SIGMA
8(1-2) 1982
pág. 83-98

DETERMINACION DE COEFICIENTES DESCONOCIDOS EN EL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

Mirta B. Stampella(*)(**)

Domingo A. Tarzia (*)

RESUMEN.

Se considera el problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito con uno de sus coeficientes desconocido (ℓ : calor latente de fusión, C_1: calor específico del hielo, C_2 : calor específico del agua, ρ : densidad de masa k_1: conductividad térmica del hielo, k_2 : conductividad termica del agua). Para resolverlo se da una condición adicional $k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial x}(0,t) = - h_0/\sqrt{t}$ en el borde fijo x = 0 del material de cambio de fase.

Se obtiene:

i) Si ρ es desconocido el correspondiente problema de frontera libre tiene siempre una solución del tipo de Neumann.

ii) Si uno de los cinco coeficientes restantes es desconocido, el correspondiente problema de frontera libre tiene una solución del tipo de Neumann si y solo si una condición suplementaria es verificada.

INTRODUCCION.

En este trabajo consideramos el problema de Stefan a dos fases [1,13,18,20,22] para un material semi-infinito, representado por $\Omega = (0,+\infty)$ con temperatura de cambio de fase nula (Caso: hielo-agua), con uno de sus coeficientes térmi

(*) PROMAR(CONICET-UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería- U.N.R., Avenida Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.
(**)Becaria del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina.

cos desconocidos, generalizándose algunos resultados obtenidos para el problema de Lamé-Clapeyron [1,13,17,18] (o problemas de Stefan a una fase) en [21]. Queremos hallar las funciones $s=s(t)>0$ (frontera libre) para $t>0$, con $s(0)=0$, y la temperatura $\theta=\theta(x,t)$ definida para $x>0$, $t>0$ de la forma siguiente:

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t)>0 & \text{si } 0<x<s(t), \quad t>0 \\ 0 & \text{si } x = s(t), \quad t>0 \\ \theta_1(x,t)<0 & \text{si } s(t)<x, \quad t>0, \end{cases} \tag{1}$$

de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial t} - a_2^2 \dfrac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} = 0, & 0<x<s(t), \quad t>0 \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial t} - a_1^2 \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} = 0, & s(t)<x, \quad t>0 \\ \theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0, & t>0 \\ k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}(s(t),t) - k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x}(s(t),t) = L\, s'(t), & t>0 \\ \theta_1(x,0) = -c, \quad x>0 \\ \theta_2(0,t) = b>0, \quad t>0 \end{cases} \tag{2}$$

donde:

$$\begin{cases} k_2>0: & \text{Conductividad térmica del agua.} \\ k_1>0: & \text{Conductividad térmica del hielo.} \\ c_2>0: & \text{Calor específico del agua.} \\ c_1>0: & \text{Calor específico del hielo.} \\ \rho>0: & \text{densidad de masa (común para hielo y agua)} \\ \ell>0: & \text{calor latente de fusión} \\ L = \rho\ell, \; C_2 = \rho c_2, \; C_1 = \rho c_1 & \\ a_2^2 = \dfrac{k_2}{\rho c_2}: & \text{difusividad térmica del agua} \\ a_1^2 = \dfrac{k_1}{\rho c_1}. & \text{difusividad témica del hielo} \end{cases} \tag{3}$$

$$\left|\begin{array}{ll} b>0 : & \text{temperatura en el borde fijo } x = 0. \\ -c<0 : & \text{temperatura inicial.} \end{array}\right.$$

La solución del problema (2) está dada en [1,13,18,20,22] y es conocida como la solución Neumann. Pero, si uno de los seis coeficientes k_2, k_1, c_2, $\rho\ell$ del material de cambio de fase es desconocido, es necesario dar una condición adicional en el borde fijo $x = 0$ [2-12, 14-16]. Tal condición es la dada por el conocimiento del flujo del calor que el material recibe en $x = 0$ [20,21], es decir:

$$\left\{\begin{array}{l} k_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial x}(0,t) = -\dfrac{h_o}{\sqrt{t}} \,, \quad t>0 \\ \\ \text{con } h_o>0 \end{array}\right. \tag{4}$$

