SOCIEDAD MEXICANA DE TRANSFERENCIA DE CALOR, A.C.

LA VERDAD OS HARA LIBRES
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

3er. CONGRESO LATINOAMERICANO DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA

CLTCM

4 AL 7 DE JULIO DE 1988
GUANAJUATO, GTO. MEXICO

SOBRE UNA NUEVA VARIANTE PARA EL CALCULO SIMULTANEO DE ALGUNOS COEFICIENTES TERMICOS DESCONOCIDOS DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO

Domingo A. TARZIA

Promar(CONICET-UNR),
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.

RESUMEN

Cuando el coeficiente de conducción térmica k de un material semi-infinito es desconocido, puede plantearse una nueva variante para el cálculo simultáneo de algunos de sus coeficientes térmicos. Esta determinación es obtenida a través de un problema inverso o directo de Stefan a dos fases con una sobre-condición en el borde fijo del material de cambio de fase. Esta variante es nueva respecto de la desarrollada en [StaTa,StoTa] siguiendo el método presentado en [Ta2] para el problema a una fase.

ABSTRACT

When the thermal coefficient k of a semi-infinite material is unknown, a new variant for the simultaneous determination of some of its thermal coefficients can be stated. This statement is attained by means of an inverse or direct two-phase Stefan problem with an over-condition on the fixed face of the phase change material. This variant is a new variant respect to the one developed in [StaTa, StoTa] following the method presented for the one-phase change problem in [Ta2].

I. INTRODUCCION.

Se considera un cuerpo semi-infinito, representado por $x > 0$, que inicialmente se encuentra en su fase sólida a una temperatura uniforme $-C < 0$ y al cual se le impone una temperatura constante $B > 0$ en el borde fijo $x = 0$ para $t > 0$. Si se considera, sin pérdida de generalidad, que la temperature de cambio de fase es 0°C entonces se tiene un problema de conducción del calor con cambio de fase. Se supone que la densidad de masa es constante en ambas fases (Ver §IV para densidades desiguales).

Cuando el coeficiente de conducción térmica de la fase líquida k_2 es desconocido, puede plantearse una nueva variante de la dada en [StaTa] para el cálculo simultáneo de k_2 y un segundo coeficiente térmico desconocido correspondiente a la fase líquida, sólida o coeficiente que caracterisa la frontera libre que separa ambas fases. Se generaliza a un problema a dos fases lo realizado en [Ta2].

Esta determinación es obtenida a través de un problema de frontera móvil y libre [Ta4] del tipo de Stefan a dos fases (en nuestro caso, un problema de fusión) con una sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$ del material de cambio de fase de la forma [Ta1]:

$$(1) \qquad \theta_{2_x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}} \qquad , t > 0$$

con $H_0 > 0$ el coeficiente que caracteriza el gradiente de temperatura en el borde fijo $x=0$. En la condición (1) no aparece el coeficiente k_2 y por ende, la medición del flujo de calor es substituida por la de la pendiente de la temperatura en $x = 0$. El coeficiente H_0 debe ser calculado experimentalmente a través de un proceso de cambio de fase con las condiciones iniciales y de contorno mencionadas anteriormente. Esta variante es útil desde el punto de vista práctico.

Numerosas referencias sobre la determinación de coeficientes pueden encontrarse en [StaTa, Ta3].

Se supone que la temperatura $\theta = \theta(x,t)$ del material está definida por :

$$(2) \qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t)>0 & \text{si} \quad 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \ , \\ 0 & \text{si} \quad x = s(t) \ , \ t > 0 \ , \\ \theta_1(x,t)<0 & \text{si} \quad x > s(t) \ , \ t > 0 \ , \end{cases}$$

donde $x = s(t)$ representa la interfase sólida-líquida que separa ambas fases.

