SOLUCIONES EXPLICITAS PARA EL PROBLEMA DE DESUBLIMACION EN UN SEMI-ESPACIO HUMEDO POROSO CON UNA CONDICION DE FLUJO DE CALOR

E.A. SANTILLAN y D.A. TARZIA
Univ. Austral, Fac. de Ciencias Empresariales, Depto. de Matemática (CONICET), Paraguay Nº 1950, (2000) Rosario - Argentina (e-mail: tarzia@uaufce.edu.ar)

RESUMEN

El objetivo de este trabajo fue la obtención de soluciones exactas para el problema de desublimación (cambio de fase de gas a sólido), considerando el acoplamiento de las distribuciones de temperatura y humedad en un semi-espacio poroso con una condición de flujo de calor del tipo $q_o/\sqrt{t}$ en el borde fijo x=0. Se definió un modelo analítico del proceso y se determinó las soluciones exactas del mismo utilizando el método de similitud. Una desigualdad para el coeficiente positivo q_o resultó ser necesaria y suficiente para obtener dicha solución explícita. Basado en los resultados del trabajo, se establece una condición de temperatura en el borde fijo, hallándose, para este último problema, una desigualdad que el coeficiente que caracteriza la frontera libre debe satisfacer.

EXPLICIT SOLUTIONS FOR THE DESUBLIMATION PROBLEM IN A HUMID POROUS HALF-SPACE WITH A HEAT FLUX CONDITION

ABSTRACT

The goal of the present work was to obtain exact solutions for the desublimation problem (change of phase from gas to solid), considering the coupling of the distributions of temperature and moisture in a porous half-space with a heat flux condition of the type $q_o/\sqrt{t}$ at the fixed boundary x = 0. An analytical model of this process was defined and its exact solutions were determined using the similarity method. An inequality for the positive coefficient q_o proved to be necessary and sufficient in order to obtain the explicit solution. Based on the results of this work, a condition of temperature on the fixed boundary is established, finding, for this last problem, an inequality that the coefficient that characterizes the free boundary must satisfy.

Keywords: phase-change, porous media, desublimation, similarity method

INTRODUCCION

Los problemas de transferencia de calor y masa con cambio de fase que se llevan a cabo en medios porosos, tales como la evaporación, la condensación, el congelamiento, el derretimiento, la sublimación y la desublimación, tienen una gran aplicación en procesos de separación, tecnología alimenticia, migración de calor y mezclas en suelos y terrenos, etc. Debido a la no-linealidad del problema, las resoluciones usualmente involucran dificultades matemáticas. Sólo unas pocas soluciones exactas han sido halladas para casos ideales (Lamé y Clapeyron, 1831; Carslaw y Jaeger, 1959; Mikhailov, 1975, 1976; Tarzia, 1982).

La formulación matemática de la transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos ha sido establecida por Luikov (1966). Para resolver el problema de evaporación de humedad líquida de un medio poroso, Mikhailov (1975) presentó dos modelos diferentes. Además, Mikhailov (1976) presentó una solución exacta para el problema de congelamiento (desublimación) de un semi-espacio húmedo poroso. Lin (1982) presentó una solución exacta del problema de desublimación en un medio poroso con una condición de temperatura sobre el borde fijo. Otros problemas en esta dirección fueron dados por Fasano et al. (1993, 1999); Santillan Marcus y Tarzia (2000). Una extensa bibliografía en el tema fue dada por Tarzia (1999).

En lo que sigue, será estudiado un proceso de desublimación en un medio poroso con una condición de flujo de calor en x = 0 del tipo $q_0/\sqrt{t}$ con $q_0>0$. Se define un modelo analítico del proceso y se obtendrán soluciones exactas para las distribuciones de humedad y temperatura acopladas, como también para la posición de la frontera libre de desublimación que separa las fases congelada y de vapor húmedo. Se demostrará que una desigualdad para el coeficiente q_0 será necesaria y suficiente para obtener esa solución explícita. Finalmente, se obtendrá una equivalencia entre dicho problema y un problema de cambio de fase con condición de temperatura constante en el borde de fijo $x=0$. Mas aún, para este último problema se obtendrá además una desigualdad para el coeficiente que caracteriza la frontera móvil de desublimación.