Consideramos los seis diferentes casos con los siguientes coeficientes desconocidos:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{i)}\,\ell \,, & \text{ii)}\,\rho \,, & \text{iii)}\,c_1 \\ \text{iv)}\,c_2 \,, & \text{v)}\,k_1 \,, & \text{vi)}\,k_2 \end{array}\right. \tag{5}$$

y probamos que, bajo la condición (4), no siempre existe una solución del tipo de Neumann [1,13,18,20,22] para el problema (2), (4) en los seis diferentes casos (5). Más aún, la solución explícita existe para los casos i), iii), iv), v) y vi) si una condición complementaria es satisfecha, y en cambio siempre existe para el caso ii). La existencia de tal condición complementaria para el cálculo de la solución explícita ha sido observada en los trabajos [19-21] para problemas del tipo de Stefan.

Además, para el caso particular en que la temperatura inicial coincida con la del cambio de fase, es decir $c = 0$, se reencuentran los cuatro casos y los resultados obtenidos en [21].

2.- SOLUCION DE LOS DIFERENTES CASOS.

La solución del problema (2), (4) está dada por:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\theta_2(x,t) = b - \dfrac{b}{f(\sigma/a_2)} \; f(x/2a_2\sqrt{t}) \\[2ex]
\theta_1(x,t) = \dfrac{c\; f(\sigma/a_1)}{1-f(\sigma/a_1)} - \dfrac{c}{1-f(\sigma/a_1)} \; f(x/2a_1\sqrt{t}) \\[2ex]
s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \quad , \quad \sigma>0 \\[2ex]
\text{con } f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\Pi}} \displaystyle\int_0^x \exp(-u^2)\, du \quad \text{(función de error)}
\end{array}
\right.
\tag{6}
$$

donde σ y los coeficientes del material deberán satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{k_2 b}{a_2 L\sqrt{\Pi}} \; \dfrac{\exp(-\sigma^2/a_2^2)}{f(\sigma/a_2)} - \dfrac{c k_1}{a_1 L\sqrt{\Pi}} \; \dfrac{\exp(-\sigma^2/a_1^2)}{1-f(\sigma/a_1)} = \sigma \\[3ex]
f(\sigma/a_2) = \dfrac{k_2 b}{h_o a_2\sqrt{\Pi}}
\end{array}
\right.
$$

o equivalentemente:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
i) & \dfrac{h_o}{L} \exp(-\sigma^2/a_2^2) - \dfrac{c k_1}{a_1 L\sqrt{\Pi}} \; \dfrac{\exp(-\sigma^2/a_1^2)}{1-f(\sigma/a_1)} = \sigma \\[3ex]
ii) & f(\sigma/a_2) = \dfrac{k_2 b}{h_o a_2\sqrt{\Pi}}
\end{array}
\right.
\tag{7}
$$

cuyas incógnitas serán σ y uno de los coeficientes mencionados en (5). Considera mos en adelante las nuevas variables:

$$
i) \quad \xi_1 = \frac{\sigma}{a_1} > 0 \qquad , \qquad ii) \quad \xi_2 = \frac{\sigma}{a_2} > 0. \tag{8}
$$

<u>Caso i</u> Determinación del coeficiente ℓ.

si se verifica la condición

$$
\frac{k_2 b}{h_o a_2\sqrt{\Pi}} < 1 \tag{9}
$$

de (7ii) y (8ii), se obtiene:

$$\xi_2 = f^{-1}\,(k_2 b/h_0 a_2\sqrt{\pi}) \qquad (f^{-1}\text{: función inversa de } f). \tag{10}$$