Las condiciones, que se deben satisfacer, están dadas por

$$\theta_{2_t} - \alpha_2\, \theta_{2xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \ ,$$
$$\theta_{1t} - \alpha_1\, \theta_{1xx} = 0 \quad , \quad x > s(t) \ , \ t > 0 \ ,$$
$$(3) \qquad \theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0 \ , \ k_1\, \theta_{1_x}(s(t),t) - k_2\, \theta_{2_x}(s(t),t) = \rho\, l\, \dot{s}(t), \ t > 0,$$

$$(3) \qquad s(0) = 0, \qquad \theta_1(x,0) = \theta_1(+\infty,t) = -C < 0 \ , \ x > 0 \ , \ t > 0 \ ,$$

$$\theta_2(0,t) = B > 0 \ , \ \theta_{2x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}} \ , \ t > 0 \ ,$$

donde k, ρ, c, α, l son los coeficientes de conducción térmica, densidad de masa, calor específico, difusión térmica y calor latente respectivamente, siendo además los subíndices utilizados: $i=1$ (fase sólida) y $i=2$ (fase líquida).

Se pueden formular dos problemas, según sea $x = s(t)$ desconocida (frontera libre) o conocida (frontera móvil) a priori :

Problema P_1 : Dados B, C, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos k_1 , l, ρ, c_1 , $c_2 > 0$, se quiere hallar $\left\{\theta_1(x,t), \ \theta_2(x,t), \ s(t), \ k_2\right\}$ de manera que se satisfagan las condiciones (3).

Problema P_2 : Dados B, C, $H_0 > 0$ y $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ con $\sigma > 0$ (coeficiente conocido, que debe ser determinado exerimentalmente) se quiere hallar $\left\{\theta_1(x,t), \ \theta_2(x,t), \ k_2 \ , \ j\right\}$ donde j es un coeficiente térmico tomado entre k_1 , l , ρ, c_1 , c_2 , siendo los otros cuatro coeficientes considerados como datos del problema, de manera que se satisfagan las condiciones (3).

En los seis posibles casos se obtienen :

i) fórmulas analíticas para la determinación simultánea de las incógnitas.

ii) desigualdades que relacionan los diversos parámetros del material y de los datos del problema en cuestión.

iii) en algunos casos se determina que el problema es mal planteado al no existir solución cualesquiera sean los datos.

II. SOLUCION DEL PROBLEMA P_1

Se obtiene la siguiente propiedad :

Teorema 1 . Cualesquiera sean los datos B, C, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos k_1 , l, ρ, c_1 , $c_2 > 0$, el problema P_1 tiene una única solución dada por

$$\text{i) } \theta_1(x,t) = \frac{C}{1 - f(\sigma/a_1)} \left(f(\sigma/a_1) - f(x/2\, a_1\sqrt{t}\,) \right) \ ,$$

(4)

$$\text{ii) } \theta_2(x,t) = B \left(1 - \frac{f(x/2\, a_2\sqrt{t}\,)}{f(\sigma/a_2)} \right), \qquad \text{iii) } s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$$

donde los coeficientes k_2 y σ están dados por :

$$(5) \qquad k_2 = \frac{\rho\, B^2\, c_2}{\pi\, H_0^2}\ \frac{1}{f^2(\xi_2)}\ , \qquad\qquad (6) \qquad \sigma = \frac{B}{H_0\, \sqrt{\pi}}\ \frac{1}{G(\xi_2)}\ ,$$

siendo $\xi_2 > 0$ la única solución de la ecuación

$$(7) \qquad F(x) = x \ , \ x > 0 \ ,$$

con

$$f(x) \equiv erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2)\ du \ , \qquad G(x) = \frac{f(x)}{x} \ ,$$

$$(8) \qquad F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{1 - f(x)} \ , \qquad F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{f(x)} \ ,$$

$$S(x) = \frac{B}{a_1\, H_0\, \sqrt{\pi}}\ \frac{1}{G(x)} \ , \quad F(x) = \frac{B\, c_2}{l\, \sqrt{\pi}}\ F_2(x) - \frac{C\, k_1\, H_0}{B\, l\, \rho\, a_1}\ f(x)\ F_1(S(x)) \ .$$

