São Paulo - SP - Brasil - 12 a 15 de maio

1986

II CONGRESSO LATINOAMERICANO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MATÉRIA

ANAIS

II CONGRESO LATINOAMERICANO DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y MATERIA

ACTAS

2nd. LATIN AMERICAN CONGRESS ON HEAT AND MASS TRANSFER

PROCEEDINGS

Volume I

DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS EN MATERIALES SEMI-INFINITOS A TRAVES DE UN PROCESO CON CAMBIO DE FASE.

STOICO, César Omar - TARZIA, Domingo A.
PROMAR (CONICET-UNR) - Instituto de Matemática "B. Levi", Fac. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Arg.

RESUMEN

Se considera un cuerpo semi-infinito en su fase líquida a una temperatura inicial $d>0$ y a la cual se le impone una temperatura $-b<0$ en el borde fijo $x=0$. Se considera sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase es 0 C. Si se considera el movimiento inducido por el cambio de densidad en la transición de fase y se supone una sobre-condición en el borde fijo dada por un flujo de calor saliente $h_0/\sqrt{t}$ $(h_0>0)$, se obtienen:
i) fórmulas analíticas para la determinación de uno o dos coeficientes térmicos desconocidos;
ii) desigualdades que relacionan los diversos parámetros del material y de los datos del problema en cuestión.
Para la obtención de dichos resultados se utilizaron dos metodologías diferentes.

INTRODUCCION

Se considera el problema de Stefan a dos fases para un cuerpo semi-infinito, homogéneo, isótropo, incompresible que se encuentra inicialmente en la fase 1 (líquida) a una temperatura d $(d>0)$. En el instante $t=0$ se coloca en contacto con un cuerpo a la temperatura $-b$ $(b>0)$ y comienza el cambio de fase, es decir, aparece una fase 2 (sólida). Sin pérdida de generalidad se tomará que la temperatura del cambio de fase es nula. Además, se tiene en cuenta la convección inducida por el cambio de densidad en la transición de fase sólido-líquida, es decir
Con estas hipótesis el problema a resolver puede plantearse de la siguiente manera:
Se supone que la temperatura $\theta=\theta(x,t)$ del material está definida por:

$$(1)\qquad \theta(x,t)=\begin{cases}\theta_2(x,t)<0 & \text{si} \quad 0<x<s(t) \quad , t>0\\ 0 & \text{si} \quad x=s(t) \quad , t>0\\ \theta_1(x,t)>0 & \text{si} \quad s(t)<x \quad , t>0\end{cases}$$

y las ecuaciones diferenciales que gobiernan el proceso en las fases sólida y líquida toman la forma:

$$(2)\qquad a_2^2\,\theta_{2xx}(x,t)=\theta_{2t}(x,t) \qquad 0<x<s(t) \quad , t>0$$

$$(3)\qquad a_1^2\,\theta_{1xx}(x,t)+\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\,\dot{s}(t)\,\theta_{1x}(x,t)=\theta_{1t}(x,t) \qquad s(t)<x \quad , t>0$$

Las condiciones en la interfase sólido-líquida x=s(t) son dadas por la continuidad de la temperatura y del balance energético (condición de Stefan), es decir,

$$(4) \qquad \theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0 \qquad t>0$$

$$(5) \qquad k_2\,\theta_{2x}(s(t),t) - k_1\,\theta_{1x}(s(t),t) = \rho_2\,\ell\,\dot{s}(t) \qquad t>0$$

Las condiciones iniciales y de borde son

$$(6) \qquad \theta_1(x,0) = \theta_1(+\infty,t) = d>0 \qquad x>0\,,\ t>0$$

$$(7) \qquad \theta_2(0,t) = -b<0 \qquad t>0$$

$$(8) \qquad s(0) = 0$$

Se considera el problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito x 0 con uno o dos coeficientes desconocidos con una sobre-condición en el borde fijo x=0 dada por el flujo de calor saliente