Entonces la única solución de (7) está dada por:

$$\begin{cases} \ell = \dfrac{1}{\rho a_2 \xi_2} \; F_0(a_2\xi_2) \\ \sigma = a_2\xi_2 \quad , \quad \xi_2 \text{ dado por (10)} \end{cases} \tag{11}$$

si y solamente si (Ver Apéndice - Propiedad 0)

$$h_0 > \frac{ck_1}{a_1\sqrt{\pi}} \quad , \quad \frac{k_2 b}{h_0 a_2\sqrt{\pi}} \quad < \quad f(s_0) \tag{12}$$

donde

$$\begin{cases} F_0(x) = h_0 \exp(-x^2/a_2^2) - \dfrac{ck_1}{a_1\sqrt{\pi}} \; \dfrac{\exp(-x^2/a_1^2)}{1-f(x/a_1)} \quad , \; x>0 \\ s_0\text{: único cero de } F_0 \end{cases} \tag{12 Bis}$$

obteniéndose el

Lema 1

Si los datos $h_0>0$, $b>0$, $c>0$ y los coeficientes del material de cambio de fase ρ, c_1,c_2, k_1, k_2 verifican la condición (12), el problema (2), (4) tiene por solución (6) donde σ,ℓ están dados por (11).

Caso ii. Determinación del coeficiente ρ.

Teniendo en cuenta las definiciones (3), el sistema (7) con incógnitas ξ_2,ρ se transforma en:

$$\begin{cases} \dfrac{h_o}{\ell\sqrt{\rho}} \exp(-\xi_2^2) - \dfrac{c\sqrt{c_1 k_1}}{\ell\sqrt{\rho}} \dfrac{\exp(-c_1 k_2 \xi_2^2 / c_2 k_1)}{1-f\left(\xi_2 \sqrt{\dfrac{c_1 k_2}{c_2 k_1}}\right)} = \sqrt{\dfrac{k_2}{c_2}}\, \xi_2 \\ f(\xi_2) = \dfrac{b}{h_o} \sqrt{\dfrac{k_2 c_2}{\pi}}\, \sqrt{\rho}. \end{cases}$$

Eliminando $\sqrt{\rho}$, el elemento ξ_2 debe satisfacer la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{b c_2}{\ell\sqrt{\pi}} \dfrac{\exp(-\xi_2^2)}{f(\xi_2)} - \dfrac{c}{\ell} \sqrt{\dfrac{c_1 c_2 k_1}{k_2\, \pi}} \dfrac{\exp(-c_1 k_2 \xi_2^2 / c_2 k_1)}{1-f\left(\xi_2 \sqrt{\dfrac{c_1 k_2}{c_2 k_1}}\right)} = \xi_2 \\ \xi_2 > 0 \end{cases} \tag{13}$$

que tiene una única solución (ver Apéndice - Propiedad 1).

Lema 2.

Cualesquiera sean los datos $h_o>0$, $c>0$, $b>0$ y cualesquiera sean los coeficientes del material ℓ, c_1, c_2, k_1, k_2 el problema (2), (4) tiene por solución (6) donde σ,ρ están dados por:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{\pi}{k_2 c_2} \left[\dfrac{h_o}{b} f(\xi_2)\right]^2 \\ \sigma = \sqrt{\dfrac{k_2}{c_2}} \dfrac{\xi_2}{\sqrt{\rho}} = \dfrac{k_2 b}{h_o\sqrt{\pi}} \dfrac{\xi_2}{f(\xi_2)} \\ \xi_2 \text{ dado por (13).} \end{cases} \tag{14}$$

Caso iii. Determinación del coeficiente c_1.

Si se verifica la condición (9), el elemento ξ_2 está dado por (10). Por lo tanto, de (7i) resulta que ξ_1 debe verificar la ecuación:

$$\begin{cases} \xi_1 \exp(-\xi_1^2) = A_1 \, (1-f(\xi_1)) \quad , \ \xi_1>0 \\ \text{con } A_1 = \dfrac{L a_2 \xi_2 \sqrt{\pi}}{c \, k_1} \left[\dfrac{h_0}{L} \quad \exp(-\xi_2^2) \ - \ a_2\xi_2\right] . \end{cases} \tag{15}$$

