UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

IV SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 14 al 18 de diciembre de 1992

23

Rosario - República Argentina
1993

Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, 23 (1993), 39–51.

PROBLEMAS CON MULTIFASES

M.C. SANZIEL (*) – D.A. TARZIA (*) (**)

(*) PROMAR (CONICET–UNR), Instituto de Matemática "B.Levi",
Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.

(**) Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral,
Paraguay 1956, (2000) Rosario, Argentina.

En muchos campos de interés práctico aparecen problemas transitorios de conducción del calor que involucran más de un cambio de fase (y particularmente, para la concentración en la ecuación de la difusión). El método de Neumann (de similaridad) [1, 2, 6] puede ser empleado, en casos particulares, para obtener la solución de tales problemas, como se verá en los artículos que seguidamente se analizan [3, 7, 8].

En [7] se considera el problema de determinar la temperatura de una barra de material semiinfinito inicialmente a temperatura uniforme, cuya superficie se mantiene a temperatura constante y que experimenta un número arbitrario de cambios de fase al pasar de la temperatura inicial a la final. Es el primer trabajo en el que se plantean este tipo de cuestiones.

Las ecuaciones que caracterizan a la temperatura $u = u(x, t)$ son

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D_i \dfrac{\partial u}{\partial x^2}$, $x \in (S_{i-1}(t), S_i(t))$, $t > 0$, $i = 1, \ldots, n$,

(2i) $u(S_i^-(t), t) = u_i$, $t > 0$, $i = 1, \ldots, n\text{-}1$,

(2ii) $u(S_i^+(t), t) = u_i$, $t > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$,

(3) $k_i \dfrac{\partial u}{\partial x}(S_i^-(t), t) - k_{i+1} \dfrac{\partial u}{\partial x}(S_i^+(t), t) = \delta_i \dot{S}_i(t)$, $t > 0$, $i = 1, \ldots, n\text{-}1$,

(4) $S_i(0^+) = 0$, $i = 1, \ldots, n\text{-}1$,

(5) $u(x, 0) = u_n$, $x > 0$,

(6) $\lim_{x \to \infty} u(x, t) = u_n$, $t > 0$,

donde k_i es la conductividad térmica, C_i el calor específico volumétrico y $D_i = \dfrac{k_i}{C_i}$ la difusividad térmica de la fase i. δ_i representa el calor latente de fusión por unidad de volumen al pasar de la fase i-1 a la fase i (i=1, . . . , n-1). Se indica con $x = S_i(t)$ la i-ésima frontera libre de cambio de fase (i=1, . . . , n-1), siendo $S_0(t) = 0$ $(t > 0)$ y $S_1(t) < S_2(t) < \ldots < S_n(t)$. Se supone que inicialmente sólo está presente la fase n.

Siguiendo la idea de Neumann [1, 2, 6] se propone como solución

(7) $u(x, t) = A_i + B_i \operatorname{erf}\left(\dfrac{\beta_i x}{\sqrt{t}}\right)$, $t > 0$, $x \in (S_{i-1}(t), S_i(t))$, $i = 1, \ldots, n\text{-}1$,

(8) $u(x, t) = A_n + B_n \operatorname{erf}\left(\dfrac{\beta_n x}{\sqrt{t}}\right)$, $t > 0$, $x > S_{n-1}(t)$,

(9) $S_i(t) = \omega_i \sqrt{t}$, $\omega_i > 0$, $i = 1, \ldots, n\text{-}1$,

donde

$$(10) \qquad \beta_i = \frac{1}{2\sqrt{D_i}} \qquad (i = 1, \dots, n\text{-}1),$$

y los coeficientes ω_i, A_i y B_i son incógnitas que se deben determinar.