Demostración. Substituyendo (4) en (3) y definiendo

$$(9) \qquad \xi_2 = \frac{\sigma}{a_2} \ , \quad \xi_1 = \frac{\sigma}{a_1} \ , \quad \text{con} \ \ a_i = \left(\frac{k_i}{\rho\, c_i} \right)^{1/2} \ \ (\ i = 1, 2\ )$$

se obtiene que los coeficientes k_2 y σ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones :

$$(10) \qquad i)\ \frac{k_2\, H_0}{\rho\, l\, \sigma}\ \exp(-\xi_2^{\,2}) - \frac{C\, k_1}{\rho\, l\, \sigma\, a_1\, \sqrt{\pi}}\ F_1(\xi_1) = 1 \ , \ ii)\ f(\xi_2) = \frac{B}{H_0\, a_2\, \sqrt{\pi}} \ .$$

Despejando a_2 de (10ii) y teniendo presente que $k_2 = \rho\, c_2\, a_2^2$ se deduce (5). De (10ii) y (9) se obtiene

$$(11) \qquad \xi_1 = S(\xi_2)$$

y por ende, de (9), se deduce (6).

Teniendo en cuenta (11), la ecuación (10i) con incógnita ξ_2 , es equivalente a la ecuación (7) que tiene única solución debido a las siguientes propiedades :

$$F_1(0^+) = 1 \ , \ F_1(+\infty) = +\infty \ , \ F_1' > 0 \ ; \qquad F_2(0^+) = +\infty \ , \ F_2(+\infty) = 0 \ , \ F_2' < 0 \ ,$$

$$(12) \qquad G(0^+) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ , \ G(+\infty) = 0 \ , \ G' < 0 \ ; \qquad S(0^+) = \frac{B}{2\, a_1\, H_0} \ , \ S(+\infty) = +\infty \ , \ S' > 0 \ ,$$

$$F(0^+) = +\infty \ , \ F(+\infty) = -\infty \ , \ F' < 0 \ .$$

con lo cual se deduce la tesis. Además, la unicidad de solución se tiene por la unicidad de la solución de Neumann para el problema de Stefan a dos fases con datos de temperatura inicial y de borde constantes [CaJa, Fr, Ru].

III. SOLUCION DEL PROBLEMA P_2

En el problema P_2 pueden presentarse cinco diferentes casos, pues el segundo coeficiente térmico desconocido (además de k_2) puede ser uno cualquiera entre los cinco parámetros siguientes : k_1, l, ρ, c_1, c_2.

Teorema 2. (Determinación simultánea de k_1 y k_2) : La condición nesesaria para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y k_1 tenga una única solución es que los datos B, C, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos l, ρ, c_1, $c_2 > 0$ verifiquen las desigualdades

$$(13) \qquad G(\omega_1) < \frac{B}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} ,$$

donde $\omega_1 = \omega_1(C, \sigma, H_0, l, c_1, c_2) > 0$ es la única solución de la ecuación

$$(14) \qquad W_1(x) = 0 \quad , \quad x > 0 ,$$

con

$$(15) \qquad W_1(x) = \exp(-x^2) - \frac{C c_1 + l}{\sigma H_0 c_2} x^2 .$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera

$$(16) \qquad k_2 = \frac{\rho c_2 \sigma^2}{\xi_2^2} \quad , \qquad (17) \qquad k_1 = \frac{\rho c_1 \sigma^2}{\xi_1^2}$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación

$$(18) \qquad G(x) = \frac{B}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} \quad , \ x > 0 ,$$

y $\xi_1 > 0$ es la única solución de la ecuación

$$(19) \qquad \frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{C c_1} \left(\frac{\sigma H_0 c_2}{l \xi_2^2} \exp(-\xi_2^2) - 1 \right) \quad , \ x > 0 ,$$

con

$$(20) \qquad Q(x) = \sqrt{\pi}\, x \exp(x^2) \ (1 - f(x)) .$$

Demostración. Si se substituye (4) en (3) y se define ξ_2 y ξ_1 por (9) se obtiene (10i,ii). De (9) se deducen (16) y (17). De (9) y (10ii) se obtiene que ξ_2 satisface la ecuación (18), la cual tiene única solución si y solo si los datos satisfacen la desigualdad

$$(21) \qquad \frac{B}{2 \sigma H_0} < 1 .$$

De (9) y (16) se deduce que ξ_1 satisface la ecuación (19), la cual, debido a las propiedades