La ecuación (15) tiene solución (y en tal caso es única) $\Longleftrightarrow$

$$A_1 > 0 \quad \text{(Ver Apéndice-Propiedad 2)} \qquad \Longleftrightarrow \tag{16}$$

$$\xi_2 < x_0 \tag{17}$$

donde x_0 es la única raíz positiva de J_0 (ver Apéndice - Propiedad 4), es decir:

$$\begin{cases} J_0(x_0) = 0, \quad x_0 > 0 \\ J_0(x) = \dfrac{h_0}{L} \exp(-x^2) - a_2 \, x. \end{cases} \tag{18}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (10), la condición (17) es equivalente a:

$$\frac{k_2 b}{h_0 a_2 \sqrt{\pi}} < f(x_0) \tag{19}$$

Por lo tanto, se puede establecer el siguiente

<u>Lema 3</u>

Si los datos $h_0 > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y los coeficientes ℓ, ρ, c_2, k_1, k_2 del material de cambio de fase verifican la condición (19) con x_0 dado por (18), el problema (2), (4) tiene por solución (6) donde σ, c_1 están dados por:

$$\begin{cases} \sigma = a_2 \, \xi_2 \quad , \quad c_1 = \dfrac{k_1}{\rho a_2^2} \left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 \\ \xi_2, \xi_1 \text{ dados por (10) y (15).} \end{cases} \tag{20}$$

Caso iv Determinación del coeficiente c_2.

De (7ii) resulta

$$\xi_1 = g(\xi_2) \tag{21}$$

donde

$$g(x) = \frac{k_2 b}{h_o a_1 \sqrt{\pi}} \quad \frac{x}{f(x)} \quad , \quad x>0. \tag{22}$$

Si g^{-1} es la función inversa de g, definida en $\left[\frac{k_2 b}{2h_o a_1}\right., +\infty)$, entonces

$$\xi_2 = g^{-1}(\xi_1) \ , \quad \xi_1 > \frac{k_2 b}{2h_o a_1} \tag{23}$$

con lo cual, de (7i), se obtiene para ξ_1 la ecuación:

$$(G_1 \circ g^{-1})\ (\xi_1) = G_2(\xi_1)\ ,\ \xi_1 > \frac{k_2 b}{2h_o a_1} \tag{24}$$

donde:

$$\begin{cases} G_1(x) = \dfrac{h_o}{a_1 L} \quad \exp(-x^2)\ ,\ x\geq 0. \\ G_2(x) = x \ + \ \dfrac{c\ k_1}{La_1^2\sqrt{\pi}} \quad \dfrac{\exp(-x^2)}{1-f(x)} \quad , \quad x\geq 0. \end{cases} \tag{25}$$

Por la propiedad 5 del Apéndice, la ecuación (24) tiene solución (y en tal caso es única) $\Longleftrightarrow$

$$G_2\left(\frac{k_2 b}{2h_o a_1}\right) < \frac{h_o}{L\ a_1} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{k_2 b}{2h_0} + \frac{ck_1}{La_1\sqrt{\pi}} \quad \frac{\exp\left[-(\frac{k_2 b}{2h_0 a_1})^2\right]}{1-f(k_2 b/2h_0 a_1)} \quad < \frac{h_0}{L} \tag{26}$$

obteniéndose el:

<u>Lema 4</u>:

Si los datos $h_0>0$, $b>0$, $c>0$ y los coeficientes $\rho, \ell, c_1, k_1, k_2$ del material de cambio de fase verifican la condición (26), el problema (2), (4) tiene por solución (6) donde σ, c_2 están dados por:

$$\begin{cases} \sigma = a_1 \, \xi_1 \quad , \quad c_2 = \dfrac{k_2}{\rho a_1^2} \left(\dfrac{g^{-1}(\xi_1)}{\xi_1}\right)^2 \\ \xi_1 \quad \text{dado por (24).} \end{cases} \tag{27}$$

<u>Caso v</u> Determinación del coeficiente k_1.

