Bollettino U. M. I.
(6) 1-B (1982), 865-883

Etude de l'inéquation variationnelle proposée par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases, I.

DOMINGO ALBERTO TARZIA (Rosario, Argentina)

Sunto. – *Si danno alcuni risultati relativi all'esistenza e all'unicità di disequazioni variazionali riguardanti il problema di Stefan a due fasi.*

1. – Introduction.

Le problème de Stefan a été étudié par de nombreux auteurs avec les travaux de revision [2, 4, 8, 17, 19, 21-27, 29, 30, 35 et leurs bibliographies]. On étudie le champ de température $\theta(x, t)$ définie pour $x \in \Omega$ (ouvert, connexe et borné de $\mathbf{R}^3$ avec frontière $\Gamma = \partial\Omega$ assez regulière) et $t \in (0, T)$ avec $T > 0$, temps donné. A chaque instant $t > 0$, l'ensemble Ω est divisé en deux régions occupées par la phase solide $(\Omega_1(t))$ et la phase liquide $(\Omega_2(t))$ qui sont séparées par la frontière libre $\mathfrak{L}(t)$ ($\mathfrak{L}(0)$ est une donnée du problème). On va considerer que la température du changement de phase du système Ω est representée par $\theta = 0$ (zéro degré centigrade) qui est physiquement le cas eau-glace. Cette hypothése n'est pas une restriction à l'étude du problème. En plus, on néglige les variations de volume.

On introduit:

$$(1) \qquad \begin{cases} Q_i = \bigcup\limits_{0<t<T} \Omega_i(t)\times\{t\} \quad (i = 1, 2), \qquad \Sigma = \bigcup\limits_{0<t<T} \mathfrak{L}(t)\times\{t\}, \\ Q = \Omega\times(0, T) = Q_1 \cup Q_2 \cup \Sigma . \end{cases}$$

La température θ peut s'exprimer dans Q par:

$$(2) \qquad \theta(x, t) = \begin{cases} \theta_1(x, t) < 0 & \text{si } (x, t) \in Q_1 , \\ 0 & \text{si } (x, t) \in \Sigma , \\ \theta_2(x, t) > 0 & \text{si } (x, t) \in Q_2 . \end{cases}$$

L'équation de la chaleur dans Q_i $(i=1,2)$ s'écrit:

$$C_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - k_i \Delta \theta_i = g \tag{3}$$

où:

$$\left\{\begin{array}{ll} k_i > 0: & \text{conductivité calorique dans } Q_i, \\ C_i > 0: & \text{chaleur spécifique par unité de volume dans } Q_i, \\ g = g(x,t): & \text{apport d'énergie par unité de temps et de volume dans } Q. \end{array}\right. \tag{4}$$

Sur la frontière libre $\mathfrak{L}(t)$, on a:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{i)} & \theta_1(x,t) = 0\,, \\ \text{ii)} & \theta_2(x,t) = 0\,, \\ \text{iii)} & k_1 \nabla\theta_1 \cdot \boldsymbol{n} - k_2 \nabla\theta_2 \cdot \boldsymbol{n} = L\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \end{array}\right. \tag{5}$$

où:

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{n}: & \text{vecteur normal à } \mathfrak{L}(t) \text{ dans } \mathbf{R}^3, \\ \boldsymbol{V}: & \text{vitesse de propagation de } \mathfrak{L}(t) \text{ dans } \mathbf{R}^3, \\ L > 0: & \text{chaleur latente de fusion par unité de volume.} \end{array}\right. \tag{6}$$

Les conditions aux limites sont:

$$\theta/\Gamma_1 = b\,, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{i)} & -k_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial n}\Big/\Gamma_2 = \tilde{h} & \text{si } \theta/\Gamma_2 < 0\,, \\ \text{ii)} & -k_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial n}\Big/\Gamma_2 = \tilde{h} & \text{si } \theta/\Gamma_2 > 0\,, \end{array}\right. \tag{8}$$

où:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2: & \text{frontière de } \Omega,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \text{ avec mes } (\Gamma_1) > 0, \\ b = b(x): & \text{température donnée sur } \Gamma_1, \\ \tilde{h} = \tilde{h}(x,t): & \text{flux de chaleur défini sur } \Gamma_2 \times (0,T). \end{array}\right. \tag{9}$$

La condition initiale est donnée par:

$$\theta(x,0) = \theta_0(x)\,, \qquad \forall x \in \Omega\,. \tag{10}$$

REMARQUE 1. – Si la température b, donnée sur Γ_1, prend des valeurs négatives et positives on est sûr que le problème est à deux phases. Dans ce travail on considère cette restriction. Par ailleurs, cette condition n'est pas nécessaire car le problème peut être à deux phases avec b une fonction qui a une signe constante, mais le flux de chaleur sur Γ_2 doit vérifier une certaine inégalité. Des exemples concrets, pur le cas stationaire du problème de Stefan à deux phases, sont considerés dans [33].

REMARQUE 2. – Il existe une condition de compatibilité donnée par:

$$\theta_0/\Gamma_1 = b\,. \qquad \blacksquare \tag{11}$$

Une variante du problème précedent est celui qui s'obtient en remplaçant la condition (7) par:

$$\text{(7 bis)} \quad \begin{cases} \text{i)} \quad -k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n}\Big/\Gamma_1 = \alpha(k_1\theta_1 - b_0) & \text{si } \theta/\Gamma_1 < 0\,, \\ \text{ii)} \quad -k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n}\Big/\Gamma_2 = \alpha(k_2\theta_2 - b_0) & \text{si } \theta/\Gamma_1 > 0 \end{cases}$$

où:

$$\text{(12)} \quad \begin{cases} b_0 = k_2 b^+ - k_1 b^-: & \text{définie sur } \Gamma_1, \\ \alpha > 0: & \text{coefficient positif.} \end{cases}$$

On appellera θ la fonction inconnue du problème (3), (5), (7), (8), et (10), et θ_α celle des conditions (3), (5), (7 bis), (8) et (10).

