3er. CONGRESO LATINOAMERICANO DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA

4 AL 7 DE JULIO DE 1988
GUANAJUATO, GTO. MEXICO

SOBRE UN MODELO DE ZONA PASTOSA A DOS FASES CON SOLUCION EXACTA

Domingo Alberto TARZIA

PROMAR (CONICET - UNR), Instituto de Matemática "B. Levi",
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería, Avda. Pelegrini 250,
(2000) ROSARIO, ARGENTINA.

RESUMEN

Se obtiene una solución exacta para un modelo de zona pastosa para el problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito con densidades de masa iguales en las fases sólida y líquida. Se generaliza a dos fases el modelo dado para el problema de Lamé - Clapeyron (Stefan) a una fase en [5] (Ver también [7]).

ABSTRACT.

We obtain an exact solution for a mushy zone model for the two-phase Stefan problem for a semi-infinite material with mass densities equal in both solid and liquid phases. We generalise the model given for the one-phase Lamé - Clapeyron (Stefan) problem in [5] (see also [7]) to the two-phase case.

1. INTRODUCCION

Se plantea un modelo de zona pastosa ("mushy zone") para el problema de Stefan a dos fases (con densidades de masa iguales en ambas fases) para un material semi-infinito (representado por $x>0$) en el cual se hacen las siguientes suposiciones (se generaliza a dos fases el modelo dado para el problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase en [5]. Ver también [7]) :

H1) La fase sólida a temperatura $\theta=\theta_1(x,t)<0$, se encuentra en la región $x > r(t), \ t > 0$.

H_2) La fase líquida, a temperatura $\theta=\theta_2(x,t)>0$, se encuentra en la región $0<x<s(t)$, $t>0$.

H_3) La región pastosa ocupa la región $s(t)<x<r(t)$, $t>0$ a la temperatura $\theta=0$ (de cambio de fase) y se hacen dos hipótesis sobre su estructura :

i) El material en la zona pastosa contiene una fracción fija $\varepsilon\, l$ (con $0<\varepsilon<1$ constante) del calor latente de fusión l por unidad de masa.

ii) El ancho de la zona pastosa es inversamente proporcional al gradiente de la temperatura en $x=s^-(t)$, llamando con $\gamma>0$ a dicha constante de proporcionalidad.

Si el material semi-infinito se encuentra inicialmente en estado sólido a la temperatura inicial constante $-C<0$, al cual se le impone una temperatura constante $B>0$ en el borde fijo $x=0$ para $t>0$, entonces se obtienen los siguientes resultados:

(i) Una solución exacta para $\theta_1(x,t)$, $\theta_2(x,t)$, $s(t)$ y $r(t)$ en función de la temperatura inicial y de borde, de los parámetros de la zona pastosa ε y γ, y de los coeficientes térmicos del material.

(ii) Se obtiene una conclusión análoga a la dada en la parte (i) si se reemplaza en la hipótesis (H_3ii) el gradiente de temperatura en $x = s^-(t)$ por el gradiente de temperatura en $x = r^+(t)$.

2. <u>SOLUCIONES EXACTAS PARA DIFERENTES PROBLEMAS.</u>

(A) Teniendo en cuenta las hipótesis (H_1)-(H_3) se puede plantear el <u>problema (P_1)</u> que consiste en hallar las fronteras libres $x=s(t)$ y $x=r(t)$, definidas para $t>0$ con $s(0)=r(0)=0$ y la temperatura $\theta=\theta(x,t)$, definida para $x>0$ y $t>0$ de la siguiente manera :

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t)>0 & \text{si} \quad 0<x<s(t),\ t>0, \\ 0 & \text{si} \quad s(t)\le x\le r(t),\ t>0, \\ \theta_1(x,t)<0 & \text{si} \quad r(t)<x,\ t>0, \end{cases} \qquad (1)$$

de manera que se satisfagan las siguientes condiciones :

$$\alpha_2 \theta_{2_{xx}} = \theta_{2_t}, \qquad 0<x<s(t),\ t>0, \tag{2}$$

$$\alpha_1 \theta_{1_{xx}} = \theta_{1_t}, \quad r(t)<x,\ t>0, \tag{3}$$

$$s(0)=r(0)=0, \tag{4}$$

$$\theta_2(s(t),t)=\theta_1(r(t),t)=0, \qquad t>0 \tag{5}$$

$$k_1\ \theta_{1_x}(r(t),t)-k_2\ \theta_{2_x}(s(t),t)=\rho\ l\ [(1-\varepsilon)\ \dot{s}(t)+\varepsilon\ \dot{r}(t)], \tag{6}$$

$$-\theta_{2_x}(s(t),t)\ (r(t)-s(t)) = \gamma, \qquad t>0 \tag{7}$$

$$\theta_1(x,0)=\theta_1(+\infty,t)=-C<0, \qquad x>0, \quad t>0, \tag{8}$$

$$\theta_2(0,t)=B>0, \qquad t>0, \tag{9}$$

donde $l > 0$ es el calor latente de fusión por unidad de masa, $\rho > 0$ es la densidad de masa común a ambas fases y $k_i>0$, $c_i>0$, $\alpha_i=a_i^2=\frac{k_i}{\rho\ c_i}>0$ son la conductividad térmica, el calor específico y el coeficiente de difusión respectivamente de la fase i (i=1 : fase sólida, i=2 : fase líquida).