Si se verifica la condición (9), el elemento ξ_2 está dado por (10). Por lo tanto, de (71), resulta que ξ_1 debe verificar la ecuación:

$$\begin{cases} \exp(-\xi_1^2) - A_2 \, \xi_1 \, (1-f(\xi_1)) = 0 \quad , \ \xi_1>0, \\ \text{con } A_2 = \dfrac{L\sqrt{\pi}}{c\mathcal{C}_1} \left[\dfrac{h_0}{La_2} \quad \dfrac{\exp(-\xi_2^2)}{\xi_2} \ -1 \right] \end{cases} \tag{28}$$

Por la propiedad 3 del Apéndice, la ecuación (28) tiene solución (y en tal caso es única) $\Longleftrightarrow$

$$A_2 > \sqrt{\pi} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{h_0}{L+c\mathcal{C}_1} \quad \exp(-\xi_2^2) - a_2\xi_2 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \tag{29}$$

$$\xi_2 < x_1$$

donde x_1 es la única raíz positiva de J_1 (ver Apéndice - Propiedad 4), es decir:

$$\begin{cases} J_1(x_1) = 0 \ , \ x_1 > 0 \\ J_1(x) = \dfrac{h_o}{L+cC_1} \exp(-x^2) - a_2 \, x. \end{cases} \tag{30}$$

Teniendo en cuenta (10), la condición (29) es equivalente a

$$\frac{\dfrac{k_2 b}{2}}{h_o a_2 \sqrt{\pi}} < f(x_1). \tag{31}$$

Por lo tanto, se puede establecer el siguiente

Lema 5.

Si los datos $h_o>0$, $b>0$, $c>0$ y los coeficientes $\rho, \ell, c_1, c_2, k_2$ del material de cambio de fase verifican la condición (31), la solución del problema (2), (4) está dada por (6) con σ, k_1 dados por:

$$\begin{cases} \sigma = a_2 \, \xi_2 \ , \quad k_1 = \rho c_1 \ (a_2 \, \xi_2/\xi_1)^2 \\ \xi_2 \ \ \xi_1 \quad \text{dados por (10) y (28).} \end{cases} \tag{32}$$

Caso vi Determinación del coeficiente k_2.

De (7ii) resulta

$$\xi_1 = h(\xi_2) \tag{33}$$

donde

$$h(x) = \frac{h_o \sqrt{\pi}}{b \ C_2 a_1} \ x f(x) \quad , \ x \geq 0. \tag{34}$$

Si h^{-1} es la función inversa de h, definida en $[0, +\infty)$, entonces

$$\xi_2 = h^{-1}(\xi_1),\ \xi_1 > 0 \tag{35}$$

con lo cual, de (7i), se obtiene para ξ_1 la ecuación:

$$(G_1 \circ h^{-1})\ (\xi_1) = G_2\ (\xi_1),\ \xi_1>0 \tag{36}$$

donde G_1, G_2 son las funciones definidas en (25). Por la propiedad 5 del Apéndice, la ecuación (36) tiene solución (y en tal caso es única) $\Longleftrightarrow$

$$h_0 > \frac{ck_1}{a_1\sqrt{\pi}} \tag{37}$$

obteniéndose el

Lema 6.

Si los datos $h_0>0$, $b>0$, $c>0$ y los coeficientes ρ,ℓ,c_1,c_2,k_1 del material de cambio de fase verifican la condición (37), el problema (2), (4) tiene por solución (6) donde σ, k_2 están dados por:

$$\begin{cases} \sigma = a_1\ \xi_1 \quad , \quad k_2 = \rho c_2 \left[a_1\ \xi_1/h^{-1}(\xi_1)\right]^2 \\ \xi_1 \text{ dado por (36)} \end{cases} \tag{38}$$

Observación 1.

Las condiciones (9), (12), (19), (26), (31) y (37) son necesarias para la existencia de una solución del tipo de Neumann para el problema (2), (4).

Observación 2.

Para el caso particular c = 0 en i), ii), iv) y vi) se reencuentran los resultados de [21].

APENDICE

Propiedad 0.

Sea

$$\begin{cases} F_0(x) = h_0 \exp(-x^2/a_2^2) - \dfrac{ck_1}{a_1\sqrt{\pi}} \dfrac{\exp(-x^2/a_1^2)}{1-f(x/a_1)} , \quad x \geq 0 \\ \text{con } h_0,\ c,\ k_1,\ a_1,\ a_2 > 0. \end{cases}$$

Entonces:

i) $F_0(0) = h_0 - \dfrac{ck_1}{a_1\sqrt{\pi}}$, $F_0(+\infty) = -\infty$.

ii) $F_0'(x) < 0$, $\forall x > 0$.

Propiedad 1.

Sea

$$\begin{cases} F(x) = \alpha \dfrac{\exp[-(\beta x)^2]}{f(\beta x)} - \gamma \dfrac{\exp[-(\delta x)^2]}{1-f(\delta x)} , \quad x \geq 0 \\ \text{con } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta > 0. \end{cases}$$

Entonces:

i) $F(0) = +\infty$, $F(+\infty) = -\infty$.

ii) $F'(x) < 0$, $\forall x > 0$

Propiedad 2.

Sea

$$\begin{cases} K_1(x) = A\, x \exp(-x^2) - (1-f(x)),\quad x \geq 0 \\ \text{con } A \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Entonces:

i) $K_1(0) = -1 \quad , \quad K_1(+\infty) = 0.$

ii) $A < 0 \Longrightarrow K_1(x) < 0 \quad , \quad \forall\, x \geq 0.$

iii) $A > 0 \underbrace{\Longrightarrow \alpha_0}_{\exists!} > 0 / \quad K_1(\alpha_0) = 0 \quad , \; K_1 < 0 \;\text{ en }\;]0, \alpha_0),$

$K_1 > 0 \;\text{ en }\; (\alpha_0, +\infty).$

Propiedad 3.

Sea

$$\begin{cases} K_2(x) = B\exp(-x^2) - x(1-f(x)), \; x > 0 \\ \text{con } B \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Entonces:

i) $K_2(0) = B \quad , \quad K_2(+\infty) = 0 \quad , \; K'_2 = K_1 \text{ con } A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - B\right)$

ii) **La ecuación $K_2(x) = 0$ tiene solución (y en tal caso es única) si y sólo si $0 < B < 1/\sqrt{\pi}$.**

Propiedad 4.

Para cada $r > 0$, definimos la función:

$$\begin{cases} J_r(x) = \dfrac{h_0}{L + cC_1 r}\exp(-x^2) - a_2\, x, \; x \geq 0 \\ \text{con } h_0, L, c, C_1 > 0. \end{cases}$$

Entonces:

i) $\exists!\; x_r > 0 / \quad J_r(x_r) = 0 \quad \text{y} \quad J_r(x) > 0 \iff x < x_r.$

ii) $r_1 \leq r_2 \Longrightarrow x_{r_2} \leq x_{r_1}.$

Propiedad 5.

Sean

$$\begin{cases} g(x) = \alpha \dfrac{x}{f(x)} \quad , \quad f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp(-u^2)\, du \\[2ex] h(x) = \beta x f(x) \quad , \quad G_1(x) = \gamma \exp(-x^2) \quad , \\[2ex] G_2(x) = x + \delta \dfrac{\exp(-x^2)}{1-f(x)} \quad , \quad x \geq 0 \\[2ex] \text{con} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0. \end{cases}$$

Entonces:

i) G_2 es estrictamente creciente con $G_2(0) = \delta$ y $G_2(+\infty) = +\infty$

ii) g es estrictamente creciente con $g(0) = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}$ y $g(+\infty) = +\infty$

iii) $G_1 \circ g^{-1}$ está definida en $[\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}, +\infty)$ y es estrictamente decreciente. Además la ecuación

$$(G_1 \circ g^{-1})(x) = G_2(x) \quad , \quad x > \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}$$

tiene solución (y en tal caso es única) si y solo si

$$G_2\left(\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}\right) < \gamma.$$

iv) $G_1 \circ h^{-1}$ está definida en $[0, +\infty)$ y es estrictamente decreciente. Además la ecuación

$$(G_1 \circ h^{-1})(x) = G_2(x) \quad , \quad x > 0$$

tiene solución (y en tal caso es única) si y solo si

$$\delta < \gamma$$

AGRACECIMIENTO:

Este trabajo ha sido realizado, en parte con un subsidio otorgado por la SUBCYT-CONICET (Argentina) al proyecto [redacted] "Problemas de Frontera libre de la Física-Matemática", perteneciente al PROMAR (Programa de Matemática de Rosario).