Si se consideran las condiciones (2) entonces se obtienen los coeficientes A_i y B_i en función de los ω_i, a saber:

$$(11) \qquad A_i = \frac{u_{i-1}\,\mathrm{erf}(\beta_i\omega_i) - u_i\mathrm{erf}(\beta_i\omega_{i-1})}{\mathrm{erf}\,(\beta_i\omega_i) - \mathrm{erf}(\beta_i\omega_{i-1})}, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$(12) \qquad B_i = -\frac{u_i - u_{i-1}}{\mathrm{erf}\,(\beta_i\omega_i) - \mathrm{erf}(\beta_i\omega_{i-1})}, \qquad i = 1, \dots, n$$

suponiendo, por conveniencia en la notación, que $\omega_0=0$ y $\omega_n=+\infty$ (es decir que $\mathrm{erf}(\omega_n) = \lim_{x\to\infty}\mathrm{erf}(x)=1$).

Si se toma en cuenta la condición (3) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para las incógnitas ω_i:

$$(13) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{k_i\beta_i(u_i - u_{i-1})\exp(-\beta_i^{\,2}\omega_i^{\,2})}{\mathrm{erf}\,(\beta_i\omega_i) - \mathrm{erf}(\beta_i\omega_{i-1})} - \frac{k_{i+1}\beta_{i+1}(u_{i+1} - u_i)\exp(-\beta_{i+1}^2\omega_{i+1}^2)}{\mathrm{erf}\,(\beta_{i+1}\omega_{i+1}) - \mathrm{erf}(\beta_{i+1}\omega_i)} \right) =$$

$$= \frac{\delta_i\omega_i}{2}, \qquad i = 1, \dots, n\text{-}1.$$

En [7] el sistema (13) es resuelto numéricamente, sin que se realice ninguna consideración acerca de la existencia y unicidad de solución.

En [8] se trata el mismo problema anterior, sustituyendo las ecuaciones (2i) y (2ii) por

$$(2\text{i-bis}) \qquad u(S_i^-(t), t) = u_i + \Delta_i, \qquad t > 0, \qquad i = 1, \dots, n\text{-}1$$

$$(2\text{ii-bis}) \qquad u(S_i^+(t), t) = u_i, \qquad t > 0, \qquad i = 0, 1, \dots, n\text{-}1.$$

Es decir que los valores de la variable dependiente (temperatura, concentración, entalpía) en cada lado de las fronteras libres, que son datos del problema, pueden diferir en un valor finito (designado con Δ_i). Para garantizar la existencia y unicidad de solución se supone que los datos verifican las siguientes hipótesis :

a) $D_i > 0$ y $k_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n\text{-}1$,
$D_n > 0$ y $k_n > 0$, ó $D_n = k_n = 0$;

b) $u_{i\text{-}1} > u_i + \Delta_i$ y $\delta_i \leq 0$ para $i = 1, \ldots, n\text{-}1$ y $u_{n\text{-}1} \geq u_n$,
ó
$u_{i\text{-}1} < u_i + \Delta_i$ y $\delta_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n\text{-}1$ y $u_{n\text{-}1} \leq u_n$;

c) en el caso en que $u_{n\text{-}1} = u_n$ entonces $\delta_{n\text{-}1} \neq 0$, mientras que si $D_n = k_n = 0$ entonces $u_{n\text{-}1} = u_n$.

Las funciones

$$(14) \qquad u(x, t) = (u_{i\text{-}1} + \alpha_i)\left\{\frac{\operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D_i t}}}{\operatorname{erfc}\left(a_{i\text{-}1}\sqrt{\frac{D_{i\text{-}1}}{D_i}}\right)}\right\} - \alpha_i, \quad t > 0, \quad x \in (S_{i\text{-}1}(t), S_i(t)), \quad i = 1, \ldots, n\text{-}1$$