(22) $$Q(0^+) = 0 \quad , \quad Q(+\infty) = 1 \quad , \quad Q' > 0 \quad ,$$

tendrá única solución si y sólo si el segundo miembro de (19) es mayor que 1 , lo cual es equivalente a que ξ_2 verifique la desigualdad

(23) $$\xi_2 < \omega_1$$

donde ω_1 es la única solución de (14).

Utilizando el hecho que la función G es decreciente se deduce que existe un único ξ_1 , solución de (19) si y sólo si

(24) $$G(\omega_1) < G(\xi_2) = \frac{B}{\sigma\ H_0 \sqrt{\pi}} \quad .$$

La condición (13) se obtiene de (21) y (24).

Para los cuatro restantes casos del problema P_2 , sólo se enunciarán los resultados que se obtienen sin realizar las correspondientes demostraciones.

Teorema 3.

i) (Determinación simultánea de k_2 y c_2) : La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y c_2 tenga una única solución es que los datos B, C, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos l, ρ, c_1 , $k_1 > 0$ verifiquen la desigualdad

(25) $$\frac{B}{2\ \sigma\ H_0} < 1 \quad .$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

(26) $$k_2 = \frac{\rho\ l\ \sigma}{H_0} \left(1 + \frac{C\ k_1}{\rho\ l\ \sigma\ a_1 \sqrt{\pi}}\ F_1\left(\frac{\sigma}{a_1} \right) \right) \exp(\xi_2^2) \quad ,$$

(27) $$c_2 = \frac{l}{\sigma\ H_0} \left(1 + \frac{C\ k_1}{\rho\ l\ \sigma\ a_1 \sqrt{\pi}}\ F_1\left(\frac{\sigma}{a_1} \right) \right) \xi_2^2 \ \exp(\xi_2^2) \quad ,$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de (18).

ii) (Determinación simultánea de k_2 y l): La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y l tenga una única solución es que los datos B, C, σ, $H_0 > 0$ y los ooeficientes térmicos ρ, c_1 , c_2 , $k_1 > 0$ verifiquen las desigualdades

$$(28) \qquad G(\omega_2) < \frac{B}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} ,$$

donde $\omega_2 = \omega_2(C, \sigma, H_0, \rho, k_1, c_1, c_2) > 0$ es la única solución de la ecuación

$$(29) \qquad W_2(x) = 0 \quad , \quad x > 0 ,$$

con

$$(30) \qquad W_2(x) = \exp(-x^2) - \frac{C\, k_1}{\rho\, H_0\, c_2\, \sigma^2\, a_1 \sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) x^2 ,$$

$$W_2(0^+) = 1 \quad , \quad W_2(+\infty) = -\infty \quad , \quad W_2' < 0 .$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

$$(31) \qquad k_2 = \frac{\rho\, c_2\, \sigma^2}{\xi_2^2} \quad , \qquad (32) \qquad 1 = \sigma\, H_0\, c_2 \frac{W_2(\xi_2)}{\xi_2^2}$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación (18).

iii) (Determinación simultánea de k_2 y c_1): La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y c_1 tenga una única solución es que los datos B, C, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos ρ, l, c_2 , $k_1 > 0$ verifiquen las desigualdades

$$(33) \qquad G(\omega_3) < \frac{B}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} < \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

donde $\omega_3 = \omega_3(\sigma, H_0, l, c_2) > 0$ es la única solución de la ecuación

$$(34) \qquad W_3(x) = 0 \quad , \quad x > 0 ,$$

con

$$(35) \qquad W_3(x) = \exp(-x^2) - \frac{l}{\sigma\, H_0\, c_2} x^2 \quad ; \qquad W_3(0^+)=1 \ , \ W_3(+\infty)=-\infty \ , \ W_3'<0.$$