$$(9) \qquad k_2\,\theta_{2x}(0,t) = h_0/\sqrt{t} \qquad t>0$$

para un dado $h_0 > 0$.
Cuando la condición de borde en la cara fija x=0 es el flujo de calor (9) la correspondiente temperatura para el problema de Stefan a dos fases es constante en el borde fijo y s(t) es proporcional a $\sqrt{t}$ para una apropiada condición para el dato h_0, según Bancora- Tarzia (1984), Tarzia (1982).
Si por medios experimentales se es capaz de medir las cantidades $b>0$ y $h_0>0$ dadas por las condiciones (7) y (9) respectivamente, entonces se pueden encontrar fórmulas para la determinación de sólo un coeficiente térmico desconocido entre $\ell, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, k_1, k_2$. Por otra parte, si además se puede medir s(t) (es decir, el coeficiente dado por $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$ entonces se pueden encontrar fórmulas para la determinación simultánea de dos coeficientes térmicos entre $\ell, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, k_1, k_2$.
Las temperaturas de las fases 1 y 2 están dadas por:

$$(10) \quad \begin{cases} i) \ \ \theta_2(x,t) = -b + \dfrac{b}{f(\sigma/a_2)}\, f\left(\dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \\[2ex] ii) \ \ \theta_1(x,t) = -\dfrac{d\, f(\sigma/a_0)}{1-f(\sigma/a_0)} + \dfrac{d}{1-f(\sigma/a_0)}\, f\left(\dfrac{\sigma}{a_1}|\varepsilon| + \dfrac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \\[2ex] iii) \ \ s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad ; \quad a_0 = a_1/(1+|\varepsilon|)\,, \quad \varepsilon = \dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1} \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes desconocidos está dado por:

$$(11)\begin{cases} i) & f(\sigma/a_2) = \dfrac{k_2 b}{a_2 h_0 \sqrt{\pi}} \\ ii) & \sigma = \dfrac{h_0}{\rho_2 \ell} \exp(-\sigma^2/a_2^2) - \dfrac{k_1 d}{\rho_2 \ell a_1 \sqrt{\pi}} \dfrac{\exp(-\sigma^2/a_0^2)}{1 - f(\sigma/a_0)} \end{cases}$$

Si se definen las nuevas variables

$$(12) \quad i)\ \xi_0 = \frac{\sigma}{a_0}, \qquad ii)\ \xi_1 = \frac{\sigma}{a_1} \qquad iii)\ \xi_2 = \frac{\sigma}{a_2}$$

entonces el sistema de ecuaciones (11) se transforma en

$$(13)\begin{cases} i) & f(\xi_2) = \dfrac{k_2 b}{a_2 h_0 \sqrt{\pi}} \\ ii) & \dfrac{h_0}{\rho_2 \ell} \exp(-\xi_2^2) - \dfrac{k_1 d}{\rho_2 \ell a_1 \sqrt{\pi}} \dfrac{\exp(-\xi_0^2)}{1 - f(\xi_0)} = \sigma \end{cases}$$

Determinación de un coeficiente térmico

Dadas las constantes $b > 0, d > 0$ y $h_c > 0$, se estudia el problema de determinar la función $s=s(t) > 0$ (frontera libre), definida para $t > 0$, la temperatura $\theta = \theta(x,t)$, definida por (1) para $x > 0$ y $t > 0$, y uno de los siete coeficientes térmicos $\ell, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, k_1, k_2$ de manera tal que las condiciones (2)-(9) sean verificadas.
La solución de este problema está dada por (10i,ii,iii), donde los coeficientes incógnitas σ y uno entre $\ell, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, k_1, k_2$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones (13).
Los resultados obtenidos para los 7 diferentes casos están dados en Stoico (1986); a continuación veremos solamente el resultado correspondiente a la determinación de los coeficientes σ y c_1.