Le plan est le suivant: on étudie la formulation variationnelle des problèmes en θ et en θ_α à travers le changement de fonction inconnue (22). On démontre l'existence et l'unicité de la fonction $u_{L\alpha}$, solution de l'inéquation variationnelle (28), dans la classe $u_{L\alpha}$, $u'_{L\alpha} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, $u''_{L\alpha} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et son comportement lorsque $\alpha \to +\infty$. En plus, cette fonction limite u_L est la solution de l'inéquation variationelle correspondante au problème en θ pour chaque constante $L > 0$. Par ailleurs, on caracterise le cas avec température constante dans les temps par la condition (73).

2. – Formulation variationnelle.

Suivant l'idée de Duvaut [12-14], voir aussi [10, 11], utilisée pour le cas $g = 0$, $\bar{h} = 0$ et condition (7), on va transformer les équations précedentes (3), (5), (7) ou (7 bis), (8) et (10), de manière à les écrire en terme des distributions dans Q. On introduit:

$$(13)\quad \begin{cases} \theta_i: & \text{est la fonction } \theta_i \text{ étendue par 0 dans } Q, \\ D(Q) = \{\varphi: Q \to \mathbf{R} \,/\, \varphi & \text{est indéfiniment différentiable et à support compact dans } Q\}, \\ D'(Q): & \text{l'ensemble des distributions sur } Q, \\ \langle\,,\,\rangle: & \text{la dualité entre } D'(Q) \text{ et } D(Q). \end{cases}$$

En plus, on a:

$$(14)\qquad \partial Q_1 = \partial_1 Q \cup \Sigma\,, \qquad \partial Q_2 = \partial_2 Q \cup (-\Sigma)$$

avec:

$$(15)\qquad \partial_1 Q = \partial Q \cap \bar{Q}_1\,, \qquad \partial_2 Q = \partial Q \cap \bar{Q}_2$$

où on prend l'expression $(-\Sigma)$ car on tient déjà compte que sur Σ on utilise toujours, pour le vecteur normal la direction de Q_1 vers Q_2.

REMARQUE 3. – Si les équations de Σ et $\mathfrak{L}(t)$ sont données par:

$$(16)\qquad \Sigma:\ S(x,t) = 0\,, \qquad \mathfrak{L}(t):\ S\big(x(t),t\big) = 0\,,$$

alors on a:

$$(17)\qquad V\cdot \boldsymbol{n}_x + n_t = 0 \qquad \text{sur } \Sigma$$

où:

$$(18)\quad \begin{cases} \boldsymbol{n}(x,t) = \big(\boldsymbol{n}_x(x,t),\, n_t(x,t)\big): \text{ verseur normal à } \Sigma, \\ \boldsymbol{n}_x = \dfrac{\nabla_x S}{[|\nabla_x S|^2 + (\partial S/\partial t)^2]^{\frac12}}\,, \qquad n_t = \dfrac{\partial S/\partial t}{[|\nabla_x S|^2 + (\partial S/\partial t)^2]^{\frac12}}\,, \\ \nabla_x S = \left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1}, \dfrac{\partial S}{\partial x_2}, \dfrac{\partial S}{\partial x_3}\right), \qquad |\nabla_x S|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left(\dfrac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2. \end{cases}$$

Par ailleurs, le vecteur $\boldsymbol{n}$ dans (5) peut etre remplacé par $\boldsymbol{n}_x$. ■

On a les propriétés suivantes:

THÉORÈME 1. – *Pour $\varphi \in D(Q)$, on a:*

i)

$$(19)\qquad \begin{cases} \left\langle C_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial t} - k_2 \Delta\theta_2, \varphi \right\rangle = \displaystyle\int_{Q_2} g\varphi\, dx\, dt - \int_{\Sigma} k_2 \nabla_x \theta_2 \cdot n_x \varphi\, d\sigma\,, \\ \left\langle C_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial t} - k_1 \Delta\theta_1, \varphi \right\rangle = \displaystyle\int_{Q_1} g\varphi\, dx\, dt + \int_{\Sigma} k_1 \nabla_x \theta_1 \cdot n_x \varphi\, d\sigma\,. \end{cases}$$

ii) *Si $\chi_2 = \chi_{Q_2}$ (fonction caractéristique de l'ensemble Q_2), alors:*

$$(20)\qquad \left\langle \frac{\partial \chi_2}{\partial t}, \varphi \right\rangle = \int_{\Sigma} \varphi n_t\, d\sigma\,.$$

iii)

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(C_1\theta_1 + C_2\theta_2) - \Delta(k_1\theta_1 + k_2\theta_2) = g - L\frac{\partial \chi_2}{\partial t} \qquad \textit{dans } D'(Q).$$

iv) *Les trois propriétés précedentes sont aussi valables pour le problème en α, c'est-à-dire avec la condition* (7 bis) *au lieu de* (7).

DÉMONSTRATION. – On utilise (3), (5), (13), (14), (15) et le Théorème de Green pour démontrer les proprietés (19) à (21).

En plus, si on fait les mêmes définitions (13) à (15) pour le problème en α, on démontre de manière analogue les propriétés (19) à (21) por chaque $\alpha > 0$.

REMARQUE 4. – Toutes les informations du problème (3), (5), (7), (8) et (10) sont maintenant données par (21), (7), (8), et (10), et celles du problème (3), (5), (7 bis), (8) et (10) sont données par (21), (7 bis), (8) et (10). ∎

On introduit les nouvelles fonctions inconnues [12]:

$$(22)\qquad \begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\int_0^t [k_2\theta_2(x,s) + k_1\theta_1(x,s)]\, ds = \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_0^t [k_2\theta^+(x,s) - k_1\theta^-(x,s)]\, ds\,, \\ u_\alpha(x,t) = \displaystyle\int_0^t [k_2\theta_\alpha^+(x,s) - k_1\theta_\alpha^-(x,s)]\, ds\,. \end{cases}$$