En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

$$(36) \qquad k_2 = \frac{\rho\, c_2\, \sigma^2}{\xi_2^2} \quad , \qquad (37) \qquad c_1 = \frac{k_1}{\rho\, \sigma^2} \xi_1^2$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación (18) y ξ_1 es la única solución de la ecuación

$$(38) \qquad V(x) = \frac{\rho\, H_0\, c_2\, \sigma^3 \sqrt{\pi}}{C\, k_1} \frac{W_3(\xi_2)}{\xi_2^2} \quad , \quad x > 0$$

con

(39) $\quad V(x) = x\, F_1(x) \quad , \qquad V(0^+) = 0 \quad , \; V(+\infty) = +\infty \quad , \; V' > 0 \; .$

iv) (Determinación simultánea de k_2 y ρ) : La condición nesesaria y suficiente para que el problema P_2 con coeficientes desconocidos k_2 y ρ tenga una única solución es que los datos $B,C,\sigma,H_0>0$ y los coeficientes térmicos $l,c_1,c_2,k_1>0$ verifiquen las desigualdades (13). En tal caso, la temperatura está dada por (4i,ii) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera

(40) $\quad k_2 = \dfrac{c_2\, k_1}{c_1}\, \dfrac{\xi_1^2}{\xi_2^2} \quad , \qquad$ (41) $\quad \rho = \dfrac{k_1}{\sigma^2\, c_1}\, \xi_1^2 \quad ,$

donde $\xi_2 > 0$ y $\xi_1 > 0$ son respectivamente la solución de las ecuaciones (18) y (19).

Observación 1. Si el coeficiente k_2 es conocido entonces la idea de este trabajo (definido con la constante H_0) para la determinación simultánea de coeficientes térmicos de un material a través de un proceso de cambio de fase coincide con la dada en [StaTa] (definido con la constante h_0) a través de la relación $h_0 = k_2\, H_0$.

Observación 2. En el caso en que todos los coeficientes térmicos del material semi-infinito sean conocidos, entonces la condición (1) (última condición de (3)) es superflua con lo cual la solución de Neumann para datos B y C viene dada por (4), donde el coeficiente $\sigma > 0$, que caracteriza la frontera libre $s(t)$, es la única solución de la ecuación

(42) $\quad U(x) = x \quad , \; x > 0 \quad ,$

donde

$$U(x) = \frac{B\, k_2}{\rho\, l\, a_2 \sqrt{\pi}}\, F_2\!\left(\frac{x}{a_2}\right) - \frac{C\, k_1}{\rho\, l\, a_1 \sqrt{\pi}}\, F_1\!\left(\frac{x}{a_1}\right) ,$$

(43)

$$U(0^+) = +\infty \quad , \; U(+\infty) = -\infty \quad , \; U' < 0 \quad .$$

En este caso, el coeficiente H_0 viene dado por

(44) $\quad H_0 = -\, \theta_{2x}(0,t)\, \sqrt{t} = \dfrac{B}{a_2 \sqrt{\pi}\, f\!\left(\frac{\sigma}{a_2}\right)} > 0 \quad .$

Reemplazando (44) en las desigualdades, previamente halladas y que deben ser ciertas para cualquier material, se obtienen propiedades adicionales (en forma de desigualdades) que son siempre verdaderas y que pueden interpretarse como desigualdades para el coeficiente σ (Ver, por ejemplo, [StaTa, Ta1]).

Observación 3. Este trabajo simplifica, desde el punto de vista práctico, los datos experimentales requeridos para la aplicación del método al reemplazar la medición del flujo de calor por la de la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x = 0$.