Siguiendo la metodología de hallar soluciones autosemejantes [2,4,6] se propone como solución de (P_1) a :

$$\theta_1(x,t)=A_1+B_1\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\ a_1\sqrt{t}}\right), \quad \theta_2(x,t)=A_2+B_2\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\ a_2\sqrt{t}}\right),$$
$$s(t)=2\ \sigma\sqrt{t}, \quad r(t)=2\ \omega\sqrt{t}, \tag{10}$$

que satisfacen las condiciones (2)-(4) . Si se imponen las 6 condiciones restantes (5)-(9) se obtiene que los 5 coeficientes A_1, B_1, A_2, B_2, ω vienen dados en función de σ , de la siguiente manera :

$$A_2 = B, \quad B_2 = \frac{-B}{\mathrm{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right)}, \quad A_1 = \frac{C\ \mathrm{erf}\left(\frac{\omega}{a_1}\right)}{\mathrm{erfc}\left(\frac{\omega}{a_1}\right)}, \quad B_1 = \frac{-C}{\mathrm{erfc}\left(\frac{\omega}{a_2}\right)}, \tag{11}$$

$$\omega=\omega(\sigma)=\sigma + \frac{\gamma\ a_2 \sqrt{\pi}}{2\ B}\ \exp(\frac{\sigma^2}{a_2^2})\ \mathrm{erf}(\frac{\sigma}{a_2}) \tag{12}$$

y el coeficiente σ debe satisfacer la ecuación :

$$K_1(x) = K_2(x), \tag{13}$$

donde las funciones K_1 y K_2 están definidas para $x > 0$ por :

$$K_1(x) = \frac{k_2\ B}{a_2 \sqrt{\pi}}\ F_2(\frac{x}{a_2}) - \frac{k_1\ C}{a_1 \sqrt{\pi}}\ F_1(\frac{\omega(x)}{a_1}) , \qquad F_1(x)=\frac{\exp(-x^2)}{\mathrm{erfc}(x)} ,$$

$$(14)$$

$$K_2(x) = \rho\ l\ [\ x + \frac{\varepsilon\ \gamma\ a_2 \sqrt{\pi}}{2\ B}\ \exp(\frac{x^2}{a_2^2})\ \mathrm{erf}(\frac{x}{a_2})\ ] , \qquad F_2(x)=\frac{\exp(-x^2)}{\mathrm{erf}(x)}$$

con :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\ dt , \qquad \mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) , \tag{15}$$

las funciones de error y de error complementario respectivamente.

Teniendo en cuenta que las funciones K_1 y K_2 satisfacen las siguientes propiedades :

$$K_1(0^+)=+\infty , \qquad K_1(+\infty) = -\infty , \qquad K_1'<0 ,$$

$$(16)$$

$$K_2(0^+)=0 , \qquad K_2(+\infty)=+\infty , \qquad K_2'>0 ,$$

se deduce que la ecuación (13) tiene una única solución $\sigma>0$, y por ende se obtiene el siguiente resultado :

<u>**Teorema 1**</u> :

Cualesquiera sean los coeficientes térmicos del material $k_1,k_2,c_1,c_2,\alpha_1,\alpha_2,\rho,l>0$, los coeficientes térmicos que caracterizan la zona pastosa $\gamma>0$, $0<\varepsilon<1$ y los datos $B,C>0$, el problema (P_1) tiene una solución exacta dada por (10)-(12), donde el coeficiente σ es la única solución de la ecuación (13).

(B) Si se reemplaza la condición (7) por la (17) dada por :

$$-\theta_{1x}(r(t),t)\ (r(t)-s(t))=\gamma\ ,\ t>0, \tag{17}$$

entonces se puede plantear el problema (P_2) que consiste en hallar las fronteras libres $x=s(t)$ y $x=r(t)$, definidas para $t>0$, con $s(0)=r(0)=0$, y la temperatura $\theta=\theta(x,t)$, definida para $x>0$ y $t>0$ por (1), de manera que se satisfagan las condiciones (2)-(6), (8),(9) y (17).