REMARQUE 5. – Il est clair qu'une fois qu'on a pu connaître u (u_α) on pourra aussi connaître θ (θ_α) par les rélations suivantes:

$$\theta = \frac{1}{k_2}(u')^+ - \frac{1}{k_1}(u')^-, \qquad \theta_\alpha = \frac{1}{k_2}(u'_\alpha)^+ - \frac{1}{k_1}(u'_\alpha)^- \quad \text{dans } Q \tag{23}$$

où on note u' par $\partial u/\partial t$. ■

On introduit les notations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{ll}
V = H^1(\Omega), & H = L^2(\Omega), \\
V_0 = \{v \in V \ / \ v/\Gamma_1 = 0\}, & K = \{v \in V \ / \ v/\Gamma_1 = b_0\}, \\
\multicolumn{2}{l}{V'(V'_0)\text{: espace dual de } V(V_0) \text{ lorsqu' on identifie } H \text{ à son dual,}} \\
\multicolumn{2}{l}{\langle\, , \rangle\text{: dualité entre } V' \text{ et } V \text{ (aussi entre } V'_0 \text{ et } V_0),} \\
(u, v) = \displaystyle\int_\Omega uv\,dx, & a(u, v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx, \\
\|v\|_H = [(v, v)]^{\frac{1}{2}}, & \|v\|_V = [a(v, v) + \|v\|_H^2]^{\frac{1}{2}}, \\
a_\alpha(u, v) = a(u, v) + \alpha \displaystyle\int_{\Gamma_1} uv\,d\gamma, & j(v) = \displaystyle\int_\Omega v^+\,dx, \\
g_{0L} = C_2\theta_0^+ - C_1\theta_0^- + LH_0(\theta_0), & H_0(\theta_0) = \chi_2(0), \\
G_L(t) = g_{0L} + \displaystyle\int_0^t g(s)\,ds, & H_0\text{: fonction de Heaviside,} \\
\beta(v) = \dfrac{C_2}{k_2}v^+ - \dfrac{C_1}{k_1}v^-, & h(t) = \displaystyle\int_0^t \tilde{h}(s)\,ds, \\
\multicolumn{2}{l}{\langle f_L(t), v\rangle = \langle G_L(t), v\rangle - \displaystyle\int_{\Gamma_2} h(t)\,v\,d\gamma,} \\
\multicolumn{2}{l}{\langle f_{L\alpha}(t), v\rangle = \langle f_L(t), v\rangle + \alpha t \displaystyle\int_{\Gamma_1} b_0 v\,d\gamma.}
\end{array}\right. \tag{24}$$

Alors on a:

THÉORÈME 2. – *Les fonctions u et u_α satisfont les conditions suivantes:*

i)

$$\left|\begin{array}{l}
\beta(u') - \Delta u = G_L - L\chi_2 \\
u/\Gamma_1 = tb_0 \\
-\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big/\Gamma_2 = h, \qquad u(0) = 0.
\end{array}\right. \tag{25}$$

ii)

$$(26)\qquad \begin{cases} \beta(u'_\alpha) - \Delta u_\alpha = G_L - L\chi_{2\alpha} \\ -\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial n}\Big/\Gamma_1 = \alpha(u_\alpha - tb_0) \\ -\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial n}\Big/\Gamma_2 = h\,, \qquad u_\alpha(0) = 0. \end{cases}$$

iii) *Si u est une solution régulière de* (25), *alors u est solution de l'inéquation variationnelle d'évolution du type II suivante*:

$$(27)\qquad \begin{cases} \big(\beta(u'(t)), v - u'(t)\big) + a\big(u(t), v - u'(t)\big) + Lj(v) - Lj\big(u'(t)\big) \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant \langle f_L(t), v - u'(t)\rangle\,, \qquad \forall v \in K,\ t \in [0, T], \\ u'(t) \in K\,, \\ \dfrac{u(t)}{t} \in K\,, \qquad u(0) = 0. \end{cases}$$

iv) *Si u_α est une solution régulière de* (26), *alors u_α est solution de l'inéquation variationnelle d'évolution du type II suivante*:

$$(28)\qquad \begin{cases} \big(\beta(u'_\alpha(t)), v - u'_\alpha(t)\big) + a_\alpha\big(u_\alpha(t), v - u'_\alpha(t)\big) + Lj(v) - \\ \qquad - Lj\big(u'_\alpha(t)\big) \geqslant \langle f_{L\alpha}(t), v - u'_\alpha(t)\rangle\,, \qquad \forall v \in V,\ t \in [0, T], \\ u'_\alpha(t) \in V\,, \\ u_\alpha(t) \in V\,, \qquad u_\alpha(0) = 0\,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. – i) Si on intègre (21) par rapport à la variable t, on tient compte des définitions (24) et du fait que:

$$(29)\qquad \frac{\partial\theta^+}{\partial n} = \frac{\partial\theta}{\partial n} H_0(\theta)\,, \qquad \frac{\partial\theta^-}{\partial n} = -\frac{\partial\theta}{\partial n} H_0(-\theta)$$

on déduit (25). D'une manière analogue on démontre ii).

iii) Si on prend $v \in K$, on multiplie l'équation (26) par $\big(v - u'(t)\big)$, on intègre sur Ω, et si on tient compte de la propriété:

$$(30)\qquad j(v) - j\big(u'(t)\big) - \big(\chi_2(t), v - u'(t)\big) = \int\limits_{\Omega_1(t)} v^+\,dx + \int\limits_{\Omega_2(t)} v^-\,dx \geqslant 0\,,$$

on en déduit (27). D'une manière analogue on démontre iv).

REMARQUE 6. – Les inéquations variationnelles du type II ont été introduites dans [15].

REMARQUE 7. – La condition (11) peut être remplacée par la hypothèse suivante:

$$k_2\theta_0^+ - k_1\theta_0^- \in K\,. \tag{31}$$ ■

Avant de démontrer que les problèmes (28) et (27) ont une solution et une seule, on démontrera des propriétés auxiliaires.