Este artículo generaliza los resultados obtenidos para la distribución de temperatura en el problema de cambio de fase sólido-líquido realizado por Tarzia (1982), para el problema de desublimación en un semi-espacio poroso húmedo con un flujo de calor en el borde fijo (con distribuciones de temperatura y humedad acopladas).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA P

Se considera un semi-espacio sólido, rígido, poroso que contiene una mezcla uniforme de aire y humedad en forma de vapor. Inicialmente el cuerpo poroso está a una concentración de humedad uniforme C_{ini} y a una temperatura uniforme T_{ini}. El vapor es desublimado mediante el mantenimiento de una condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{t}$ en la superficie en x = 0. Para la formulación del problema, se harán las mismas suposiciones que Lin (1982) hizo en su trabajo:

(1) Sobre la región congelada, 0 < x < s(t), no hay movimiento de humedad, donde s = s(t) es el frente de desublimación móvil. Sobre la región de vapor, s(t) < x < ∞ , hay flujos de masa de humedad y calor.
(2) Los términos convectivos en la región de vapor son pequeños y pueden ser despreciados.
(3) Las propiedades termofísicas de las regiones congelada y de vapor permanecen respectivamente constantes.
(4) El efecto Soret, o la difusión termal, hace aparecer un flujo de masa que es normalmente muy pequeño con respecto al flujo Fickiano normal, y puede también ser despreciado.

Las siguientes ecuaciones diferenciales describen el proceso de desublimación:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=a_1\frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<s(t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}=a_2\frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2},\quad s(t)<x<\infty \qquad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=a_m\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2},\quad s(t)<x<\infty \qquad (3)$$

donde a_1, T_1 y a_2, T_2 son las difusividades termales por volumen promedio y las temperaturas en las regiones congeladas y de vapor, respectivamente, y a_m es la difusividad de masa del vapor por volumen promedio en el cuerpo poroso. C es la concentración de humedad de la fase vapor.

Las condiciones iniciales y de borde pueden describirse como sigue:

$$T_2(x,0) = T_{ini}\,;\ C(x,0) = C_{ini}, 0 < x < \infty \,, \tag{4}$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0\,, \tag{5}$$

$$T_1(s(t),t) = T_2(s(t),t) = T_s, t > 0\,,\ s(0) = 0\,, \tag{6}$$

$$C(s(t),t) = C_s < C_{ini}, \quad t > 0 \tag{7}$$

$$T_2(+\infty,t) = T_{ini} > T_s\,,\ C(+\infty,t) = C_{ini}, \quad t > 0\,. \tag{8}$$

El balance de calor y masa de humedad en el frente de desublimación $x = s(t)$ puede expresarse como:

$$k_1 \frac{\partial T_1(s,t)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = C_0 L \dot{s}(t), \tag{9}$$

$$a_m \frac{\partial C(s,t)}{\partial x} = (C_0 - C_s)\dot{s}(t) \tag{10}$$

donde k_1 y k_2 son las conductividades termales por volumen promedio en las regiones congeladas y de vapor, respectivamente, L es el calor latente de desublimación, C_s es la concentración de humedad de la fase de vapor en el frente de desublimación y $C_0 (C_0 > C_s)$ es la concentración de humedad de la fase congelada, que es desconocida y debe ser determinada como parte de la solución. La condición de flujo de calor (5) fue considerada por primera vez por Tarzia (1982) para un problema de cambio de fase sólido-líquido.

SOLUCION DEL PROBLEMA P

Utilizando el método de similaridad para obtener la distribución de temperatura, como fue demostrado por Tarzia (1982), las temperaturas T_1 y T_2, la concentración C y la frontera libre s vienen dadas por:

$$T_1(x,t) = T_s + \frac{q_0\sqrt{\pi a_1}}{k_1}\left(erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) - erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\lambda\right)\right) \tag{11}$$

$$T_2(x,t) = T_{ini} - \frac{T_{ini} - T_s}{erfc\lambda}\, erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) \tag{12}$$

$$C(x,t) = C_{ini} - \frac{C_{ini} - C_s}{erfc\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_m}}\lambda\right)}\, erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_m t}}\right) \tag{13}$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{a_2 t} \tag{14}$$

donde $erf(x)$ es la función error y $erfc(x) = 1 - erf(x)$ es la función error complementaria, con λ la constante adimensional que caracteriza al frente de desublimación (14) a ser determinada conjuntamente con la incógnita C_0.

De (10) se obtiene la relación:

$$C_0 = C_s + \sqrt{\frac{a_m}{a_2}}\left(\frac{C_{ini} - C_s}{\sqrt{\pi}\,\lambda}\right) F_1\left(\sqrt{\frac{a_m}{a_2}}\lambda\right) \tag{15}$$

donde $F_1(x) = \exp\left(-x^2\right)/\,erfc(x)$.

