^*(x, t)$, définie dans Q, vérifiant les conditions (I-3), (I-5 bis), (I-7), (I-8) et (I-10), où:

$$
\begin{cases} \text{i)} \ \theta_1^* = 0, & \text{ii)} \ \theta_2^* = 0, \\ \text{iii)} \ k_1 \nabla\theta_1^* \cdot \boldsymbol{n} - k_2 \nabla\theta_2^* \cdot \boldsymbol{n} = 0. \end{cases} \tag{I-5 bis}
$$

Si l'on fait le changement de fonction inconnue, définie par:

$$\omega(x,t)=\int_0^t[k_2\theta^{*+}(x,s)-k_1\theta^{*-}(x,s)]\,ds\,, \tag{18}$$

on obtient que ω est solution de l'équation variationnelle (10).

Remarque 3. – Le problème (I-3), (I-5 bis), (I-7), (I-8) et (I-10) peut se résoudre en faisant un changement de fonction inconnue différent à celui de (18). Il est donné par:

$$\omega^*=k_2\theta^{*+}-k_1\theta^{*-}. \tag{19}$$

Lemme 3. – *On généralise les estimations* (1) *pour le cas* $L=0$ *en obtenant*:

$$\begin{cases}\|u_L'-\omega'\|_{L^2(0,T;V)}\leqslant AL\,, & \forall L>0\,,\\ \|u_L-\omega\|_{L^\infty(0,T;V)}\leqslant BL\,, & \forall L>0\,,\end{cases} \tag{20}$$

où A,B *sont donnés par* (6).

Remarque 4. – Le comportement de la solution du problème de Stefan pour le cas unidimensionnel et lorsque la chaleur latente de fusion tend vers zéro a été étudié dans [26].

Théorème 4. – *Sous les hypothèses du Théorème* I-6, *on obtient pour les fonctions* $u_{L\alpha}$ *des résultats similaires aux précédents dans lequels le rôle de la fonction* ω *est pris par la fonction* ω_α *qui est la seule solution, pour chaque* $\alpha>0$, *de l'équation variationnelle*:

$$\begin{cases}\big(\beta(\omega_\alpha'(t)),v\big)+a_\alpha(\omega_\alpha(t),v)=\langle f_{0\alpha}(t),v\rangle\,, & \forall v\in V,\quad t\in[0,T]\,,\\ \omega_\alpha'(t)\in V\,,\quad \omega_\alpha(t)\in V\,,\quad \omega_\alpha(0)=0\,,\end{cases} \tag{21}$$

avec $f_{0\alpha}$ *défini par*:

$$\langle f_{0\alpha}(t),v\rangle=\langle f_0(t),v\rangle+\alpha t\int_{\Gamma_1}b_0v\,d\gamma\,. \tag{22}$$

Théorème 5. – *Lorsque* $\alpha\to+\infty$, *on a que*:

$$\begin{cases}\omega_\alpha\to\omega & \textit{dans } L^\infty(0,T;V) \textit{ faible étoile et } L^2(0,T;V) \textit{ faible}\,,\\ \omega_\alpha'\to\omega' & \textit{dans } L^\infty(0,T;V) \textit{ faible étoile et } L^2(0,T;V) \textit{ faible}\,,\\ \omega_\alpha''\to\omega'' & \textit{dans } L^2(0,T;H) \textit{ faible}\,.\end{cases} \tag{23}$$

DÉMONSTRATION. – On utilise une méthode analogue à celle du Théorème I-6.

3. – Comportement asymptotique des inéquations variationnelles correspondantes à quatre problèmes de Stefan. Application aux inéquations variationnelles paraboliques de type II.

Dans tout ce paragraphe on supposera que l'apport d'énergie g dans Q et le flux de chaleur $\tilde{h}$ sur Γ_2 sont nuls, c'est-à-dire:

$$g = 0 \quad \text{dans } Q\,, \qquad \tilde{h} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 x(0, T)\,, \tag{24}$$

donc, on aura $f_L(t) = g_{0L}$. En plus, on supposera que l'on est sous les hypothèses des Théorèmes précédents qui nous assurent l'existence et l'unicité des solutions $u_{L\alpha}$, u_L, ω_α, ω.