$$(15) \qquad S_i(t) = a_i\sqrt{4D_i t}, \qquad i = 1, \ldots, n\text{-}1,$$

$$(16) \qquad u(x, t) = \begin{cases} u_n & \text{si } D_n = 0 \\ & t > 0, \quad x > S_{n\text{-}1}(t) \\ u_n + (u_{n\text{-}1} - u_n)\left\{\operatorname{erfc}\frac{x}{\sqrt{4D_n t}} \Big/ \operatorname{erfc}\left(a_{n\text{-}1}\sqrt{D_{n\text{-}1}/D_n}\right)\right\} & \text{si } D_n > 0, \end{cases}$$

satisfacen las condiciones (1), (2ii-bis), (4), (5) y (6). Los coeficientes a_i y α_i son constantes a determinar. Para que se verifiquen las condiciones (2i-bis) debe cumplirse que :

$$(17) \qquad u_{i-1} + \alpha_i = (u_{i-1} - u_i - \Delta_i)\, \mathrm{erfc}\,(a_{i-1}\sqrt{\frac{D_{i-1}}{D_i}})/\phi_i(a_i, a_{i-1}) \ , \ i = 1, \ldots, n\text{-}1.$$

donde

$$(18) \qquad \phi_i(a_i, a_{i-1}) = \mathrm{erf}\, a_i \ - \mathrm{erf}\,(a_{i-1}\sqrt{\frac{D_{i-1}}{D_i}}) \ .$$

Si se consideran las condiciones (3) se deducen para los coeficientes a_i las siguientes ecuaciones:

$$(19) \qquad \delta_i \sqrt{\pi D_i}\, a_i = - k_i\, (u_{i-1} - u_i - \Delta_i) \exp(-a_i^2)/(\phi_i \sqrt{D_i}) +$$

$$+ k_{i+1}\, (u_i - u_{i+1} - \Delta_{i+1}) \frac{\exp(-a_i^2 \frac{D_i}{D_{i+1}})}{(\phi_{i+1}\sqrt{D_{i+1}})} \ , \qquad i = 1, \ldots, n-2$$

$$(20) \qquad \delta_{n-1} \sqrt{\pi D_{n-1}}\, a_{n-1} + k_{n-1}\, (u_{n-2} - u_{n-1} - \Delta_{n-1}) \exp(-a_{n-1}^2)/(\phi_{n-1}\sqrt{D_{n-1}}) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} k_n\, (u_{n-1} - u_n) \exp(-a_{n-1}^2 \frac{D_{n-1}}{D_n})/(\phi_n \sqrt{D_n}) & \text{si } D_n \neq 0 \ , \\ 0 & \text{si } D_n = 0 \ , \end{array} \right.$$

$$(21) \qquad \phi_n(a_n, a_{n-1}) = 1 - \mathrm{erf}\,(a_{n-1}\sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}) \ .$$

Al realizar algunos cambios de parámetros:

$$(22) \qquad \beta_i = \sqrt{\frac{D_i}{D_{i+1}}} \ , \qquad \beta_{n-1} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}} & \text{si } D_n \neq 0 \ , \\ 1 & \text{si } D_n = 0 \ , \end{array} \right.$$

$$(23) \qquad A_i = \beta_i \frac{k_{i+1}}{k_i} \frac{(u_i - u_{i+1} - \Delta_{i+1})}{(u_{i-1} - u_i - \Delta_i)} , \qquad i = 1 , \ldots , n\text{-}2 ;$$

$$(24) \qquad A_{n-1} = \beta_{n-1} \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{(u_{n-1} - u_n)}{(u_{n-2} - u_{n-1} - \Delta_{n-1})} ,$$

$$(25) \qquad B_i = \frac{-\delta_i \, D_i \sqrt{\pi}}{k_i \, (u_{i-1} - u_i - \Delta_i)} , \qquad i = 1 , \ldots , n\text{-}1$$

y reordenar las ecuaciones anteriores, se obtienen :