Luego, de (11)-(14) junto a la condición (9), se obtiene una ecuación para la determinación de λ, la cual está dada por la siguiente ecuación:

$$\Psi(x) = \Phi(x), x > 0 \tag{16}$$

donde las funciones reales $\Psi(x)$ y $\Phi(x)$ están definidas de la siguiente manera ($x > 0$):

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= q_0 \exp\left(-a_2 x^2 / a_1\right) + \\ &- k_2 (T_{ini} - T_s) F_1(x) / \sqrt{\pi a_2} + \\ &- \left(\sqrt{a_m / \pi}\right)(C_{ini} - C_s) L F_1\left(x\sqrt{a_2 / a_m}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\Phi(x) = C_s L \sqrt{a_2}\, x\,. \tag{18}$$

La función $\Psi(x)$ es estrictamente decreciente, con las siguientes condiciones límites:

$$\begin{aligned}&\Psi(0) = q_0 - k_2\left((T_{ini} - T_s) / \sqrt{\pi a_2}\right) + \\ &-(C_{ini} - C_s) L \sqrt{a_m / \pi}; \quad \Psi(+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

Más aún, $\Phi(x)$ es una función estrictamente creciente, con las condiciones límites: $\Phi(0) = 0$; $\Phi(+\infty) = +\infty$

Entonces, se puede enunciar el siguiente:

Teorema. Si el coeficiente q_0 verifica la condición

$$q_0 > k_2\left((T_{ini} - T_s) / \sqrt{\pi a_2}\right) + (C_{ini} - C_s) L \sqrt{a_m / \pi} \quad (19)$$

entonces existe una y sólo una solución $\lambda > 0$ de la ecuación (16). En dicho caso, la solución del problema P está dada por (11)-(15) en función del parámetro λ que viene dado por la única solución de la ecuación (16).

Si por lo contrario se tiene que:

$$q_0 \le k_2\left((T_{ini} - T_s) / \sqrt{\pi a_2}\right) + (C_{ini} - C_s) L \sqrt{a_m / \pi},$$

entonces no hay solución del problema P como un problema de cambio de fase; es sólo un problema de conducción de calor para la fase inicial.

Demostración. Es necesario y suficiente tener $\Psi(0) > \Phi(0)$, que resulta ser equivalente a la inecuación (19).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA P^*

Ahora bien, si se reemplaza la condición de flujo de calor (5) por una condición de borde de temperatura constante en el borde fijo x = 0 tal como:

$$T_1(0,t) = T_0 \quad (20)$$

con $T_O < T_S$, entonces se puede considerar el problema P^* dado por las condiciones (1)-(4),(20), (6)-(10), que fue previamente estudiado (Lin, 1982). Su solución viene dada por:

$$T_1^*(x,t) = T_0 + (T_m - T_0) \frac{erf\left(x / 2\sqrt{a_1 t}\right)}{erf\left(\lambda^* \sqrt{a_2 / a_1}\right)}, \quad (21)$$

$$para \quad 0 < x < s^*(t) \quad ;$$

$$T_2^*(x,t) = T_{ini} - \frac{T_{ini} - T_s}{erfc(\lambda^*)} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right), \quad (22)$$

$$para \quad x > s^*(t) \quad ;$$

$$C^*(x,t) = C_{ini} - \frac{C_{ini} - C_s}{erfc\left(\lambda^* \sqrt{a_2 / a_m}\right)} erfc\left(x / 2\sqrt{a_2 t}\right) \quad (23)$$

$$para \quad x > s^*(t) \quad ;$$

$$s^*(t) = 2\lambda^* \sqrt{a_2 t} \quad (24)$$

donde λ^* satisface la siguiente ecuación:

$$\Theta(x) = \Psi(x), x > 0 \quad (25)$$

donde $\Phi(x)$ está dada por (18), $F_2(x) = = \exp(-x^2) / erf(x)$ y Θ es la función real definida por:

$$\begin{aligned} \Theta(x) = &\left(k_1 (T_s - T_0) / \sqrt{\pi a_1}\right) F_2\left(\sqrt{a_2 / a_1}\, x\right) + \\ &- k_2 (T_{ini} - T_s) F_1(x) / \sqrt{\pi a_2} + \\ &- L (C_{ini} - C_s) \sqrt{a_m / \pi}\, F_1\left(x \sqrt{a_2 / a_m}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

que resulta ser una función estrictamente decreciente, con las siguientes propiedades:

$$\Theta(0^+) = +\infty; \ \Theta(+\infty) = -\infty; \ \Theta'(x) < 0, \quad x > 0.$$

Por lo tanto, existe una y sólo una solución λ^* de la ecuación (25).