On définit les fonctions u_∞ et u_∞^α comme les solutions des problèmes (25) et (26) respectivement [27, 28]:

$$\begin{cases} a(u_\infty, v - u_\infty) = 0\,, & \forall v \in K\,, \\ u_\infty \in K\,, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} a_\alpha(u_\infty^\alpha, v) = \alpha \displaystyle\int_{\Gamma_1} b_0 v\, d\gamma\,, & \forall v \in V \quad (\alpha > 0)\,, \\ u_\infty \in V\,. \end{cases} \tag{26}$$

REMARQUE 5. – L'élément ξ, défini par (I-55), est l'élément u_∞ donné par (25).

LEMME 6. – *On a*:

$$j(v) - j(u) \leqslant (H_0(v), v - u)\,, \quad \forall u, v \in H\,. \tag{27}$$

DÉMONSTRATION. – L'inégalité (27) vient du fait que $\forall u, v \in H$, on a:

$$j(u) - j(v) + (H_0(v), v - u) = \int_\Omega (1 - H_0(v))\, u^+ dx + \int_\Omega u^- H_0(v)\, dx \geqslant 0\,.$$

THÉORÈME 7. – *Pour le cas* (24), *on obtient les estimations suivantes*:

i) *Pour chaque $\alpha > 1$, $L > 0$, on a:*

$$
(28) \quad \begin{cases}
a) \quad a_1(u'_{L\alpha}(t), u'_{L\alpha}(t)(\leqslant a_1(u_1, u_1)\,, & \forall t \geqslant 0\,, \\
b) \quad \int\limits_0^{+\infty} \|u''_{L\alpha}(s)\|_H^2\, ds \leqslant a_1(u_1, u_1)/2C_0\,, & \\
c) \quad (\alpha - 1)\int\limits_{\Gamma_1} [u'_{L\alpha}(t) - b_0]^2\, d\gamma \leqslant a_1(u_1, u_1)\,, & \forall t \geqslant 0\,.
\end{cases}
$$

ii) *La propriété* (28) *est aussi valable pour ω_α au lieu de $u_{L\alpha}$:*

iii) *Pour chaque $L > 0$, on a:*

$$
(29) \quad \begin{cases}
a) \quad a(u'_L(t), u'_L(t)) \leqslant a(u_1, u_1)\,, & \forall t \geqslant 0\,, \\
b) \quad \int\limits_0^{+\infty} \|u''_L(s)\|_H^2\, ds \leqslant a(u_1, u_1)/2C_0\,. &
\end{cases}
$$

iv) *La propriété* (29) *est aussi valable pour ω au lieu de u_L:*

DÉMONSTRATION. – On ne fera que la partie i). Si on réprend la démonstration du Théorème I-6, partie (A.2), on obtient:

$$
C_0 \int\limits_0^t \|u''_{L\alpha}(s)\|_H^2\, ds + \frac{1}{2}\, a_1(u'_{L\alpha}(t), u'_{L\alpha}(t)) + \frac{(\alpha - 1)}{2} \int\limits_{\Gamma_1} [u'_{L\alpha}(t) - b_0]^2\, d\gamma \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{2} a_1(u_1, u_1)\,, \qquad \forall t \geqslant 0\,,
$$

d'où (28). Les autres trois cas se démontrent d'une manière analogue

REMARQUE 6. – i) On peut aussi obtenir pour le cas $0 < \alpha \leqslant 1$, des estimations similaires à (28).

ii) En tenant compte de la définition (25) de u_∞, il en résulte l'équivalence:

$$
(29a) \Leftrightarrow (30) \qquad a(u'_L(t) - u_\infty, u'_L(t) - u_\infty) \leqslant a(u_1 - u_\infty, u_1 - u_\infty)\,, \qquad \forall t \geqslant 0.
$$

LEMME 8. – *On a les équivalences suivantes:*

$$
(31) \quad \begin{cases}
\text{i)} & \omega(t) = t u_\infty \Leftrightarrow u_\infty = u_1\,, \\
\text{ii)} & u_{L\alpha}(t) = t u_\infty^\alpha \Leftrightarrow u_\infty^\alpha = u_1\,, \\
\text{iii)} & \omega_\alpha(t) = t u_\infty^\alpha \Leftrightarrow u_\infty^\alpha = u_1\,.
\end{cases}
$$

DÉMONSTRATION. – On ne utilise que les définitions des six éléments ω, $u_{L\alpha}$, ω_α, u_∞, u_∞^α, u_1.