Observación 4. Si la temperatura inicial es igual a la del cambio de fase, es decir $C = 0$, entonces los resultados obtenidos aquí coinciden con los obtenidos en [Ta2]. Más aún, para el caso (iv) del Teorema 3 se obtiene : Si los datos B, σ, $H_0 > 0$ verifican la desigualdad (21), entonces existe un único elemento $\xi > 0$ solución de la ecuación (18). Si además, se satisface la condición adicional

$$(45) \qquad \xi^2 \exp(\xi^2) = \frac{\sigma\, c_2\, H_0}{l}$$

entonces existen infinitas soluciones k_2 y ρ, las cuales vienen dadas por la siguiente relación (en caso contrario, no existe solución) :

$$(46) \qquad \frac{k_2}{\rho} = \frac{\sigma^2\, c_2}{\xi^2}$$

lo cual resulta ser un complemento a la Observación 7 de [Ta2]. □

Si el coeficiente desconocido es k_1, en lugar de k_2, entonces la variante explícitada anteriormente puede también aplicarse cambiando el proceso de fusión por el de solidificación, como se verá más adelante, considerando además la convección inducida por el cambio de densidad de masa en la transición de fase sólido-líquido (es decir, $\rho_1 \neq \rho_2$).

IV. SOBRE LA DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS CONSIDERANDO EL CAMBIO DE DENSIDAD DE MASA.

Se considera el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo semi-infinito que se encuentra inicialmente en la fase líquida a una temperatura $D > 0$ y que en el borde fijo $x = 0$ está sometido a una temperatura $-E < 0$.

Si se tiene en cuenta el salto de densidad en la interfase sólido—líquida $x=s(t)$, se supone que la temperatura $\theta = \theta(x,t)$ del material está definido por :

$$(47) \qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_1(x,t) < 0 & \text{si} \quad 0 < x < s(t) \;,\; t > 0 \;, \\ 0 & \text{si} \quad x = s(t) \;,\; t > 0 \;, \\ \theta_2(x,t) > 0 & \text{si} \quad x > s(t) \;,\; t > 0 \;, \end{cases}$$

y se impone en $x = 0$ una sobre-condición del tipo (1), entonces la formulación matemática del problema viene dada por :

$$\alpha_1\, \theta_{1_{xx}} = \theta_{1_t} \quad , \quad 0 < x < s(t)\ , \ t > 0\ ,$$

$$\alpha_2\, \theta_{2_{xx}} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\ \dot{s}(t)\, \theta_{2_x} = \theta_{2_t} \quad , \qquad x > s(t)\ ,\ t > 0\ ,$$

(48) $$\theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0\ , \quad k_1\, \theta_{1_x}(s(t),t) - k_2\, \theta_{2_x}(s(t),t) = \rho_1\, l\, \dot{s}(t)\ ,\ t>0,$$

$$s(0) = 0 \quad , \quad \theta_2(+\infty,t) = \theta_2(x,0) = D<0\ ,\ x>0\ ,\ t>0\ ,$$

$$\theta_1(0,t) = -E < 0 \quad , \quad \theta_{1_x}(0,t) = \frac{H_0}{\sqrt{t}} \quad , \quad t>0\ .$$

Si el coeficiente k_1 es desconocido y teniendo en cuenta todo lo realizado anteriormente (para no repetir cálculos análogos) se puede plantear el siguiente

Problema 3. Dados $D,E,H_0>0$ y $s(t) = 2\,\sigma\,\sqrt{t}$ con $\sigma>0$ se quiere hallar $\Big\{ \theta_1(x,t)$, $\theta_2(x,t)$, k_1, ρ_1 ó $\rho_2 \Big\}$ de manera que se satisfagan las condiciones (48).