Propiedad 1

La condición necesaria y suficiente para que el problema con σ y c_1 desconocidos, tenga una única solución con datos $h_0 > 0$, $b > 0$, $d > 0$ y coeficientes $\ell, \rho_1, \rho_2, c_2, k_1, k_2 > 0$ es que verifique la condición

$$(14)\begin{cases} \dfrac{k_2 b}{h_c a_2 \sqrt{\pi}} < f(\xi_0) \\ \xi_0 : \text{ÚNICO CERO DE } J_0 \end{cases}$$

En tal caso, la solución está dada por (10) con

$$(15) \quad i)\ \sigma = a_2 \xi_2 \qquad\qquad ii)\ c_1 = \frac{k_1}{\rho_1 a_2^2 (1+|\varepsilon|)^2} \left(\frac{\xi_0}{\xi_2}\right)^2$$

donde ξ_2 está dado por

$$(16) \qquad \xi_2 = f^{-1}\left(\frac{k_2\, b}{h_0\, a_2\, \sqrt{\pi}}\right)$$

y ξ_0 es la única solución de la ecuación

$$(17) \qquad \begin{cases} V(x) = A \\ x > 0 \end{cases}$$

donde

$$(18) \qquad A_1 = \frac{a_2\, \xi_2\, (1+|\varepsilon|)\, \rho_2\, \ell \sqrt{\pi}}{k_1 d}\; J_0(\xi_2)$$

Demostración

De (14) se tiene que $k_2 b/h_0 a_2 \sqrt{\pi} < 1$, y por ende de (13i) se obtiene (16). De (12iii) se deduce (15i). De (12i) y (12iii) y teniendo en cuenta que $a_0 = a_1/(1+|\varepsilon|)$ se obtiene (15ii). Teniendo en cuenta la definición de a_1 y el valor de c_1, dado por (15ii), la ecuación (13ii), con incógnita resulta ser (17). Como la función V verifica las siguientes propiedades

$$(19) \qquad V(0^+) = 0 \quad , \quad V(+\infty) = +\infty \quad , \quad V' > 0$$

entonces la ecuación (17) tiene solución (y en tal caso es única) si y sólo si $A_1 > 0$, si y sólo si $\xi_2 < z_0$, donde z_0 es la única raíz positiva de J_0. Teniendo en cuenta (16), esta última condición resulta ser equivalente a (14).

Determinación de dos coeficientes térmicos

Dadas las constantes $b > 0$, $d > 0$, $h_0 > 0$ y $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ (frontera móvil) con $\sigma > 0$, determinado experimentalmente, se estudia el problema de determinar la temperatura $\theta = \theta(x,t)$, definida por (1) para $x > 0$ y $t > 0$, y dos de los siete coeficientes térmicos $\ell, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, k_1, k_2$ de manera tal que las condiciones (2)-(9) sean verificadas.
La solución de este problema está dada por (10i,ii), donde los dos coeficientes incógnitas entre $\ell, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, k_1, k_2$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones (13).
Los resultados obtenidos para los 21 diferentes casos están dados en Stoico (1986); a continuación veremos solamente el resultado correspondiente a la determinación de los coeficientes k_2 y l.

Propiedad 2

La condición necesaria y suficiente para que el problema con k_2 y l desconocidos, tenga una única solución con datos $h_0 > 0$, $b > 0$, $d > 0$ $\sigma > 0$ y coeficientes $\rho_1, \rho_2, c_1, c_2, k_1 > 0$ es que se verifiquen las condiciones

$$(20) \qquad \frac{k_1 d}{2 h_0 a_1} H\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) < 1$$

$$(21) \qquad \frac{\rho_2 c_2 \sigma b}{h_0 \sqrt{\pi}\, x_0 f(x_0)} < 1$$

En tal caso la solución está dada por (10i,ii) con

$$(22) \qquad i)\ k_2 = \frac{\rho_2 c_2 \sigma^2}{\xi_2^2} \qquad\qquad ii)\ l = \frac{1}{\rho_2 \sigma} Z(\xi_2)$$

donde ξ_2 es la única solución de la ecuación

$$(23) \qquad J(x) = \frac{\rho_2 \sigma c_2 b}{h_0 \sqrt{\pi}}, \qquad x > 0$$

<u>Demostración</u>

De la condición (13i) y de la definición de a_2 se deduce para ξ_2 la ecuación (23) que tiene siempre una solución. La fórmula (22i) se obtiene de (12iii). La fórmula (22ii) se obtiene despejando l en la condición (13ii). Para que sea $l > 0$ deberá ser $Z(\xi_2) > 0$. Como Z es una función estrictamente decreciente que verifica