REMARQUE 7. – De (31), on en déduit le fait que si l'égalité du coté droite est vraie alors la température correspondant à la fonction du coté gauche est indépendante du temps t et, en plus, elle sera toujours égale à la température initiale θ_0.

THÉORÈME 9. – *Les fonctions $u_{L\alpha}(t)$, $\omega_\alpha(t)$, $u_L(t)$, $\omega(t)$ ont le comportement asymptotique suivant*:

$$(32)\quad \begin{cases} \text{i)} \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \left\| \dfrac{u_{L\alpha}(t)}{t} - u_\infty^\alpha \right\|_V = \lim\limits_{t\to+\infty} \|u'_{L\alpha}(t) - u_\infty^\alpha\|_H = 0, \quad \forall L>0, \\ \text{ii)} \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \left\| \dfrac{\omega_\alpha(t)}{t} - u_\infty^\alpha \right\|_V = \lim\limits_{t\to+\infty} \|\omega'_\alpha(t) - u_\infty^\alpha\|_H = 0, \quad \forall L>0, \\ \text{iii)} \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \left\| \dfrac{u_L(t)}{t} - u_\infty \right\|_V = \lim\limits_{t\to+\infty} \|u'_L(t) - u_\infty\|_H = 0\,, \quad \forall L>0, \\ \text{iv)} \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \left\| \dfrac{\omega(t)}{t} - u_\infty \right\|_V = \lim\limits_{t\to+\infty} \|\omega'(t) - u_\infty\|_H = 0\,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. – On ne fera que les cas i). Soit

$$(33)\quad \begin{cases} z_{L\alpha}(t) = u_{L\alpha}(t) - t u_\infty^\alpha \in V, \\ z'_{L\alpha}(t) = u'_{L\alpha}(t) - u_\infty^\alpha \in V, \qquad z_{L\alpha}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Si l'on prend $v = u_\infty^\alpha \in V$ dans (I-28) et $v = z'_{L\alpha}(t) \in V$ dans (26), on les ajoute, on tient compte de (I-32) et (27), on intègre sur $[0, t]$ on utilise (I-48), alors on obtient:

$$(34)\quad \begin{cases} C_0 \displaystyle\int_0^t \|z'_{L\alpha}(s)\|_H^2\, ds + \dfrac{\lambda_\alpha}{2} \|z_{L\alpha}(t)\|_V^2 \leqslant M_{L\alpha} \|z_{L\alpha}(t)\|_H\,, \qquad \forall t \geqslant 0\,, \\ M_{L\alpha} = \|g_{0L} - \beta(u_\infty^\alpha) - L H_0(u_\infty^\alpha)\|_H\,, \end{cases}$$

d'où

$$(35)\quad \begin{cases} \|z_{L\alpha}(t)\|_V \leqslant 2 M_{L\alpha}/\lambda_\alpha\,, \qquad \forall t \geqslant 0\,, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \|z'_{L\alpha}(s)\|_H^2\, ds \leqslant 2 M_{L\alpha}^2/\lambda_\alpha C_0\,, \end{cases}$$

c'est-à-dire la limite de la partie gauche de (32 i). De (35), (28) et la Remarque 8 (ci-dessous), on en déduit la limite de la partie droite de (32 i).

REMARQUE 8. – i) Si $F, F' \in L^2(0, T; H)$, alors on a:

$$\left|\frac{d}{dt}\|F(t)\|_H\right| \leqslant \|F'(t)\|_H . \tag{36}$$

ii) Si f est une fonction réelle qui vérifie

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} f'^2(t)\,dt < +\infty \qquad (f \in H^1(0, +\infty)) \tag{37}$$

alors on a:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0 . \tag{38}$$

La démonstration de cette dernière propriété peut se trouver dans [15, p. 72] où le comportement asymptotique du problème de Stefan n-dimensionnel à deux phases a été étudié en utilisant la formulation faible. Par ailleurs, pour obtenir (38) il est suffisant qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $f \in H^1(t_0, +\infty)$. ■