Siguiendo la metodología dada en (A) se propone como solución de (P_2) a (10), donde los coeficientes Ai, Bi ($i = 1, 2$) están dados, en función de ω, por (11) y el coeficiente σ está dado por :

$$\sigma=\sigma(\omega)=\omega-\frac{\gamma\ a_1\sqrt{\pi}}{2\ C}\ g\left(\frac{\omega}{a_1}\right), \tag{18}$$

con la condición de que $\sigma(\omega)>0$, donde :

$$g(x)=\frac{1}{F_1(x)}=\exp(x^2)\ \mathrm{erfc}(x) \tag{19}$$

La ecuación para el coeficiente ω se expresa, a través de la condición (6) , de la siguiente manera :

$$K(x)=F(x)\ ,\ \sigma(x)>0,\ x>0, \tag{20}$$

donde:

$$\begin{aligned} F(x)&=x-\frac{(1-\epsilon)\ \gamma\ a_1\sqrt{\pi}}{2\ C}\ g\left(\frac{x}{a_1}\right), \\ K(x)&=\frac{k_2\ B}{a_2\sqrt{\pi}}\ F_2\left(\frac{\sigma(x)}{a_2}\right)-\frac{k_1\ C}{a_1\sqrt{\pi}}\ F_1\left(\frac{x}{a_1}\right), \end{aligned} \tag{21}$$

obteniéndose de este modo el siguiente resultado :

Teorema 2 :
Cualesquiera sean los coeficientes térmicos del material $k_1,k_2,c_1,c_2,\alpha_1,\alpha_2,\rho,l>0$, los coeficientes térmicos que caracterizan la zona pastosa $\gamma>0$, $0<\epsilon<1$ y los datos $B,C>0$, el problema (P_2) tiene una solución exacta dada por (10), (11), (18) , donde el coeficiente ω es la única solución de la ecuación (20) o (26) que satisface la

condición (23).

Demostración :

Sólo basta verificar que la ecuación (20) tiene una unica solución $\omega>0$ con $\sigma(\omega)>0$.

Teniendo en cuenta que la función g satisface las propiedades :

$$g(0)=1\ , \quad g(+\infty)=0\ , \quad g'<0\ , \tag{22}$$

se tiene la siguiente equivalencia :

$$\sigma(\omega)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega>\omega_o\ , \tag{23}$$

donde $\frac{\omega_o}{a_1}>0$ es la única solución de la ecuación :

$$g(x)=\frac{2\ C}{\gamma\ \sqrt{\pi}}\ x\ , \qquad x>0\ , \tag{24}$$

o en forma equivalente de la ecuación :

$$F_1\ (x) = \frac{\gamma\ \sqrt{\pi}}{2\ C}\ \frac{1}{x}\ , \qquad x>0\ . \tag{25}$$

Por lo tanto, la ecuación (20) puede expresarse de la siguiente manera :

$$K(x)=F(x)\ , \qquad x>\omega_o\ , \tag{26}$$

la cual tiene una única solución $\omega>\omega_o$, si se tienen en cuenta las siguientes propiedades :

$$K(\omega_o^+)=+\infty\ , \quad K(+\infty)=-\infty\ , \quad K'<0 \quad \text{en} \quad (\omega_o\ , +\infty\ )\ , \tag{27}$$

$$F(0^+)=-\ \frac{(\ 1\ -\ \varepsilon\ )\ \gamma\ \sqrt{\pi}}{2\ C}\ a_1\ , \qquad F(+\infty)=+\ \infty\ ,\ F'>0 \text{ en } \Re^+,$$
$$0<F(\omega_o)=\varepsilon\ \omega_o<\omega_o\ . \tag{28}$$

Observación 1.

Se obtienen los mismos resultados si en la hipótesis (H3ii) se reemplaza el gradiente de temperatura en $x=s^{-}(t)$ por el de flujo de calor en $x=s^{-}(t)$.

Observación 2.

Como problema abierto se tiene el de relacionar la solución exacta hallada en el presente trabajo con la teoría matemática desarrollada en [1,3] a través de soluciones autosemejantes.

Agradecimientos:

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por el CONICET (Argentina) a través del proyecto de investigación y desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática".

REFERENCIAS.

[1] J. E. BOUILLET, " Soluciones autosemejantes con intervalos de constancia de un problema de conducción térmica ", Ver Resumen en Rev. Unión Matemática Argentina, 31 (1983) , 62 - 63.

[2] H. S. CARSLAW - J. C. JAEGER, " Conduction of heat in solids ", Oxford University Press, London (1959).

[3] M. KURTEN, " Generalized self-similar diffusion in $\Re^n$ ", A talk given in the Int. Coll. on tree Boundary Problems : Theory and Applications held in Irsee/Bavaria, June 11-20, 1987. To appear in Research Notes in Math., Pitman.

[4] L. I. RUBINSTEIN, " The Stefan problem ", Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc. , Providence (1971).

[5] A. D. SOLOMON, - D. G. WILSON - V. ALEXIADES, " A mushy zone model with an exact solution ", Letters Heat Mass Transfer, 9 (1982), 319-324.

[6] D. A. TARZIA, " Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional ", CUADERNOS del Instituto de Matemática " B. Levi ", N° 12 , Rosario (1984), 5 - 36. Ver también " Analysis of a bibliography on moving and free boundary problems for the heat equation. Some results for the one-dimensional Stefan problem using the Lamé-Clapeyron and Neumann solutions ", Research Notes in Math. N° 120, Pitman, London (1985), 84 - 102.

[7] D. A. TARZIA, " Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades' mushy zone model ", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 14 (1987), 219 - 228.