THÉORÈME 3. – i) *L'opérateur β est une application biunivoque et bicontinue de H dans H, et il est fortement monotone, c'est-à-dire*:

$$\exists C_0 > 0 \;/\; (\beta(v) - \beta(u), v - u) \geq C_0 \|v - u\|_H^2\,, \qquad \forall u, v \in H\,. \tag{32}$$

En plus, il existe une constante $M_0 > 0$ telle que:

$$C_0 \|v - u\|_H \leq \|\beta(v) - \beta(u)\|_H \leq M_0 \|v - u\|_H\,, \qquad \forall u, v \in H\,. \tag{33}$$

ii) *Il existe*:

$$\psi: H \to \mathbf{R} \Big/ \psi(v) = \frac{C_2}{2k_2} \|v^+\|_H^2 + \frac{C_1}{2k_1} \|v^-\|_H^2 \tag{34}$$

qui est Gâteaux-différentiable tel que $\psi' = \beta$ et ψ est strictement convexe. En plus, on a:

$$\frac{C_0}{2} \|v\|_H^2 \leq \psi(v) \leq \frac{M_0}{2} \|v\|_H^2\,, \qquad \forall v \in H. \tag{35}$$

iii) *L'opérateur j vérifie les propriétés suivantes*:

$$\begin{cases} j(v) \leq [\text{mes}\,(\Omega)]^{\frac{1}{2}} \|v\|_H\,, & \forall v \in H, \\ j(v - u) \geq j(v) - j(u)\,, & \forall u, v \in H. \end{cases} \tag{36}$$

iv) *En plus, l'opérateur*:

$$\varphi: H \to \mathbf{R} \,/\, \varphi = \psi + Lj \tag{37}$$

est s.c.i. *dans V faible et strictement convexe.*

DÉMONSTRATION. – i) Il suffit de prendre:

$$C_0 = \min\left(\frac{C_2}{k_2}, \frac{C_1}{k_1}\right) > 0\,, \quad M_0 = \max\left(\frac{C_2}{k_2}, \frac{C_1}{k_1}\right) > 0\,. \tag{38}$$

ii) La fonction réelle $\psi(x) = (C_2/2k_2)(x^+)^2 + (C_1/2k_1)(x^-)^2$ est strictement convexe et dérivable, ayant une dérivée égale à:

$$\psi'(x) = \frac{C_2}{k_2}x^+ - \frac{C_1}{k_1}x^- \equiv \beta(x)\,, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{39}$$

En utilisant (39) et en appliquant le Théorème de Lebesgue pour $u, v \in H$, on en déduit $\psi' = \beta$ au sens de Gâteaux. Du fait que ψ est différentiable selon Gâteaux et que sa différentielle β est fortement monotone, on en déduit que ψ est strictement convexe. En plus, on a (35).

iii) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la propriété:

$$x^+ \leq y^+ + (x-y)^+\,, \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}\,, \tag{40}$$

por déduire (36). On démontre aisément la condition iv).

THÉORÈME 4. – *Il existe un seul elément $u_1 \in V$ tel quel:*

$$\begin{cases} (\beta(u_1), v - u_1) + Lj(v) - Lj(u_1) \geq \langle f_{L\alpha}(0), v - u_1\rangle\,, & \forall v \in V, \\ u_1 \in V \end{cases} \tag{41}$$

qui ne dépend pas de $\alpha > 0$. En plus, l'élément u_1 est donné par:

$$u_1 = k_2\theta_0^+ - k_1\theta_0^- \in K\,. \tag{42}$$

DÉMONSTRATION. – Par définition, on a $f_{L\alpha}(0) = g_{0L}$, $\forall \alpha > 0$, qui ne dépend pas de $\alpha > 0$. Alors,

$$(41) \Leftrightarrow (43) \qquad \begin{cases} J(u_1) \leq J(v)\,, & \forall v \in V, \\ u_1 \in V \end{cases}$$

où:

$$J(v) = \varphi(v) - (g_{0L}, v)\,, \qquad \forall v \in V\,. \tag{44}$$

Après le Théorème 3, J vérifie les propriétés classiques [5] pour qu'il existe un seul élément $u_1 \in V$ qui vérifie (43). L'élément u_1 est solution de (41) si et seulement si

$$\begin{cases} (\beta(u_1) - g_{00}, v - u_1) \geq L[j(u_1) - j(v) + (H_0(\theta_0), v - u_1)]\,, \\ \hfill \forall v \in V, \\ u_1 \in V \end{cases} \tag{45}$$

où:

$$g_{0L} = g_{00} + LH_0(\theta_0)\,, \qquad g_{00} = C_2\theta_0^+ - C_1\theta_0^- \qquad \text{dans } \Omega\,. \tag{46}$$

Par ailleurs, l'élément $k_2\theta_0^+ - k_1\theta_0^-$ est solution de (45), et donc, de l'unicité de u_1, il en résulte (42).

REMARQUE 8. – i) Il existe $\lambda_1 > 0$, tel que:

$$a_1(v, v) = a(v, v) + \int_{\Gamma_1} v^2\,d\gamma \geqslant \lambda_1 \|v\|_V^2\,, \qquad \forall v \in V\,. \tag{47}$$

ii) Pour chaque $\alpha > 0$, $\sqrt{a_\alpha(v, v)}$ est une norme équivalente à celle de V. En plus, on a:

$$\begin{cases} a_\alpha(v, v) \geqslant \lambda_\alpha \|v\|_V^2\,, & \forall v \in V,\\ \lambda_\alpha = \lambda_1 \min(1, \alpha). \end{cases} \tag{48}$$

REMARQUE 9. – Il existe l'isomorphisme:

$$\Lambda_\alpha\colon\; V \to V' / \langle \Lambda_\alpha(u), v\rangle = a_\alpha(u, v)\,, \qquad \forall u, v \in V\,. \tag{49}$$

En plus, on a les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \text{i)} \;\; F, F' \in L^2(0, T;\, V') \Rightarrow \Lambda_\alpha^{-1}(F)\,, \quad \Lambda_\alpha^{-1}(F) \in L^2(0, T;\, V).\\ \text{ii)} \;\; F'' \in L^1(0, T;\, V') \quad \Rightarrow \Lambda_\alpha^{-1}(F) \in L^1(0, T;\, V). \end{cases} \tag{50}$$ ■