Maintenant, on est en conditions d'étudier le comportement des températures $\theta_{L\alpha}(t)$, $\theta_L(t)$, $\theta_\alpha(t)$ et $\theta^*(t)$ lorsque le temps tend vers l'infini. Soient:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{i)} & \theta_\infty = \dfrac{1}{k_2}u_\infty^+ - \dfrac{1}{k_1}u_\infty^- & \text{dans } \Omega, \\ \text{ii)} & \theta_\infty^\alpha = \dfrac{1}{k_2}(u_\infty^\alpha)^+ - \dfrac{1}{k_1}(u_\infty^\alpha)^- & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{39}$$

LEMME 10. – *On a*:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{i)} & \lim\limits_{t\to+\infty}\|\theta_{L\alpha}(t) - \theta_\infty^\alpha\|_H = \lim\limits_{t\to+\infty}\|\theta_\alpha(t) - \theta_\infty^\alpha\|_H = 0 , \quad \forall L > 0 , \\ \text{ii)} & \lim\limits_{t\to+\infty}\|\theta_L(t) - \theta_\infty\|_H = \lim\limits_{t\to+\infty}\|\theta^*(t) - \theta_\infty\|_H = 0 , \quad \forall L > 0 . \end{array}\right. \tag{40}$$

DÉMONSTRATION. – Pour obtenir (40), on utilise (32) et le fait suivant:

$$\operatorname{Max}\left(\|u^+ - v^+\|_H ; \|u^- - v^-\|_H\right) \leqslant \|u - v\|_H , \qquad \forall u, v \in H . \tag{41}$$

REMARQUE 9. – Le Théorème 9 nous donne aussi une convergence des températures $\theta_{L\alpha}(t)$, $\theta_\alpha(t)$ et $\theta_L(t)$, $\theta^*(t)$ vers θ_∞^α et θ_∞ respectivement dans V fort, mais cette fois la convergence doit s'éntendre comme une convergence de type moyenne temporelle car, par exemple, on a:

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{i)}\quad \lim_{t\to+\infty}\left\| \frac{1}{t}\int_0^t [k_2\theta_{L\alpha}^+(s) - k_1\theta_{L\alpha}^-(s)]\,ds - \right.\\ &\qquad\qquad\left. - [k_2(\theta_\infty^\alpha)^+ - k_1(\theta_\infty^\alpha)^-]\right\|_V = 0\,,\\ &\text{ii)}\quad \lim_{t\to+\infty}\left\| \frac{1}{t}\int_0^t [k_2\theta_L^+(s) - k_1\theta_L^-(s)]\,ds - (k_2\theta_\infty^+ - k_1\theta_\infty^-)\right\|_V = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Par ailleurs, on a une convergence similare à (42) pour les températures $\theta_\alpha(t)$ et $\theta^*(t)$.

REMARQUE 10. – Il est important de remarquer ici que chaque fois que l'on fait la limite $t \to +\infty$, avec $L =$ cte, soit pour $u_{L\alpha}(t)$ ou $u_L(t)$ ($\theta_{L\alpha}(t)$ ou $\theta_L(t)$), on obtient une limite qui est indépendante de L et cela peut se comprendre très bien physiquement.

REMARQUE 11. – Dans [29], on peut trouver un tableau où un résumé a été fait pour toutes les limites correspondantes aux six fonctions $u_{L\alpha}$, u_L, ω_α, ω, u_∞, u_∞^α. Une généralisation pour le comportement asymptotique avec $g \neq 0$ et $\bar{h} = 0$ a été donné dans [30]. Soit f l'élément défini par:

$$(43)\qquad \langle f(t), v\rangle = \langle f_L(t), v\rangle - (g_{0L}, v)\,, \qquad \forall v \in V,$$

qui ne dépend pas de la chaleur latente de fusion $L > 0$, alors on a le résultat suivant: S'il existe $f_\infty \in V'$ tel que

$$(44)\qquad f' - f_\infty \in L^1(0, +\infty; V')\,, \qquad f'' \in L^1(0, +\infty; V')$$

et si l'on appelle u_∞ l'unique solution de l'équation variationnelle [27]:

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &a(u_\infty, v - u_\infty) = \langle f_\infty, v - u_\infty\rangle\,, \qquad \forall v \in K\,,\\ &u_\infty \in K\,, \end{aligned}\right.$$

alors la solution u_L de l'inéquation variationnelle (I-27) et l'élément u_∞ ont les propriétés (32 iii). En plus, si l'on définie la température θ_∞ par (39 i), alors on a (40 ii) et (42 ii), qui nous donnent le comportement asymptotique de la température $\theta_L(t)$ vers θ_∞.