RELACION ENTRE LOS PROBLEMAS P y P*

Ahora se analiza nuevamente el problema inicial P con condición de flujo de calor, considerando el caso: $q_0 > k_2\left((T_{ini} - T_s) / \sqrt{\pi a_2}\right) + (C_{ini} - C_s) L \sqrt{a_m / \pi}$. Evaluando (11) en $x = 0$, se tiene:

$$T_1(0,t) = T_s - q_0 \sqrt{\pi a_1}\, erf\left(\lambda \sqrt{a_2 / a_1}\right) / k_1. \quad (27)$$

Luego, como $T_1(0,t)$ es constante en el tiempo y menor que T_s, se puede considerar el problema P^* tomando

$$T_0 = T_s - q_0 \sqrt{\pi a_1}\, erf\left(\lambda \sqrt{a_2 / a_1}\right) / k_1, \quad (28)$$

el cual resulta ser menor que T_s.

La solución del problema P^* con dato T_0 en $x = 0$ viene dada por (21)-(24) donde λ^* es la única solución de la ecuación (25). A continuación se demostrará que $\lambda^* = \lambda$; para esto se debe probar que λ^* es también solución de la ecuación (16). A tal efecto se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda^*) = \Theta(\lambda^*) = &-\left(k_2 (T_{ini} - T_s) F_1(\lambda^*) / \sqrt{\pi a_2}\right) + \\ &+ k_1 (T_s - (T_s - (q_0 \sqrt{\pi a_1} / k_1) erf(\lambda^* \sqrt{a_2 / a_1})). \\ &.F_2(\lambda^* \sqrt{a_2 / a_1}) / \sqrt{\pi a_2} + \\ &- L (C_{ini} - C_s) \sqrt{a_m / \pi}\, F_1(\lambda^* \sqrt{a_2 / a_1}) = \Psi(\lambda^*) \end{aligned}$$

vale decir que λ^* es una solución de la ecuación (16) que tiene una única solución λ, con lo cual se deduce que $\lambda^* = \lambda$. Por lo tanto se obtiene que la solución del problema P^* es la misma que la del problema inicial P, es decir: $T_1 = T_1^*$; $T_2 = T_2^*$; $C = C^*$; $s = s^*$.

De esta forma se demostró y por ende se puede enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad. Un problema de cambio de fase para distribuciones de temperatura y humedad en un semi-espacio poroso con condición de flujo de calor del tipo (5) sobre la superficie x = 0 que verifica la condición (19), es equivalente al correspondiente problema de cambio de fase en el cual la condición de temperatura en el borde fijo $x = 0$ está dada por

$$T_0 = T_1(0,t) = T_s - \frac{q_0\sqrt{\pi a_1}}{k_1}\, erf\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,\lambda\right) \qquad (29)$$

Como consecuencia de esta propiedad, se puede traducir la desigualdad (19) para q_0 para el problema P en una desigualdad para λ para el correspondiente problema equivalente P^*, o sea

$$\begin{aligned} & erf\left(\lambda^*\sqrt{a_2/a_1}\right) = (T_s - T_0)\,k_1/q_0\sqrt{\pi a_1} < \\ & < (T_s - T_0)(k_1/\sqrt{a_1})/(((T_{ini} - T_s)\,k_2/\sqrt{a_2}) + \\ & + L\,(C_{ini} - C_s)\sqrt{a_m}). \end{aligned}$$

Esta última desigualdad es válida para el problema P^*, y tiene sentido físico cuando el lado derecho de la desigualdad es menor que uno, es decir:

Corolario. Cuando los datos para el problema P^* verifican la desigualdad

$$\frac{k_1(T_s - T_0)/\sqrt{a_1}}{(T_{ini} - T_s)(k_2/\sqrt{a_2}) + (C_{ini} - C_s)L\sqrt{a_m}} < 1 \qquad (30)$$

entonces el coeficiente λ^* de la frontera libre $s^*(t) = 2\lambda^*\sqrt{a_2 t}$ satisface la desigualdad

$$\lambda^* < \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\, erf^{-1}\left(\frac{(T_s - T_0)\dfrac{k_1}{\sqrt{a_1}}}{\dfrac{(T_{ini} - T_s)k_2}{\sqrt{a_2}} + (C_{ini} - C_s)L\sqrt{a_m}}\right) \qquad (31)$$

Observación: Cuando la humedad del medio poroso es constante y se considera solamente un problema de transferencia de calor (se puede suponer que $C_{ini} = C_s$) entonces la desigualdad (19) para q_0 se transforma en $q_0 > k_2(T_{ini} - T_s)/\sqrt{\pi a_2}$, que fue obtenida por Tarzia (1982).