On est maintenant en conditions de démontrer le:

THÉORÈME 5. – *Soit $f_{L\alpha} \in L^2(0, T;\, V')$ avec $f'_{L\alpha} \in L^2(0, T;\, V')$ et $f''_L \in L^1(0, T;\, V')$, et $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, alors pour chaque $\alpha > 0$ et $L > 0$, il existe une fonction unique $u_{L\alpha} \in C([0, T];\, V)$ qui vérifie* (28) *et en plus $u'_{L\alpha} \in L^\infty(0, T;\, V)$ avec $u'_{L\alpha}(0) = u_1$, $\forall \alpha > 0$, $\forall L > 0$.*

DÉMONSTRATION. – On a l'équivalence suivante:

$$(28) \Leftrightarrow (51) \begin{cases} a_\alpha\big(u_{L\alpha}(t), v - u'_{L\alpha}(t)\big) + \varphi(v) - \varphi\big(u'_{L\alpha}(t)\big) \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant \langle f_{L\alpha}(t), v - u'_{L\alpha}(t)\rangle\,, \qquad \forall v \in V,\; t \in [0, T],\\ u'_{L\alpha}(t) \in V\,,\\ u_{L\alpha}(t) \in V\,, \qquad u_{L\alpha}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Alors, moyennant les hypothèses faites sur $f_{L\alpha}$, l'existence et l'unicité de $u_1 \in K$ de (41) et la Remarque 9, on peut appliquer Brézis [3, p. 116] pour obtenir l'existence et l'unicité de $u_{L\alpha} \in C([0, T];\, V)$

avec $u'_{L\alpha} \in L^\infty(0, T; V)$ de l'inéquation variationnelle (51). En plus, si on prend $t = 0$ dans (28), on note que l'on a nécessairement par unicité de (41):

$$u'_{L\alpha}(0) = u_1\,, \qquad \forall\alpha > 0\,,\ \forall L > 0\,. \tag{52}$$

THÉORÈME 6. – *Sous les hypothèses du Théorème* 5 *et* $f''_L \in L^\infty\cdot$ $\cdot(0, T; V')$, *et lorsque* $\alpha \to +\infty$, *on a*:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{L\alpha} \to u_L \textit{ dans } L^\infty(0, T; V) \textit{ faible étoile et } L^2(0, T; V) \textit{ faible,} \\ u'_{L\alpha} \to u'_L \textit{ dans } L^\infty(0, T; V) \textit{ faible étoile et } L^2(0, T; V) \textit{ faible} \\ u''_{L\alpha} \to u''_L \textit{ dans } L^2(0, T; H) \textit{ faible} \end{array}\right. \tag{53}$$

où u_L *est l'unique solution de l'inéquation variationnelle* (27).

DÉMONSTRATION. – i) *Unicité.* Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions de (27). Si on prend $v = u'_1(t) \in K$ dans l'inéquation vérifiée par $u_2(t)$ et $v = u'_2(t) \in K$ dans l'inéquation vérifiée par $u_1(t)$, on les ajoute, on utilise l'inégalité (32) et on intègre par rapport à la variable t, on en déduit:

$$\left\{\begin{array}{ll} C_0\displaystyle\int_0^t \|\delta(s)\|_H^2\,ds + \frac{1}{2}a\big(\delta(t), \delta(t)\big) < 0\,, & \forall t \in [0, T]\,, \\ \delta(t) = u_2(t) - u_1(t) \in V_0\,, & \delta(0) = 0, \end{array}\right. \tag{54}$$

donc, $\delta(t) = 0$ dans $[0, T]$, d'où l'unicité de la solution de (27).

ii) *Existence.* On va montrer que la solution $u_{L\alpha}$ de (28) tend vers un élément u_L solution de (27) lorsque $\alpha \to +\infty$. Pour cela, on établit des estimations à priori A) sur $u_{L\alpha}$ qui permettent le passage à la limite B).

A) *Estimations à priori*:

A.1) Soit ξ la solution de l'équation variationnelle (c.f. Remarque 11):

$$\left\{\begin{array}{ll} a(\xi, v - \xi) = 0\,, & \forall v \in K, \\ \xi \in K. & \end{array}\right. \tag{55}$$

Soit:

$$\left\{\begin{array}{ll} z_{L\alpha}(t) = u_{L\alpha}(t) - t\xi\,, & \\ z'_{L\alpha}(t) = u'_{L\alpha}(t) - \xi\,, & z_{L\alpha}(0) = 0. \end{array}\right. \tag{56}$$

Alors si on choisit $v = \xi \in K$ dans (28), on ajoute aux deux membres de l'inégalité qui en résulte le terme $-(\beta(\xi), z'_{L\alpha}(t)) - a(t\xi, z'_{L\alpha}(t))$, on utilise les inégalités (32) et (36), on en déduit:

$$C_0\|z'_{L\alpha}(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[a_\alpha(z_{L\alpha}(t), z_{L\alpha}(t))] < c_1\|z_{L\alpha}(t)\|_V + c_2\|z'_{L\alpha}(t)\|_H + \\ + \frac{d}{dt}[\langle f_L(t), z_{L\alpha}(t)\rangle - a(t\xi, z_{L\alpha}(t))], \qquad t \in [0, T].$$

Si on utilise l'inégalité:

$$\text{(57)} \qquad xy < \frac{x^2}{2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}y^2, \qquad \forall \varepsilon > 0$$

avec $\varepsilon = \sqrt{C_0}$ et on intègre de 0 à t, il en résulte:

$$\frac{C_0}{2}\int_0^t \|z'_{L\alpha}(s)\|_H^2\, ds + \frac{1}{2}a_\alpha(z_{L\alpha}(t), z_{L\alpha}(t)) < c_4 + c_5\|z_{L\alpha}(t)\|_V + \\ + c_1\int_0^t \|z_{L\alpha}(s)\|_V\, ds, \qquad t \in [0, T].$$