Par ailleurs, les hypothèses (44) sont vérifiées si l'apport d'énergie g et le flux de chaleur $\bar{h}$ pour le cas d'évolution et, g_∞ et h_∞ pour les cas stationnaire respectivement satisfont les hypothèses suivantes:

$$(46)\qquad \begin{cases} g - g_\infty \in L^1(0, +\infty; V')\,, & g' \in L^1(0, +\infty; V')\,,\\ \bar{h} - h_\infty \in L^1(0, +\infty; I)\,, & \bar{h}' \in L^1(0, +\infty; I)\,,\\ \text{avec } I = L^2(\Gamma_2) \text{ ou } H^{-1/2}(\Gamma_2)\,, & \end{cases}$$

en prenant f_∞ par:

$$(47)\qquad \langle f_\infty, v\rangle = \langle g_\infty, v\rangle - \int_{\Gamma_2} h_\infty v\, d\gamma\,.$$

En plus, un résultat analogue au précédent peut s'obtenir pour les autres fonctions définis dans ce travail.

Remarque 12. – Le Théorème 9 et la Remarque 11 nous donnent le comportement à l'infini de la solution d'une inéquation variationnelle d'évolution de type II [12], avec la présence d'un opérateur β non linéaire, en utilisant la méthode de la Remarque 8. Cette méthode a été aussi utilisée pour étudier le comportement asymptotique de la cristallisation d'un métal en coulée continue [5] dans [23], et du problème de la digue [2, 3, 32] dans [24].

Remarque 13. – Le comportement asymptotique pour le cas unidimensionnel a été étudié: pour le cas fini avec données, aux deux côtés fixes, de température [6, 16], flux de chaleur [7]; pour le cas semi-infini avec température du changement de phase dépendent de la position et avec données, sur le côte fixe, de température [22], flux de chaleur [21], loi de Newton [21]; pour le cas infini [14, 18]. Par ailleurs, dans [15, 16], il a été démontré la convergence uniforme dans la variable spatial à travers de la formulation faible.

Ils ont été réalisés des nombreux travaux pour le problème multidimensionnel de Stefan à deux phases en utilisant les inéquations variationnelles. Parmi eux, on peut citer [1, 8, 9, 10, 11, 13, 17, 20, 25]. Les inéquations variationnelles, pour le cas unidimensionnel, ont été utilisées dans [19].

Remerciement. – Ce travail représente le développement d'une partie de ma thèse [29] effectuée sous la direction de Monsieur le Professeur G. Duvaut à qui je lui en suis très reconnaissant. Je remercie aussi à l'Arbitre pour les indications très précises pour en améliorer la rédaction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AGUIRRE PUENTE - M. FRÉMOND, *Frost propagation in wet porous media*, Lecture Notes in Mathematics no. 503, Springer-Verlag, Berlin (1976), 137-147.

[2] C. BAIOCCHI, *Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux*, C. R. Acad. Sci. Paris, **273** A (1971), 1215-1217.

[3] C. BAIOCCHI, *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Ann. Mat. Pura Appl., **92** (1972), 107-127.

[4] H. BRÉZIS, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl., **51** (1972), 1-168.

[5] T. BRIÈRE, *Applications des méthodes variationnelles à la cristallisation d'un métal fondu s'écoulant dans une gaine de refroidissement*, Thèse de 3-ème Cycle, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), 24 Juin 1976.

[6] J. R. CANNON - M. PRIMICERIO, *A two-phase Stefan problem with temperature boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl., **88** (1971), 177-191.

[7] J. R. CANNON - M. PRIMICERIO, *A two-phase Stefan problem with flux conditions*, Ann. Mat. Pura Appl., **88** (1971), 193-205.