ALGUNOS RESULTADOS ILUSTRATIVOS

Se exponen aquí algunas experiencias numéricas para ilustrar los resultados teóricos obtenidos anteriormente. Para efectuar estas gráficas se ha adimensionalizado el problema, considerando:

$$T_i^A = \frac{T_i - T_s}{T_{ini} - T_s}, \quad i = 1, 2 \ ; \ q_0^A = \frac{q_0\sqrt{\pi a_1}}{k_1(T_{ini} - T_s)}$$

y se obtiene entonces que:

$$T_1^A = q_0^A\left(erf\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - erf(\lambda)\right)$$

$$T_2^A = 1 - erfc\left(x/2\sqrt{a_2 t}\right)/\,erfc(\lambda)$$

Además, para estos ejemplos se considera que

$a_{21} = 1$, $T_{ini} - T_s = 1$, $a_1 = 0{,}5$, $k_1 = 0{,}4$,
$C_{ini} = \left(1 + \sqrt{\pi}\right)/2 \cong 1{,}386$, $C_s = 0{,}5$

en las respectivas unidades.

En la figura 1 se muestra el comportamiento del coeficiente adimensional que caracteriza la frontera libre, λ, con respecto a q_0^A, resultando ser una función creciente. En la figura 2 se estudia el comportamiento de la temperatura con respecto a la variable adimensional $x/2\sqrt{a_2 t}$ variando los valores de q_0^A. Los valores de los parámetros considerados pueden apreciarse en la respectiva figura 2.

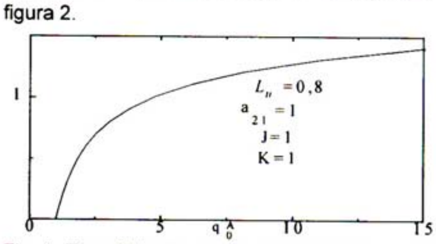

Fig. 1: El coeficiente que caracteriza la frontera libre, λ, en función de q_0^A.

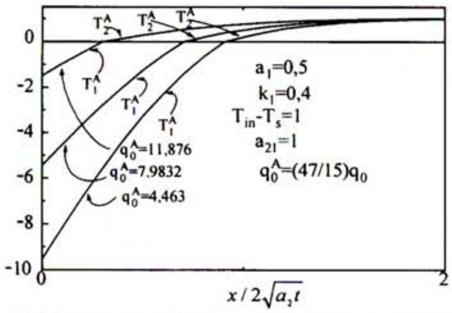

Fig. 2: Comportamiento de la temperatura con respecto a la variable adimensional $x / 2\sqrt{a_2 t}$ variando los valores de q_0^A.

CONCLUSIONES

Se han obtenido soluciones exactas para las distribuciones de temperatura y humedad en un semi-espacio poroso con condición de flujo de calor en $x = 0$ del tipo $q_0 / \sqrt{t}$ en un problema de desublimación. Una desigualdad para el coeficiente q_0 es necesaria y suficiente para obtener dicha solución explícita de tipo semejanza. Luego, se introduce el problema P^*, que es el problema P cambiándole la condición (5) de flujo de calor por una condición de temperatura (20) en el borde fijo x = 0.

Finalmente se establece una equivalencia entre ambos problemas y se halla una desigualdad que el coeficiente que caracteriza la frontera libre debe satisfacer en el problema P*.

AGRADECIMIENTOS

Este artículo ha sido parcialmente subsidiado por el proyecto # 4798/96 Problemas de Frontera Libre para la Ecuación del Calor-Difusión Unidimensional de CONICET - UA, Rosario (Argentina)

REFERENCIAS

Carslaw, H. S. y J.C. Jaeger, Conduction of heat in solids, Clarendon Press, Oxford (1959).

Fasano, A.; Guan, Z.; Primicerio, M. y I. Rubinstein, Thawing in saturated porous media, Meccanica: 28, 103-109 (1993).

Fasano, A.; Primicerio, M. y D.A. Tarzia, Similarity solutions in class of thawing processes, Math. Models Methods Appl. