LA PLATA - R. ARGENTINA - 31 de octubre / 4 de Noviembre

1982

I CONGRESO LATINOAMERICANO DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA

ACTAS

I CONGRESSO LATINOAMERICANO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MATERIA

ACTAS

Ist. LATIN AMERICAN CONGRESS ON HEAT AND MASS TRANSFER

PROCEEDINGS

Volumen 1

UNA NUEVA VARIANTE PARA EL CALCULO SIMULTANEO DE ALGUNOS COEFICIENTES TERMICOS DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO A TRAVES DE UN PROBLEMA DE CAMBIO DE FASE CON UNA SOBRE-CONDICION EN EL BORDE FIJO.

Domingo A. TARZIA
PROMAR (CONICET -UNR)
Instituto de Matemática "Beppo Levi"
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.

RESUMEN

Cuando el coeficiente k de un material semi-infinito (por ejemplo, fase líquida) es desconocido, puede plantearse una nueva variante para el cálculo simultáneo de algunos de sus coeficientes térmicos. Esta determinación es obtenida a través de un problema inverso de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase con una sobre-condición sobre el borde fijo del material de cambio de fase. La variante difiere de la dada en [D.A. TARZIA, ~~Adv. Appl. Math., 3(1982), 74-82 y trabajo por aparecer~~], por el hecho de que la sobre-condición es de la forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = -H_0/\sqrt{t}\ , \qquad H_0>0\ ,$$

en la cual no aparece k.

Para resolverlo, se asume que los coeficientes H_0, σ, $\theta_0>0$ son conocidos de la experiencia, con lo cual la medición de flujo de calor es substituída por la medición de la pendiente de la de la temperatura en $x = 0$.

El resultado obtenido es el siguiente: Si uno de los triples $\{\theta, k, \ell\}$, $\{\theta, k, c\}$, $\{\theta, k, \alpha\}$ es a determinar, el correspondiente problema de frontera móvil tiene una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann sí y sólo sí una condición complementaria es verificada por los datos del problema. Además, para cada caso, se dan las fórmulas para la obtención simultánea de los correspondientes dos coeficientes desconocidos. Con esta metodología, la determinación de $\{\theta, k, \rho\}$ no es posible.

Por otra parte, si $\{\theta, k, \sigma\}$ es a determinar, el correspondiente problema de frontera libre tiene siempre una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann.

Cabe destacarse que si el coeficiente k es conocido entonces las dos variantes coinciden.

I. INTRODUCCION

Cuando el coeficiente k de un material semi-infinito (por ejemplo, fase líquida) es desconocido, puede plantearse una nueva variante con respecto a la de [13,14] para el cálculo simultáneo de algunos de sus coeficientes térmicos. Esta determinación es obtenida a través de un problema inverso de Lamé-Clapeyron (Stefan) a una fase con una sobre-condición sobre el borde fijo del material de cambio de fase de la forma

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}} \quad , \text{ con } \quad H_0 > 0 \qquad (1)$$

en la cual no aparece k.

Si se supone que la temperatura de cambio de fase es 0º y que la frontera móvil es dada por la ley

$$s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \; , \text{ con } \quad \sigma > 0 \qquad (2)$$

el problema se reduce a encontrar los triples $\{\theta(x,t), k, \ell\}$, $\{\theta(x,t), k, c\}$, $\{\theta(x,t), k, a\}$ de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \; , \quad 0 < x < s(t) \, , \quad t > 0 \qquad (3_a)$$

$$\theta(s(t),t) = 0 \; , \quad t > 0 \qquad (3_b)$$

$$-k\frac{\partial\theta}{\partial x}(s(t),t) = \rho\ell\, s'(t) \; , \quad t > 0 \qquad (3_c)$$

$$\theta(0,t) = \theta_0 \; , \quad t > 0 \qquad (3_d)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}} \; , \quad t > 0 \qquad (3_e)$$

donde ρ es la densidad de masa, ℓ es el calor latente de fusión, k es la conductividad térmica, c es el calor específico, $\alpha = a^2 = \frac{k}{\rho c}$ es la difusividad, θ_0 es la temperatura en el borde fijo $x = 0$.

Observación 1

Se supone que $H_0, \sigma > 0$ son conocidos. El coeficiente H_0 caracteriza la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x = 0$ (3_e), y σ caracteriza la frontera móvil (2). Estos dos coeficientes deben ser determinados experimentalmente. Además, la temperatura θ_0 en $x = 0$ es supuestamente conocida.

En la Sección II se prueba que no siempre existe una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann [1,6,9,10,12,13,14,15] para el problema (3) en los tres casos enumerados anteriormente. Más aún, la solución explícita existe sí y sólo sí una condición complementaria es satisfecha por los datos del problema. Además, para cada caso, se dan las fórmulas para la obtención simultánea de los correspondientes dos coeficientes desconocidos.

Por otra parte, si la frontera de cambio de fase $x = s(t)$ es desconocida, entonces la determinación del triple $\{\theta(x,t), k, s(t)\}$, solución de (3) con $s(0) = 0$, tiene siempre una solución del tipo de Lamé-Clapeyron-Neumann.

Cabe destacarse que si el coeficiente k es conocido entonces la idea de este trabajo (definido con la constante H_0) coincide con la de [13,14] (definido con la constante h_0) a través de la relación $h_0 = kH_0$. La idea de la utilización de una sobre-condición en una porción de frontera fue extraída de los trabajos [2,3,4,5,7,8]. Otras referencias pueden encontrarse en [13,14].

II. SOLUCION DE LOS DIFERENTES CASOS

La solución del problema (3) está dada por:

$$\theta(x,t) = \theta_0 - \frac{\theta_0}{f(\sigma/a)} f\left(x/2a\sqrt{t}\right) \tag{4}$$

con $$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2)\, dy = \operatorname{erf}(x)$$

donde los dos coeficientes desconocidos deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\rho l \sigma = k H_o \exp(-\sigma^2/a^2) \qquad (5_a)$$

$$H_o = \theta_o / a\sqrt{\pi}\, f(\sigma/a) \qquad (5_b)$$

Si se define

$$\xi = \frac{\sigma}{a} \qquad (6)$$

se tiene.

$$k \exp(-\xi^2) = \rho l \sigma / H_o \qquad (7_a)$$

$$f(\xi)/\xi = \theta_o / \sigma H_o \sqrt{\pi} \qquad (7_b)$$

<u>Propiedad 1.</u>-(Determinación simultánea de los coeficientes k, l)

Si los datos $H_o > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_o > 0$ verifican la condición

$$\frac{\theta_o}{2\sigma H_o} < 1 \qquad (8)$$

independientemente de $\rho > 0$, $c > 0$, entonces el problema (3) tiene la solución (4) donde k, l están dados por:

$$k = \frac{\rho l \sigma^2}{\xi^2} \quad , \quad l = H_o k \sigma \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2} \qquad (9)$$

y ξ es la única solución de la ecuación:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\theta_o}{\sigma H_o \sqrt{\pi}} \quad , \quad x > 0 \qquad (10)$$

<u>Demostración:</u>

La ecuación (10) se obtiene de la (7_b), la cual tiene una única solución $\xi > 0$, bajo la hipótesis (8), debido a que la función

$$G(x) = \frac{f(x)}{x} \quad , \qquad (11)$$

definida para los $x > 0$, tiene las siguientes propiedades:

$$G(0^+) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad G(+\infty) = 0 \quad , \quad G' < 0 \qquad (12)$$

El coeficiente k se obtiene a través de la relación (6) y luego el coeficiente ℓ de la (7_a). ∎

Utilizando una metodología análoga a la anterior [13,14] pueden obtenerse las siguientes propiedades:

Propiedad 2.-(Determinación simultánea de los coeficientes k,c)

Si los datos $H_0>0, \sigma>0, \theta_0>0$ verifican la condición (8), independientemente de $\rho>0$, $\ell>0$, entonces el problema (3) tiene la solución (4) donde k,c están dados por:

$$k=\frac{\rho\ell\sigma}{H_0}\exp(\xi^2) \quad , \quad c=\frac{\ell}{\sigma H_0}\xi^2\exp(\xi^2) \tag{13}$$

y ξ es la única solución de la ecuación (10). ∎

Propiedad 3.-(Determinación simultánea de los coeficientes k,α)

Si los datos $H_0>0, \sigma>0, \theta_0>0$ verifican la condición (8), independientemente de $\rho>0$, $\ell>0$, $c>0$, entonces el problema (3) tiene la solución (4) donde k,α están dados por:

$$k=\frac{\rho\ell\sigma}{H_0}\exp(\xi^2) \quad , \quad \alpha=\frac{\sigma^2}{\xi^2} \tag{14}$$

y ξ es la única solución de la ecuación (10). ∎

Observación 2

Si el coeficiente $\rho>0$ es un dato, entonces la determinación simultánea de $\{k,\alpha\}$ es equivalente a la de $\{k,c\}$.

Observación 3

La solución $\{\theta(x,t),\ s(t)\}$ del problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) sin coeficientes desconocidos [1,6,9,10,13] definido por (3 a-d) y s(0) = 0, está dada por:

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \theta_0-\frac{\theta_0}{f(\eta)}\,f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ s(t) &= 2a\eta\sqrt{t} \qquad \text{(frontera libre)} \end{aligned} \tag{15}$$

donde η es la única solución de la ecuación:

$$x\, f(x)\, \exp(x^2) = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}}, \quad x > 0. \qquad (16)$$

En este caso, se tiene:

$$H_o = \frac{\theta_o}{a\, f(\eta) \sqrt{\pi}} \qquad (17)$$

y por lo tanto la desigualdad (8) es siempre verificada debido a una propiedad de la función de error f, con lo cual no se puede obtener ninguna propiedad adicional sobre el coeficiente η que caracteriza la frontera libre.

Observación 4

Si luego de determinar los coeficientes desconocidos de un material a través de un problema de frontera móvil, caracterizada por el elemento σ_m, se plantea un problema de Lamé-Clapeyron (Stefan) sin coeficientes desconocidos cuya frontera libre estará caracterizada por el elemento σ_ℓ, entonces se demuestra que dichas fronteras coinciden como funciones del tiempo. Esto se logra mostrando previamente que $\eta = \xi$ (ver Observación 3) y por ende $\sigma_\ell = \sigma_m$.

Observación 5

Si el coeficiente k es conocido entonces la idea de este trabajo (definido con la constante H_o) para la determinación de coeficientes desconocidos de un material a través de un cambio de fase coincide con la de [13,14] (definido con la constante h_o) a través de la relación $h_o = kH_o$.

Observación 6

Para el cálculo del coeficiente H_o es necesaria la determinación experimental de la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x = 0$ con la condición (3 d) de temperatura constante. En cambio, según la formulación de [13,14], para el cálculo del coeficiente h_o, es necesaria la determinación experimental del flujo de calor x = 0.

Observación 7

Con la metodología del presente trabajo, no es posible la determinación del triple $\left\{\theta(x,t),k,\dot{\rho}\right\}$, en cambio si lo era con la de [13,14]

Observación 8

Utilizando un desarrollo similar al del presente trabajo en un problema inverso de Stefan a dos fases, es posible determinar simultáneamente dos coeficientes desconocidos de un material semi-infinito obteniéndose así una nueva variante de la de [11].

NOMENCLATURA

Alfabeto Romano

c : calor específico.

f : función de error.

G : función definida por (11).

k : conductividad térmica.

ℓ : calor latente de fusión.

H_0 : coeficiente definido por (1).

$Ste = \frac{c\,\theta_0}{\ell}$: número de Stefan.

s : posición de la frontera de cambio de fase.

t : tiempo.

x : coordenada.

Alfabeto Griego

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ difusividad $(= a^2)$.

ρ : densidad de masa.

σ : coeficiente definido por (2).

θ : temperatura.

θ_0 : temperatura del borde fijo $x = 0$.

$\xi = \frac{\sigma}{a}(\eta)$: parámetro adimensional.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BRILLOUIN, Sur quelques problèmes non résolus de physique mathématique classique: propagation de la fusion, Ann.Inst.H. Poincaré, 1(1930-31), 285-308.

[2] J.R. CANNON, Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation, Duke Math.J.,30(1963), 313-323.

[3] J.R. CANNON, Determination of certain parameters in heat conduction problems, J.Math.Anal.Appl., 8(1964), 188-201.

[4] J.R.CANNON - P.C. DUCHATEAU, Determination of unknown physical properties in heat conduction problems,Int.J.Eng.Sci., 11(1973), 783-794.

[5] J.R. CANNON - P.C. DUCHATEAU, Determining unknown coefficients in a nonlinear heat conduction problem , SIAM J.Appl.Math., 24(1973) 298-314.

[6] H.S. CARSLAW - J.C. JAEGER, Conduction of heat in solids, Oxford University Press (Clarendon),London(1959).

[7] B.F. JONES,Jr., The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness, J.Math.Mech., 11(1962), 907-918.

[8] B.F. JONES,Jr., Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations, Comm.Pure Appl.Math.,6(1963), 33-44.

[9] G. LAME - B.P. CLAPEYRON, Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide, Ann.Chim.Phys, 47(1831),250-256.

[10] L.I. RUBINSTEIN, The Stefan Problem, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27, Amer.Math.Soc., Providence (1971).

[11] M.B. STAMPELLA - D.A. TARZIA, Determinación de coeficientes desconocidos en el problema de Stefan a dos fases, 1$^{\underline{as}}$ Jornadas

Latinoamericanas de Matemática Aplicada, Santiago (Chile), 14-16 Dic. 1981, por aparecer.

[12] D.A. TARZIA, An inequality for the coefficient σ for the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem, Quart.Appl.Math., 39(1981-2), 491-497.

[13] D.A. TARZIA, Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem),Adv.Appl. Math., 3 (1982), 74-82.

[14] D.A. TARZIA, Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed space, to appear.

[15] H. WEBER, Die partiellen differential-gleinchungen der mathematischen physik, nach Riemmans Vorlesungen, T II, Braunwschweig (1901).