$$(S_1) \qquad \mathrm{erf}(a_{i+1}) = \mathrm{erf}(\beta_i a_i) + \frac{A_i \exp[a_i^2 \, (1 - \beta_i^2)] \, \phi_i}{1 - B_i \, a_i \exp(a_i^2) \, \phi_i}, \qquad i = 1 , \ldots, n\text{-}2,$$

$$(S_2) \qquad \mathrm{erf}(a_{n-2}\beta_{n-2}) =$$

$$= \mathrm{erf}(a_{n-1}) - \left\{ B_{n-1} a_{n-1} \exp(a_{n-1}^2) + \frac{A_{n-1} \exp[a_{n-1}^2(x)(1 - \beta_{n-1}^2)]}{\mathrm{erfc}(a_{n-1}\beta_{n-1})} \right\}^{-1} .$$

Para probar la existencia de solución del sistema de ecuaciones $(S_1)-(S_2)$ se define una sucesión de funciones $\{f_i(x)\}$, $i = 0 , 1 , \ldots , n$, del siguiente modo :

$$f_0(x) = 0, \qquad f_1(x) = x ,$$

y para $i=1 , \ldots , n\text{-}2$, la función f_{i+1} se define implícitamente en términos de f_{i-1} y de f_i reemplazando respectivamente los parámetros a_{i+1}, a_i y a_{i-1} en el sistema anterior.

Una solución del sistema $(S_1)-(S_2)$ viene dada por $a_i = f_i(x^*)$, $i=1, \ldots , n\text{-}1$, siendo $x^* \, / \, f_n(x^*) = f_{n-2}(x^*)$.

Finalmente se demuestra [8] :

***Teorema 1** : Dadas las constantes* $\{ A_i , B_i , \beta_i \}$, $i=1 , \dots , n\text{-}1$, *con* $\beta_i > 0$, $A_i > 0$, $B_i \geq 0$, $i=1 , \dots , n\text{-}2$, A_{n-1} , $B_{n-1} \geq 0$ *y* $A_{n-1} + B_{n-1} > 0$, *existe solución* $a_i > 0$ ($i = 1 , \dots , n\text{-}1$) *del sistema* $(S_1)-(S_2)$, *con* $a_i > a_{i-1}\beta_{i-1}$ *para* $i = 1 , \dots , n\text{-}2$.

En [3], motivado por los dos trabajos recientemente mencionados se generaliza el trabajo [5] (ver también [4]) para el caso en que se presentan multifases en un cuerpo semiinfinito con un flujo de calor de la forma $-q_0/\sqrt{t}$ en el borde fijo $x=0$.

En este caso el problema consiste en encontrar condiciones sobre $q_0>0$, para que se produzcan n-fases, es decir para que existan las fronteras libres $S_{n-1}(t) < S_{n-2}(t) < < \dots < S_1(t)$ y la temperatura $u = u(x,t)$, definida por:

(26) $$u(x,t) = u_i(x,t) \quad \text{si } S_i(t) < x < S_{i-1}(t), \quad t > 0, \quad i = 1, \dots , n,$$

de manera que se satisfagan las condiciones siguientes :

(27) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial u_i}{\partial x^2} , \qquad x \in (S_i(t), S_{i-1}(t)) , t > 0 , i = 1, \dots , n ,$$

(28) $$u_1(x,0) = u_1 , \qquad x > 0 ,$$

(29) $$u_1(S_0(t), t) = u_1 , \qquad t > 0 ,$$

(30) $$u_i(S_i^+(t), t) = u_{i+1}(S_i^-(t), t) = u_{i+1} \quad , \qquad t > 0 , \quad i = 1 , \dots , n\text{-}1 ,$$

(31) $$k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} , \qquad t > 0 ,$$

(32) $$S_i(0) = 0 \quad , \qquad i = 1, \dots , n\text{-}1,$$

$$(33) \qquad k_i\frac{\partial u_i}{\partial x}(S_i^+(t), t) - k_{i+1}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x}(S_i^-(t), t) = \delta_i \dot{S}_i(t)\ ,\quad t > 0\ ,\ i = 1,\ldots,n\text{-}1.$$

Las temperaturas u_i verifican $u_{i+1} > u_i$ para $i = 1, \ldots, n\text{-}1$ y se considera $S_0(t) = +\infty$ y $S_n(t) = 0,\ \forall\ t > 0.$

Siguiendo la idea de la solución de Neumann, para el problema de Stefan a dos fases se proponen :

$$(34) \qquad u_i(x,t) = A_i + B_i\ \mathrm{erf}\Big(\frac{x}{2a_i\sqrt{t}}\Big)\ , \qquad i = 1, \ldots, n\ ,$$

$$(35) \qquad S_i(t) = 2\omega_i\sqrt{t}\ , \qquad \omega_i > 0\ , \qquad i = 1, \ldots, n\text{-}1\ ,$$

donde se ha tomado por conveniencia $a_i = \sqrt{D_i}$ y los coeficientes A_i, B_i y ω_i son constantes a determinar.

De las condiciones (28) – (31) se obtienen:

$$(36) \quad A_i = \frac{u_{i+1}\ \mathrm{erf}(\frac{\omega_{i-1}}{a_i}) - u_i \mathrm{erf}(\frac{\omega_i}{a_i})}{\mathrm{erf}\ (\frac{\omega_{i-1}}{a_i}) - \mathrm{erf}(\frac{\omega_i}{a_i})}\ , \qquad B_i = \frac{u_i - u_{i+1}}{\mathrm{erf}\ (\frac{\omega_{i-1}}{a_i}) - \mathrm{erf}(\frac{\omega_i}{a_i})}\ ,\quad i=1, \ldots, n\text{-}1$$

$$(37) \qquad A_n = u_n + \mathrm{erf}(\frac{\omega_{n-1}}{a_n})\ \frac{q_0 a_n\sqrt{\pi}}{k_n}\ , \qquad B_n = -\ \frac{q_0 a_n\sqrt{\pi}}{k_n}\ ,$$

donde se considera un parámetro "auxiliar" $\omega_0 = +\infty$.

La condición (33) ($i = 1, \ldots, n\text{-}1$) se verificará si los parámetros ω_i satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
(38)\quad \left|\begin{array}{l} a)\ \delta_i\omega_i = \beta_{i+1}\dfrac{\eta(\omega_i,\, a_{i+1})}{\phi(\omega_i,\, \omega_{i+1},\, a_{i+1})} - \beta_i\dfrac{\eta(\omega_i,\, a_i)}{\phi(\omega_{i-1},\, \omega_i,\, a_i)}\ ,\ i = 1, \ldots, n\text{-}2 \\[3em] b)\ \delta_{n-1}\omega_{n-1} = q_0\ \eta(\omega_{n-1},\, a_n) - \beta_{n-1}\dfrac{\eta(\omega_{n-1},\, a_{n-1})}{\phi(\omega_{n-2},\, \omega_{n-1},\, a_{n-1})} \end{array}\right.
$$

donde :

$$
(39)\qquad \beta_i = -\frac{k_i}{a_i\sqrt{\pi}}(u_i - u_{i+1}) > 0 \quad , \qquad i = 1, \ldots, n\text{-}1\ ,
$$

$$
(40)\qquad \eta(\omega,\, a) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{a^2}\right)
$$

$$
(41)\qquad \phi(\alpha,\, \beta,\, \gamma) = \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\ .
$$

A fin de demostrar la existencia de solución del sistema (38) se definen las sucesiones de funciones $\{h_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$, $\{H_i(x)\}_{i=1}^{n-2}$ y $\{G_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$.