La temperatura viene dada por [BaTa, CaJa, Ru, StoTa]

$$\theta_1(x,t) = -E\left(1 - \frac{f(x/2a_1\sqrt{t})}{f(\frac{\sigma}{a_1})}\right) \quad ,$$

(49) $$\theta_2(x,t) = \frac{D}{1 - f(\frac{\sigma}{a_0})}\left(f\Big(\frac{\sigma}{a_2}\,|\,\varepsilon\,| + \frac{x}{2\,a_2\,\sqrt{t}}\Big) - f(\frac{\sigma}{a_0})\right) \quad ,$$

$$a_0 = \frac{a_2}{1 + |\,\varepsilon\,|} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \quad , \quad a_i = \left(\frac{k_i}{\rho_i\, c_i}\right)^{1/2} = \alpha_i^2 \quad ,$$

y los dos coeficientes térmicos desconocidos k_1 y ρ_1 ó ρ_2 deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones no-lineales

$$\text{i)}\ \frac{k_1\, H_0}{l\, \rho_1}\ \exp(-\xi_1^2) - \frac{k_2\, D}{l\, \rho_1\, a_2\, \sqrt{\pi}}\ F_1(\xi_0) = \sigma \quad ,$$

(50)

$$\text{ii)}\ f(\xi_1) = \frac{E}{a_1\, H_0\, \sqrt{\pi}}$$

donde

(51) $\xi_2 = \frac{\sigma}{a_2}$, $\xi_1 = \frac{\sigma}{a_1}$, $\xi_0 = \frac{\sigma}{a_0}$.

A continuación, se dará el resultado correspondiente a la determinación simultánea de los coeficientes térmicos k_1 y ρ_2 con la particularidad de que $\rho_1 > \rho_2$, es decir que se incluye a todos los materiales excepto al agua (la determinación de k_1 y ρ_1 es dejada al lector).

Teorema 4. La condición necesaria y suficiente para que el problema P_3 con coeficientes desconocidos k_1 y ρ_2 (con $\rho_1 > \rho_2$) tenga una única solución es que los datos D, E, σ, $H_0 > 0$ y los coeficientes térmicos l, ρ_1, c_1 , c_2 , k_2 verifiquen las desigualdades

(52) $$G(w_5) < \frac{E}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} < G(w_6)$$

donde $w_5 = w_5(\sigma, D, H_0, c_1, c_2, l) > 0$ es la única solución de la ecuación

(53) $$W_5(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad ,$$

y $w_6 = w_6(\sigma, D, H_0, c_1, c_2, l, \rho_1, k_2) > 0$ es la única solución de la ecuación

(54) $$W_6(x) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad ,$$

con

(55) $$W_5(x) = \exp(-x^2) - \frac{l + D\, c_2}{\sigma\, c_1\, H_0}\, x^2 \quad ,$$
$$W_6(x) = \exp(-x^2) - \frac{x^2}{\sigma\, c_1\, H_0}\left(1 + \frac{D\, c_2}{Q\left(\sigma\sqrt{\frac{c_2\, \rho_1}{k_2}}\right)}\right) .$$

En tal caso, la temperature viene dada por (49) y los coeficientes térmicos desconocidos están expresados de la siguiente manera :

(56) $$k_1 = \frac{\sigma^2\, c_1\, \rho_1}{\xi_1^2} \quad , \qquad (57) \quad \rho_2 = \frac{\rho_1\, c_2\, \sigma^2}{k_2\, \xi_0^2}$$

donde $\xi_1 > 0$ es la única solución de la ecuación

(58) $$G(x) = \frac{E}{\sigma H_0 \sqrt{\pi}} \quad , \quad x > 0 \quad ,$$

y $\xi_0 > 0$ es la única solución de la ecuación

(59) $$\frac{1}{Q(x)} = \frac{\sigma\, H_0\, c_1}{D\, c_2\, \xi_1^2}\, W_4(\xi_1) \quad , \quad x > 0 \quad ,$$

con

(60) $$W_4(x) = \exp(-x^2) - \frac{1}{\sigma\, H_0\, c_1}\; x^2 \qquad ,$$

Demostración. Teniendo en cuenta (49) y (51), la ecuación (50ii) es equivalente a (58), la cual tiene única solución si y sólo si el segundo miembro de (58) es menor que $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, es decir