$$(24) \qquad \begin{cases} Z(0^+) = h_0 - \dfrac{d k_1}{a_1 \sqrt{\pi}} \dfrac{\exp(-\sigma^2/a_0^2)}{1 - f(\sigma/a_0)} \\[2ex] Z(+\infty) = - \dfrac{d k_1}{a_1 \sqrt{\pi}} \dfrac{\exp(-\sigma^2/a_0^2)}{1 - f(\sigma/a_0)} \end{cases}$$

entonces $l > 0$ existirá (y será único) si y sólo si

$$(25) \qquad \begin{cases} Z(0^+) > 0 \\ \xi_2 < x_0 \end{cases}$$

donde x_0 es el único cero positivo de Z, dado por

$$(26) \qquad x_0 = \left(\log \left(\frac{2 a_1 h_0}{k_1 d\, H(\sigma/a_0)} \right) \right)^{1/2}$$

La condición $\xi_2 < x_0$ es equivalente a $J(\xi_2) = \xi_2 f(\xi_2) < x_0 f(x_0) = J(x_0)$ que resulta ser (21).

Observación 1

Lo realizado anteriormente generaliza los resultados obtenidos en Stampella-Tarzia (por aparecer) para el caso de densidades de masa diferentes.

Observación 2

Para determinar coeficientes térmicos según ésta metodología se necesita a priori calcular experimentalmente los valores de los coeficientes h_0 y σ (según sea el caso). Para ello, pueden realizarse varias mediciones en el tiempo del flujo de calor en x=0 y de la posición de la interfase sólido-líquida, luego, por ejemplo, a través de un método de mínimos cuadrados, se obtienen los valores de h_0 y σ a través de las ecuaciones siguientes: $\sigma = S(t)/2\sqrt{t}$; $h_0 = k_2\,\theta_{2x}(0,t)\sqrt{t}$

Otra metodología para la determinación de coeficientes térmicos

Otro método para resolver el problema consiste en introducir la masa como variable espacial definiendo el siguiente cambio de variables (Quilghini, 1965) :

$$(1')\qquad \begin{cases} e(t) = \rho_2 S(t) & \\ T_2(\mu,t) = \theta_2\left(\frac{\mu}{\rho_2},t\right) & 0<\mu<e(t)\;,\; t>0 \\ T_1(\mu,t) = \theta_1\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1}S(t)+\frac{\mu}{\rho_1},t\right) & \mu>e(t)\;,\; t>0 \end{cases}$$

$$(2')\qquad D_2\,T_{2\mu\mu} = T_{2t} \qquad 0<\mu<e(t)$$

$$(3')\qquad D_1\,T_{1\mu\mu} = T_{1t} \qquad \mu>e(t)$$

$$(4')\qquad T_2(e(t),t) = T_1(e(t),t) = 0$$

$$(5')\qquad K_2\,T_{2\mu}(e(t),t) - K_1\,T_{1\mu}(e(t),t) = \ell\,\dot{e}(t)$$

$$(6')\qquad T_1(\mu,0) = d$$

$$(7')\qquad T_2(0,t) = -b$$

$$(8')\qquad e(0) = 0$$

$$(9')\qquad K_2\,T_{2\mu}(0,t) = h_0/\sqrt{t}$$

donde $K_i = \rho_i k_i$ (i=1,2) representa la nueva "conductividad térmica y $D_i = \rho_i k_i / c_i$ (i=1,2) el nuevo coeficiente de "difusión térmica". Las condiciones (2')-(9') representa un problema de cambio de fase con densidades iguales y ambas iguales a 1 y donde el término incluyendo el movimiento inducido por el cambio de densidad en la transición de fase no aparece en las ecuaciones.
Siguiendo la anterior metodología se puede plantear el problema de determinar T_1 y T_2 (temperatura en ambas fases) y uno o dos coeficientes térmicos entre K_1, K_2, D_1, D_2, l y $e(t)$ (sólo en el caso de un coeficiente desconocido).
La solución viene dada por