Sean las funciones:

$$
(42)\qquad G_1(x) = x\ , \qquad\qquad x > 0
$$

$$
(43)\qquad h_1(x) = \delta_1 x + \beta_1\frac{\eta(x,\, a_1)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{a_1}\right)}\ , \qquad x > 0\ ,
$$

Recordando que la función $F_1(x) = \exp(-x^2)/\operatorname{erfc}(x)$ $(x > 0)$ es una función creciente resulta que la función h_1 verifica :

$$
(44)\qquad h_1(0) = \beta_1 > 0\ , \qquad h_1(+\infty) = +\infty, \qquad h_1'(x) > 0,\ \forall x > 0,
$$

con lo cual la ecuación (38) a) para i = 1 es equivalente a :

(45) $$h_1(\omega_1) = \beta_2 \frac{\eta(\omega_1, a_2)}{\phi(\omega_1, \omega_2, a_2)},$$

por lo tanto resulta que $\phi(\omega_1, \omega_2, a_2) > 0$ y en consecuencia $\omega_1 > \omega_2$.

Se define :

(46) $$H_1(x) = \operatorname{erf}(\frac{x}{a_2}) - \beta_2 \frac{\eta(x, a_2)}{h_1(x)}, \qquad x > 0 .$$

A partir de las propiedades de la función h_1 resulta que la función H_1 verifica :

(47) $$H_1(0) = -\frac{\beta_2}{\beta_1} < 0 \qquad H_1(+\infty) = 1, \qquad H_1'(x) > 0,\ \forall x > 0.$$

En consecuencia, existe $x_1 > 0$ de manera que $H_1(x_1) = 0$ y por ende puede definirse la función

(48) $$G_2(x) = a_2 \operatorname{erf}^{-1}[H_1(x)] \quad , \qquad x \in (x_1, +\infty),$$

la que resulta ser una función creciente que verifica $G_2(x_1) = 0$ y $G_2(+\infty) = +\infty$.

La ecuación (45) se expresa como :

(49) $$\omega_2 = G_2(\omega_1)$$

o en forma equivalente por

(49bis) $$\frac{\beta_2}{\phi(\omega_1,\omega_2,a_2)} = \frac{h_1(\omega_1)}{\eta(\omega_1,a_2)} .$$

Por ende se deduce que $G_2(x) < G_1(x)$, $\forall x \in (x_1, +\infty)$. Se definen ahora en forma recursiva las funciones :

(50) $h_i(x) = \delta_i\, G_i(x) \;+\; \beta_i \dfrac{\eta(G_i(x),\, a_i)}{\phi(G_{i-1}(x),\, G_i(x),\, a_i)}$, $x \in (x_{i-1}, +\infty)$, $i= 2,\ldots, n-2,$

(51) $h_{n-1}(x)=\delta_{n-1}\, G_{n-1}(x) \;+\; h_{n-2}(x)\, \dfrac{\eta(G_{n-1}(x),\, a_{n-1})}{\eta(G_{n-2}(x),\, a_{n-1})}$, $x \in (x_{n-2}, +\infty)$

(52) $H_i(x) = \operatorname{erf} \dfrac{G_i(x)}{a_{i+1}} - \beta_{i+1}\, \dfrac{\eta(G_i(x),\, a_{i+1})}{h_i(x)}$, $x \in (x_{i-1}, +\infty)$, $i=2 , \ldots , n-2,$

(53) $G_i(x) \;= a_i\, \operatorname{erf}^{-1}[H_{i-1}(x)]$, $x \in (x_{i-1}, +\infty)$, $i=3 , \ldots , n-1$

siendo

(54) $$x_i > x_{i-1} \;/\; H_i(x_i) = 0, \qquad i = 2 , \ldots , n.$$

Si se tiene en cuenta que :

(55) $$\frac{\beta_i}{\phi(G_{i-1}(x),\, G_i(x),\, a_i)} = \frac{h_{i-1}(x)}{\eta(G_{i-1}(x),\, a_i)}, \qquad i = 3, \ldots ,n-1,$$

resulta que $G_{i-1}(x) > G_i(x)$, $\forall\ x \in (x_{i-1}, +\infty)$ y por lo tanto las funciones así definidas son funciones crecientes que verifican las condiciones siguientes:

(56) $$\left|\begin{array}{lll} h_i(x_{i-1}) > 0 \,, & & h_i(+\infty) = +\infty, \\ H_i(x_{i-1}) < 0 \,, & H_i(x_i) = 0 \,, & H_i(+\infty) = 1 \,, \\ G_i(x_{i-1}) = 0 \,, & & G_i(+\infty) = +\infty \,. \end{array}\right.$$

Se define también la función :

(57) $$Q(x) = q_0\, \eta(G_{n-1}(x),\, a_n)$$

la cual es una función decreciente que verifica:

(58) $$Q(x_{n-2}) = q_0 \quad , \quad Q(+\infty) = 0.$$

Teniendo en cuenta (51), (53) y (57), el sistema de ecuaciones ((38) a)−b)) se transforma en :

(59) $$\left| \begin{array}{ll} \omega_i = G_i(\omega_1) \; , & i = 2, \ldots, n\text{-}1 \; , \\ & \\ h_{n-1}(\omega_1) = Q(\omega_1) & \end{array} \right.$$

y en consecuencia existirá solución si y sólo si existe

(60) $$x^*/ \;\; h_{n-1}(x^*) = Q(x^*).$$

En virtud de las propiedades de las funciones h_{n-1} y Q esto ocurrirá si y sólo si $h_{n-1}(x_{n-2}) < Q(x_{n-2})$ o lo que es equivalente (recordando las propiedades de las funciones G_i) :

(61) $$q_0 > \frac{\beta_{n-1}}{\operatorname{erf} \dfrac{G_{n-2}(x_{n-2})}{a_{n-1}}} > \frac{\beta_{n-2}}{\operatorname{erf} \dfrac{G_{n-3}(x_{n-3})}{a_{n-2}}} > \ldots . > \frac{\beta_2}{\operatorname{erf} \dfrac{x_1}{a_2}} > \beta_1 \; .$$

Se tiene entonces la siguiente propiedad [3] :

<u>*Teorema*</u> <u>2</u> : ***Existe solución al problema* (26-33) *si y sólo si el coeficiente* $q_0 > 0$ *verifica la condición* (61).**

BIBLIOGRAFIA

[1] H.S. CARSLAW – J.C. JAEGER, "Conduction of Heat in Solids", Clarendon Press, Oxford (1959).

[2] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan Problem", Translations of Mathematical Monographs, Vol.27, American Mathematical Society, Providence (1971).

[3] M.C. SANZIEL – D.A. TARZIA, "Necessary and sufficient condition to obtain n phases in a one-dimensional medium with a flux condition on the fixed face", Mathematicae Notae, 33 (1989), 25–32.

[4] A.D. SOLOMON – D.G. WILSON – V. ALEXIADES, "Explicit solutions to change problems", Quart. Appl. Math., 41 (1983), 237–243.

[5] D.A. TARZIA, "An inequality for the cofficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann Solution for the two-phase Stefan Problem," Quart. Appl. Math., 39 (1981/82), 491–497.

[6] D.A. TARZIA "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, Rosario, 12 (1984), 5–36. Ver también "Transferencia de calor y materia con cambio de fase", en "Transferencia de Calor y Materia. Aspectos Fundamentales", 1ra Escuela de Postgrado en Transferencia de Calor y Materia ECAMAT'92, J.C. Ferreri (Ed.), CAMAT, Tandil (1992), Capítulo 2, pp 2.1–2.46 (46 páginas).

[7] J.H. WEINER, "Transient heat conduction in multi-phase media", Brit. J. Appl. Physics, 6 (1955), 361–363.

[8] D.G. WILSON, "Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multi-phase Stefan problems", SIAM J. Appl. Math., 35 (1978), 135–147.