Comme α est destiné à tendre vers $+\infty$, on peut supposer que $\alpha > 1$. Alors, si on tient compte de la Remarque 8 et on utilise une autre fois l'inégalité (57) avec $\varepsilon = \sqrt{\lambda_1/2}$, il en résulte:

$$\text{(58)} \qquad \frac{C_0}{2}\int_0^t \|z'_{L\alpha}(s)\|_H^2\, ds + \frac{\lambda_1}{4}\|z_{L\alpha}(t)\|_V^2 + \frac{(\alpha-1)}{2}\int_{\Gamma_1} z_{L\alpha}^2(t)\, d\gamma < \\ < c_6 + c_1\int_0^t \|z_{L\alpha}(s)\|_V\, ds, \qquad \forall t \in [0, T].$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on a:

$$\text{(59)} \qquad \|z_{L\alpha}(t)\|_V < c_7, \qquad \forall t \in [0, T],$$

d'où on en déduit:

$$\text{(60)} \qquad \begin{cases} \text{i)} & \displaystyle\int_0^t \|z'_{L\alpha}(s)\|_H^2\, ds < c_8, & \forall t \in [0, T], \\ \text{ii)} & \displaystyle(\alpha - 1)\int_{\Gamma_1} (u_{L\alpha}(t) - tb_0)^2\, d\gamma < c_9, & \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

où les constantes c_i utilisées sont indépendantes de α.

A.2) Soit un instant $t \in [0, T)$, et un nombre $h > 0$ tel que $t + h \in [0, T]$. Si on prend $v = u'_{L\alpha}(t + h)$ dans (28) à l'instant t et $v = u'_{L\alpha}(t)$ dans (28) à l'instant $(t + h)$, on les ajoute, on tient compte de la Remarque 8 et de l'inégalité (32), on intègre sur $[0, t]$, on divise par h^2 et on passe à la limite $h \to 0$, il en résulte:

$$C_0 \int_0^t \|u''_{L\alpha}(s)\|_H^2 ds + \frac{\lambda_1}{2} \|u'_{L\alpha}(t)\|_V^2 + \frac{(\alpha - 1)}{2} \int_{\Gamma_1} (u'_{L\alpha}(t) - b_0)^2 d\gamma <$$
$$< c_{10} + c_{11} \|u'_{L\alpha}(t)\|_V + c_{12} \int_0^t \|u'_{L\alpha}(s)\|_V^2 ds .$$

En utilisant l'inégalité (57) avec $\varepsilon = \sqrt{\lambda_1/2}$, il vient:

$$C_0 \int_0^t \|u''_{L\alpha}(s)\|_H^2 ds + \frac{\lambda_1}{4} \|u'_{L\alpha}(t)\|_V^2 + \frac{(\alpha - 1)}{2} \int_{\Gamma_1} (u'_{L\alpha}(t) - b_0)^2 d\gamma <$$
$$< c_{13} + c_{12} \int_0^t \|u'_{L\alpha}(s)\|_V ds , \qquad \forall t \in [0, T],$$

d'où en appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient:

$$(61) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad \|u'_{L\alpha}(t)\|_V < c_{14}, & \forall t \in [0, T], \\ \text{ii)} \quad \int_0^t \|u''_{L\alpha}(s)\|_H^2 ds < c_{15}, & \forall t \in [0, T], \\ \text{iii)} \quad (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} (u'_{L\alpha}(t) - b_0)^2 d\gamma < c_{16}, & \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

où les constantes c_i utilisées sont indépendantes de α.

Des estimations A.1) et A.2), et lorsque $\alpha \to +\infty$, on a:

$$(62) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad u_{L\alpha} \text{ et } u'_{L\alpha} \in \text{borné de } L^\infty(0, T; V) \text{ et } L^2(0, T; V), \\ \text{ii)} \quad u''_{L\alpha} \in \text{borné de } L^2(0, T; H), \\ \text{iii)} \quad \text{estimation (60 ii)}, \\ \text{iv)} \quad \text{estimation (61 iii)}. \end{cases}$$

B) *Passage à la limite:*

Il résulte des estimations (62) que lorsque $\alpha \to +\infty$, au moins pour une sous-suite, on a (53) et les estimations (60 ii) et (61 iii).

Alors, on a les conséquences suivantes:

$$(63) \qquad \begin{cases} u_L(0) = 0\,, & u'_L(0) = u_1\,, \\ u'_L(t) \in K\,, & \dfrac{u_L(t)}{t} \in K\,, \end{cases}$$

en utilisant la semi-continuité inférieure dans V faible de l'application:

$$(64) \qquad v \to \int_{\Gamma_1} v^2\, d\gamma\,.$$

Il reste donc à démontrer que u_L est solution de (27). Soit:

$$(65) \qquad \mathcal{K} = \{v \in L^2(0, T; V) \,/\, v(t) \in K\}\,.$$

Si on choisit $v \in \mathcal{K}$ dans (28), on intègre sur $[0, T]$ et on tient compte que l'integrale sur Γ_1 est affectée de signe négatif, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^T [a(u_{L\alpha}(t), v(t)) + \varphi(v(t)) - \langle f_L(t), v(t) - u'_{L\alpha}(t)\rangle]\, dt \geqslant \\ \geqslant \int_0^T [a(u_{L\alpha}(t), u'_{L\alpha}(t)) + \varphi(u'_{L\alpha}(t))]\, dt = \\ = \tfrac{1}{2} a(u_{L\alpha}(T), u_{L\alpha}(T)) + \int_0^T \varphi(u'_{L\alpha}(t))\, dt\,, \qquad \forall v \in \mathcal{K}\,. \end{aligned}$$

Si on utilise, maintenant, la semi-continuité inférieure dans V faible des applications:

$$(66) \qquad v \to a(v, v)\,, \qquad v \to \varphi(v)$$

alors, à la limite $\alpha \to +\infty$, on en déduit:

$$(67) \qquad \begin{aligned} \int_0^T [a(u_L(t), v(t) - u'_L(t)) + \varphi(v(t)) - \varphi(u'_L(t)) - \\ - \langle f_L(t), v(t) - u'_L(t)\rangle]\, dt \geqslant 0\,, \qquad \forall v \in \mathcal{K}\,. \end{aligned}$$

Soient $v \in K$, $t \in (0, T)$. Soit $v_0 \in \mathcal{K}$, défini par:

$$v_0(s) = \begin{cases} u'_L(s) & \text{si } s \notin (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \\ v & \text{si } s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers 0. Alors, si on utilise $v_0 \in \mathcal{K}$ dans (67), on divise par 2ε et on passe à la limite $\varepsilon \to 0$, il en résulte (27) sauf peut-être un ensemble de mesure nulle.