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. BRILLOVIN, Sur quelques problèmes non résolus de physique mathématique clasique: propagation de la fusion, Annales de l'Inst. H. Poincaré, 1(1930/31) 285 - 308.

[2] B.M. BUDAK - A.D. ISKENDEROV, On a class of boundary value problems with unknow coefficients, Soviet Math. Dokl., 8(1967) 786-789.

[3] B.M. BUDAK - A.D.ISKENDEROV, A class of inverse boundary value problems with unknown coefficients, Soviet Math. Dokl., 8(1967) 1026-1030.

[4] J.R. CANNON, Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation, Duke Math. J., 30(1963) 313-323.

[5] J.R. CANNON, Determination of certain paramenters in heat conduction problems, J. Math. Anal. Appl., 8(1964) 188-201.

[6] J.R. CANNON, Determination of the unknown coefficient k(u) in the equation $\nabla.k(u)\nabla u = 0$ from overspecified boundary data, J. Math. Anal. Appl., 18(1967), 112-114.

[7] J.R. CANNON - J. DOUGLAS, JR. - B.F. JONES, JR., - Determination of the diffusivity of an isotropic medium, Int. J. Eng. Sci., 1(1963) 453-455.

[8] J.R. CANNON - P.C. DUCHATEAU, Determining Unknown coefficients in a nonlinear heat conduction problem, SIAM J. Appl. Math., 24(1973) 298-314 .

[9] J.R. CANNON - P.C. DUCHATEAU, Determination of Unknown coefficients in parabolic operators from overspecified initial-boundary data., J. Heat. Transfer, 100(1978)503-507.

[10] J.R. CANNON - D.L. FILMER, The determination of unknown paramenters in analytic systems of ordinary differential equations, SIAM J. Appl. Math., 15(1967) 799-809.

[11] J.R. CANNON - J.H. HALTON, The irrotational solution of an elliptic differential equation with an unknown coefficient, Proc. Cambridge Phil. Soc. 59(1963) 680-682.

[12] J.R. CANNON - B.F. JONES, JR., Determination of the diffusivity of an aniso- tropic medium, Int. J. Eng. Sci., 1(1963) 457-460.

[13] H.S.CARSLAW - J.C. JAEGER, Conduction of heat in solids, Clarendon Press, Oxford (1959).

[14] J. DOUGLAS, JR. - B.F. JONES, JR., The determination of a coefficients in a parabolic differential equation. Part. II. Numerical approximation, J. Math. Mech., 11(1962) 919-926.

[15] B.F. JONES, JR., The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part. I. Existence and uniqueness, J. Math. Mech., 11(1962) 907-918.

[16] B.F. JONES, JR., Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 16(1963) 33-44.

[17] G. LAME - B.P. CLAPERYRON, Memoire sur la solidification par refroidussement d'un globe liquide, Annales Chimie Physique, 47(1831) 250-256.

[18] L.I. RUBINSTEIN, The Stefan problem, Trans. Math. Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence (1971).

[19] D.A. TARZIA, Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases, Math. Notae, 28(1980/81) 73-89.

[20] D.A. TARZIA, An inequality for the coefficient of the free boundary $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem, Quart. Appl. Math., To appear.

[21] D.A. TARZIA, Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron (or one-phase Stefan problem), To appear.

[22] H. WEBER, Die partiellen differential-gleinchungen der mathematischen physik, nach Riemanns Vortesungen, t.II, Braunwschweig (1901).