(61) $$\frac{E}{2\,\sigma\, H_0} < 1 \qquad .$$

Mediante diversos cálculos elementales se deducen (56), (57) y

(62) $$\varepsilon_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\,\varepsilon_0 \qquad , \qquad a_2 = \frac{k_2}{\sigma\,\rho_1\, c_2}\;\varepsilon_0$$

con lo cual la ecuación (50i), con incógnita ε_0, es equivalente a la ecuación (59), la cual tiene única solución $\varepsilon_0 > 0$ si y sólo si (Ver (22))

(63) $$\frac{\sigma\, c_1\, H_0}{D\, c_2\, \varepsilon_1^2}\; W_4(\varepsilon_1) > 1 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_1 < w_5$$

pues la función W_5 verifica las siguientes propiedades :

(64) $$W_5(0^+) = 1 \quad , \quad W_5(+\infty) = -\infty \quad , \quad W_5' < 0 \qquad .$$

Utilizando (58) y el hecho que la función G es decreciente (Ver (12)), la condición (63) es equivalente a

(65) $$G(w_5) < \frac{E}{\sigma\, H_0\, \sqrt{\pi}} \qquad .$$

Por otra parte, utilizando (59) y el hecho de que la función Q es creciente (Ver (22)), se tiene la siguiente equivalencia:

(66) $$\rho_1 > \rho_2 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_0 > \sigma\sqrt{\frac{c_2\,\rho_1}{k_2}} \;\Leftrightarrow\; Q(\varepsilon_0) > Q\left(\sigma\sqrt{\frac{c_2\,\rho_1}{k_2}}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; W_4(\varepsilon_1) < \frac{D\, c_2}{\sigma\, c_1\, H_0}\;\frac{\varepsilon_1^2}{Q\left(\sigma\sqrt{\frac{c_2\,\rho_1}{k_2}}\right)} \;\Leftrightarrow\; W_6(\varepsilon_1) < 0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_1 > w_6 \;\Leftrightarrow$$

(67) $$\frac{E}{\sigma\, H_0\, \sqrt{\pi}} < G(w_6) \qquad .$$

Como la condición (67) implica la (61), debido a (22), las condiciones necesarias y suficientes se reducen a (65) y (67), es decir (52).

Observación 5. Utilizando las definiciones de W_5 , W_6 y Q , se deduce $W_6(w_5) < W_5(w_5) = 0$, es decir que

(68) $w_6 < w_5$

con lo cual la doble desigualdad (52) resulta ser coherente.

Observación 6. El §IV resulta ser una nueva variante de la dada en [StoTa] para la determinación de coeficientes térmicos considerando el cambio de densidad de masa ($\rho_1 \neq \rho_2$).

AGRADECIMIENTO.

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por el CONICET (Argentina) a través del proyecto de investigación y desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática".

REFERENCIAS

[BaTa] A.B. BANCORA – D.A. TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free bondary", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 9(1985), 215-222.

[CaJa] H.S. CARSLAW – J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", Oxford Univ. Press (Clarendon), London (1959).

[Fr] A. FRIEDMAN, "On dimensional Stefan problems with nonmonotone free boundary", Trans. Amer. Math. Soc., 133 (1968), 89-114.

[Ru] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971).

[StaTa] M.B. STAMPELLA – D.A. TARZIA, "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", Int. J. Eng. Sci., To appear.

[StoTa] C.O. STOICO – D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos en materiales semi-infinitos a través de un proceso con cambio de fase", II Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia, San Pablo (Brasil), 12-15 Mayo 1986, Vol. 2, 348-356.

[Ta1] D.A. TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math., 39 (1981-82), 491-497.

[Ta2] D.A. TARZIA, "A new variant for the simultaneous calculation of some thermal coefficients of a semi-infinite material through a phase-change problem with an over-condition on the fixed fare", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 8 (1984), 227-235.

[Ta3] D.A. TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Láme-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151-1157. See also Adv. Appl. Math., 3 (1982), 74-82.

[Ta4] D.A. TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981-82), 147-252. See also "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan problem", (with aprox. 2500 titles), Progetto Nazionale M.P.I. "Equazioni di evoluzione e applicazioni fisico-matematiche", Firenze (1988).