REMARQUE 10. – L'élément $u_{L\alpha}$, donné par le Théorème 5, a la propriété supplementaire $u''_{L\alpha} \in L^2(0, T; H)$. Par ailleurs, la hypothèse $f''_L \in L^\infty(0, T; V')$ pourrait être éliminée dans le Théorème 6.

REMARQUE 11. – L'élément défini par (55) représente, après un changement de fonction inconnue, la température stationnaire du problème de Stefan à deux phases [18, 31, 32, 34] pour le cas $g = 0$ et $\tilde{h} = 0$.

REMARQUE 12. – Il convient de remarquer ici l'importance de la forte-monotonie de l'opérateur β, propriété qui a été très souvent utilisée. ■

On peut obtenir l'existence de l'élément u_L dans le Théorème 6, sans utiliser le passage à la limite $\alpha \to +\infty$, par un changement de fonction inconnue et utilisation d'un résultat de [3], selon le:

THÉORÈME 7. – *Sous les hypotheses f_L, $f'_L \in L^2(0, T; V'_0)$, $f''_L \in L^1(0, T; V)$ et $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, il existe une solution et une seule u_L de l'inéquation variationnelle* (27) *pour chaque $L > 0$.*

DÉMONSTRATION. – Il suffit de démontrer l'existence de la solution de l'inéquation (27), car l'unicité a été donnée dans le Théorème 6. Soit ξ l'élément donné par (55), et soit aussi:

$$\text{(68)} \qquad \begin{cases} z_L(t) = u_L(t) - t\xi \in V_0\,, \\ z'_L(t) = u'_L(t) - \xi \in V_0\,, \qquad z_L(0) = 0\,. \end{cases}$$

Si on fait le changement (68) de fonction inconnue dans (27), on obtient:

$$\text{(69)} \qquad \begin{cases} a(z_L(t), v - z'_L(t)) + \eta_0(v) - \eta_0(z'_L(t)) \geq \langle f_L(t), v - z'_L(t)\rangle\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v \in V_0,\ t \in [0, T]\,, \\ z'_L(t) \in V_0 \\ z_L(t) \in V_0\,, \qquad\qquad\qquad\qquad z_L(0) = 0\,, \end{cases}$$

où:

$$\text{(70)} \qquad \eta_0\colon\ V_0 \to \mathbf{R} \,/\, \eta_0(v) = \varphi(v + \xi)\,, \qquad \forall v \in V_0\,.$$

En utilisant l'élément $z_1 = u_1 - \xi$ avec u_1 solution de (41), l'existence de z_L solution de (69), ou l'existence de u_L solution de (27), qui vérifie $z_L \in C([0, T]; V_0)$ et $z'_L \in L^\infty(0, T; V_0)$ est donnée par [3]. En plus, par unicité, on a que $z'_L(0) = z_1 = u_1 - \xi$. ■

Si on suppose que le flux de chaleur est nul sur la partie Γ_2 de frontière et qu'il n'existe pas non plus un apport d'énergie par unité de temps et de volume, c'est-à-dire:

$$(71) \qquad g = 0 \quad \text{dans } Q\,, \qquad \tilde{h} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T)\,,$$

on a le:

THÉORÈME 8. – *Sous les hypothèses* (71), *l'élément* u_L *est la solution de l'inéquation variationnelle*:

$$(72) \quad \begin{cases} \big(\beta(u'_L(t)), v - u'_L(t)\big) + a(u_L(t), v - u'_L(t)) + Lj(v) - Lj(u'_L(t)) \geqslant \\ \qquad\qquad \geqslant (g_{0L}, v - u'_L(t))\,, \quad \forall v \in K,\ t \in [0, T], \\ u'_L(t) \in K \\ \dfrac{u_L(t)}{t} \in K\,, \quad u_L(0) = 0, \end{cases}$$

et on a l'équivalence suivante:

$$(73) \qquad u_L(t) = t\xi \Leftrightarrow \xi = u_1$$

où u_L, ξ *et* u_1 *sont définis par* (72), (55), *et* (41) *respectivement. En plus, la condition* (73) *nous donne une propriété de la solution de l'inéquation variationnelle* (72): *Si la température initiale* θ_0 *donnée est telle qu'on ait* $\xi = k_2\theta_0^+ - k_1\theta_0^-$, *alors sous les hypothèses* (71) *la température dans* Ω *ne dépendra pas du temps* t, *et en plus, elle sera toujours égale à la température initiale* θ_0.

REMARQUE 13. – La condition (8), avec le changement de fonction inconnue (22), simplifie la formulation mathématique du problème, et en plus, c'est à notre avis la condition physique la plus réaliste. Si au lieu de (8), on considère $-(\partial\theta/\partial n)|_{\Gamma_2} = h\theta + h_0$, comme dans [13, 20], on obtient une inéquation variationnelle plus compliquée que celle de (27).

REMARQUE 14. – Le problème en α, c'est-à-dire avec la condition (7 bis), a été crée avec l'objectif mathématique de démontrer sa convergence lorsque $\alpha \to +\infty$. C'est cela, à notre avis, une manière de démontrer l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle (27) pour le cas $b = b(x, t)$, qui reste encore ouvert par une démonstration directe car pour ce cas, les Théorèmes 4 et 5 sont vraies et l'estimation A.1) du Théorème 6 est aussi valable mais pas l'estimation A.2).

REMARQUE 15. – Des autres études sur ce problème on été effectuées dans [6, 7, 18]. Dans [6], Damlamian démontre l'équivalence entre la formulation de Duvaut et Frémond avec sa méthode plus générale et abstraite. Dans ce travail on a choisi celle de Duvaut. Un problème analogue, dans un milieu poreux, est donné dans [1, 16].