$$(10')\quad \begin{cases} i) \quad T_2(\mu,t) = -b + \dfrac{b}{f(\sigma'/\sqrt{D_2})}\, f\left(\dfrac{\mu}{2\sqrt{D_2 t}}\right) \\ ii) \quad T_1(\mu,t) = -\dfrac{d\, f(\sigma'/\sqrt{D_1})}{1-f(\sigma'/\sqrt{D_1})} + \dfrac{d}{1-f(\sigma'/\sqrt{D_1})}\, f\left(\dfrac{\mu}{2\sqrt{D_1 t}}\right) \\ iii) \quad e(t) = 2\sigma'\sqrt{t} \end{cases}$$

donde los coeficientes incógnitas deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$(11')\quad \begin{cases} i) \quad f(\sigma'/\sqrt{D_2}) = \dfrac{K_2 b}{h_0\sqrt{\pi}\sqrt{D_2}} \\ ii) \quad \sigma' = \dfrac{h_0}{l}\exp(-\sigma'^2/D_2) - \dfrac{d K_1}{\sqrt{\pi}\, l\sqrt{D_1}}\, \dfrac{\exp(-\sigma'^2/D_1)}{1-f(\sigma'/\sqrt{D_1})} \end{cases}$$

Como puede observarse el número de casos a resolver está dado por $\binom{6}{2}$= =15, que resulta ser inferior a los 28 casos resueltos por la anterior metodología.
Debe observarse, además, que la transformación (1') es sólo válida para el caso $\rho_2 > \rho_1$ (que incluye todos los casos materiales excepto el agua).
Los resultados de los diferentes casos están dados en Stoico (1986), los cuales por razones de extensión no serán explicitados aquí.

Observación 3

Un mismo caso, siempre para $\rho_2 > \rho_1$, puede obtenerse de diferentes maneras utilizando la transformación (1'); por ejemplo, la determinación de k_1 y k_2 puede deducirse conociendo las determinaciones de los nuevos coeficientes que a continuación se detallan: (D_1, D_2), (K_1, K_2), (K_1, D_2), (K_2, D_1).

Agradecimiento

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por el CONICET (Argentina) a través del proyecto "Problemas de Frontera Libre de la Física- Matemática".

Nomenclatura

$a^2 = \dfrac{k}{\varrho\, c}$: difusividad térmica

$-b < 0$: temperatura en el borde fijo $x=0$

c : calor específico

$d > 0$: temperatura inicial

$h_o > 0$: coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x=0$

k : conductividad térmica

l : calor latente de solidificación

s : posición de la interfase

t : variable temporal

x : variable espacial

θ, T : temperatura

$\xi = \dfrac{\sigma}{a}$: parámetro adimensional

ϱ : densidad de masa

σ : coeficiente que caracteriza a $s(t)$

Sub-índices

$i=1$: fase líquida

$i=2$: fase sólida

Funciones

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2)\, du \quad (= erf(x))$$

$$J_o(x) = \frac{h_o}{\varrho_2\, l} \exp(-x^2) - d_2 x$$

$$V(x) = \frac{x \exp(-x^2)}{1 - f(x)}$$

$$H(x) = \frac{f'(x)}{1 - f(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \; \frac{\exp(-x^2)}{1 - f(x)}$$

$$Z(x) = h_0 \; \exp(-x^2) - \frac{d k_1}{2 a_1} \; H(\sigma / a_0)$$

$$J(x) = x \, f(x)$$

Bibliografía

Bancora, A. B. - Tarzia, D. A. , " On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at free boundary", 9, 215-222 (1985).

Quilghini, D., "Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase", Ann. Mat. Pura Appl., 67: 33-74 (1965).

Stampella, M.B. - Tarzia, D.A. , "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi- infinite material through a two-phase Stefan problem", Int.J.Eng.Sci., to appear.

Stoico, C.O., "Sobre la determinación de coeficientes térmicos en materiales semi-infinitos", Trabajo Final de la Lic. en Física, Fac. de Ciencias Exactas e Ing. (UNR), Rosario, Abril de 1986.

Tarzia, D.A. , "An inequality of the coefficient of the free boundary s(t)=2 t of the Neumann solution for the two-phase Stefan", Quart. Appl. Math., 39, 491-497 (1981-82).