[8] A. DAMLAMIAN, *Problèmes aux limites non linéaires du type du problème de Stefan, et inéquations variationnelles d'évolution*, dans Thèse d'Etat *Résolution de certaines inéquations variationnelles stationnaires et d'évolution*, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), 25 Mai 1976.

[9] G. DUVAUT, *The solution of a two-phase Stefan problem by a variational inequality*, Proc. Symposium on Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, J. R. Ockendon - W. R. Hodgkins (Ed.), Clarendon Press, Oxford (1975), 173-181.

[10] G. DUVAUT, *Stefan problems for two-phase varying*, Mémorias de Matemática de Univ. Fed. do Rio de Janeiro no. 51 (1975); *Two phase Stefan problems with varying specific heat coefficients*, An. Acad. Brasil Ciênc., **47** (1975), 377-380.

[11] G. DUVAUT, *Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus*, 2-ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse, 1975; Rapport de Recherche no. 185, LABORIA-IRIA, Le Chesnay, 1976.

[12] G. DUVAUT - J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[13] M. FRÉMOND, *Diffusion problems with free boundaries*, Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, I.C.T.P., Trieste, 1976.

[14] A. FRIEDMAN, *Remarks on Stefan-type free boundary problems for parabolic equations*, J. Math. Mech., **9** (1960), 885-903.

[15] A. FRIEDMAN, *The Stefan problem in several space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 51-87; Correction, **142** (1969), 557.

[16] A. Friedman, *One dimensional Stefan problems with nonmonotone free boundary*, Trans. Amer. Math. Soc., **133** (1968), 89-114.

[17] J. L. Lions, *Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal*, Les Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal, 1976.

[18] G. Lyan'-Kun', *The behavior of the solution of Stephan's problem when time increases unboundedly*, Soviet Math. Dokl., **2** (1961), 570-573.

[19] E. Magenes, *Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems*, in Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations, H. G. Garnier (Ed.), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht (1976), 239-312; Publ. no. 130, Laboratorio di Analisi Numerica, Pavia (1977).

[20] I. Pawlow, *Generalized Stefan type problems involving additional nonlinearities*, in Free Boundary Problems: Theory and Applications, A. Fasano - M. Primicerio (Ed.), held at Montecatini (Italy), 18-26 June 1981, to appear.

[21] D. Quilghini, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni di un problema del tipo di Stefan*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **12** (1962/63), 107-120.

[22] D. Quilghini, *Su di un nuovo problema del tipo di Stefan*, Ann. Mat. Pura Appl., **62** (1963), 59-97.

[23] J. F. Rodrigues, *Sur la cristallisation d'un métal en coulée continue par des méthodes variationnelles*, Thèse de 3-ème Cycle, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), 17 Octobre 1980.

[24] J. F. Rodrigues, *On the free boundary of the evolution dam problem*, in Free Boundary Problems: Theory and Applications, A. Fasano - M. Primicerio (Ed.), held at Montecatini (Italy), 18-26 June 1981, to appear.

[25] C. Saguez, *Contrôle optimal de systèmes à frontière libre*, Thèse d'Etat, Univ. de Compiègne, 23 Septembre 1980.

[26] B. Sherman, *Limiting behavior in some Stefan problems as the latent heat goes to zero*, SIAM J. Appl. Math., **20** (1971), 319-327.

[27] D. A. Tarzia, *Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Math. Notae, **27** (1979/80), 145-156.

[28] D. A. Tarzia, *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Math. Notae, **27** (1979/80), 157-165.

[29] D. A. Tarzia, *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C. R. Acad. Sci. Paris, **288** A (1979), 941-944. Voir aussi Thèse de 3-ème Cycle, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), 8 Mars 1979.

[30] D. A. Tarzia, *Comportamiento asintótico de la solución de una inecuación variacional de evolución de tipo II. Aplicación al problema de Stefan a dos fases*, Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Corrientes y Resistencia, 20-22 Sept. 1979.

[31] D. A. Tarzia, *Étude de l'inéquation variationnelle proposée par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases, I*, Boll. Un. Mat. Ital., (6) **1**-B (1982), 865-883.

[32] A. Torelli, *On a free boundary value problem connected with a non steady filtration phenomenon*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **4** (1977), **33-59.**

Instituto de Matemática « Beppo Levi »
Universidad Nacional de Rosario
2000 Rosario, Argentina

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 18 marzo 1982