REMARQUE 16. – Avec ce travail on étend des résultats de [15] pour le cas $\beta \neq I$ (Identité) en utilisant la théorie de [3] avec β un opérateur forte-monotone. La méthode des inéquations variationnelles, pour le cas $\beta = I$, a été aussi traité dans [9] par un procédé thermodynamique, et dans [28] pour des problèmes de contrôle optimal.

REMARQUE 17. – Dans un prochaine travail [34], on étudiera la limite des fonctions $u_{L\alpha}(t)$ et $u_L(t)$ lorsque la chaleur latente L tend vers zéro et lorsque le temps t tend vers l'infini.

Remerciement. Ce travail représente le développement d'une partie de ma thèse [32] effectuée sous la direction de Monsieur le Professeur G. Duvaut à qui je lui en suis très reconnaissant. Je remercie aussi à l'Arbitre por les indications très précises pour en améliorer la rédaction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AGUIRRE PUENTE - M. FREMOND, *Frost propagation in wet porous media*, Lecture Notes in Mathematics n. 503, Springer-Verlag, Berlin (1976), 137-147.

[2] S. G. BANKOFF, *Heat conduction of diffusion with change of phase*, Advances in Chemical Engineering, Vol. 5, Academic Press, New York (1964), 75-150.

[3] H. BREZIS, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl., **51** (1972), 1-168.

[4] H. S. CARSLAW - J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[5] J. CEA, *Optimisation, théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971.

[6] A. Damlamian, *Problèmes aux limites non linéaires du type du problème de Stefan, et inéquations variationnelles d'évolution*, dans Thèse d'Etat *Résolution de certaines inéquations variationnelles stationnaires et d'évolution*, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), 25 Mai 1976.

[7] A. Damlamian, *Some results on the multi-phase Stefan problem*, Comm. Partial Differential Equations, **2** (1977), 1017-1044.

[8] A. Datzeff, *Sur le problème linéaire de Stefan*, Mémorial des Sciences Physiques n. 69, Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[9] J. D. P. Donnelly, *A model for non equilibrium thermodynamic processes involving phase changes*, J. Inst. Math. Appl., **24** (1979), 425-438.

[10] G. Duvaut, *Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré)*, C. R. Acad. Sci. Paris, **276**A (1973), 1461-1463.

[11] G. Duvaut, *Etude de problèmes unilatéraux en mécanique par des méthodes variationnelles*, C.I.M.E., cours à Bressanone (New variational techniques in Mathematical-Physics), 17-26 Juin (1973), 45-102.

[12] G. Duvaut, *The solution of a two-phase Stefan problem by a variational inequality*, Proc. Symposium on moving boundary problems in heat flow and diffusion, J. R. Ockendon-W. R. Hodgkins (Ed.), Clarendon Press, Oxford (1975), 173-181.

[13] G. Duvaut, *Stefan problems for two-phase varying*, Mémorias de Matemática de Univ. Fed. do Rio de Janeiro n. 51 (1975). *Two phase Stefan problems with varying specific heat coefficients*, An. Acad. Brasil. Ciênc., **47** (1975), 377-380.

[14] G. Duvaut, *Problèmes à frontière libre en théorie des millieux continus*, 2° Congrès Français de mécanique, Toulousse (1975), Rapport de recherche n. 185 du LABORIA-IRIA (1976).

[15] G. Duvaut - J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[16] M. Fremond, *Diffusion problems with free boundaries*, Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, I.C.T.P., Trieste (1976).

[17] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[18] A. Friedman, *The Stefan problem in several space variables*, Trans, Amer. Math. Soc., **132** (1968), 51-87.

[19] D. Kinderlehrer - G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

[20] J. L. Lions, *Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal*, Les Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal, 1976.

[21] E. Magenes, *Topics in parabolic equations: Some typical free boundary problems*, Publ. 130, Laboratorio di Analisi Numerica, Pavia (1977).

[22] J. C. Muehlbauer - J. E. Sunderland, *Heat conduction with freezing or melting*, Appl. Mech. Rev., **18** (1965), 951-959.

[23] J. R. Ockendon - W. R. Hodgkins (Ed.), *Moving boundary problems in heat flow and diffusion*, Clarendon Press, Oxford, 1975.

[24] M. Primicerio, *Problemi a contorno libero per l'equazione della diffusione*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **32** (1973/74), 183-206.

[25] M. Primicerio, *Problemi di diffusione a frontiera libera*, Boll. Un. Mat. Ital., **18**-A (1981), 11-68.

[26] L. I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, Trans. Math. Monographs - Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, 1971.

[27] L. I. RUBINSTEIN, *The Stefan problem: comments on its present state*, J. Inst. Math. Appl., **24** (1979), 259-277.

[28] C. SAGUEZ, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Applications à des problèmes de frontière libre*, Rapport de Recherche n. 191, IRIA-LABORIA (1976).

[29] G. SESTINI, *Problemi di diffusione lineari e non lineari analoghi a quello di Stefan*, Conferenze Sem. Mat. Univ. di Bari, n. 55-56 (1960).

[30] G. SESTINI, *Problemi analoghi a quello di Stefan e loro attualità*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **37** (1967-68), 39-50.

[31] D. A. TARZIA, *Aplicación de métodos variacionales en el problema de Stefan a dos fases*, Math. Notae, **27** (1979/80), 145-156.

[32] D. A. TARZIA, *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C. R. Acad. Sci. Paris, **288**A (1979), 941-944. Voir aussi Thèse de 3ème Cycle, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI), 8 Mars 1979.

[33] D. A. TARZIA, *Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Math. Notae, **28** (1980/81), 73-89.

[34] D. A. TARZIA, *Etude de l'inéquation variationnelle proposé par Duvaut pour le problème de Stefan à deux phases, II*, à paraître.

[35] D. G. WILSON - A. D. SOLOMON - P. T. BOGGS (Ed.), *Moving boundary problems*, Academic Press, New York, 1978.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 16 marzo 1981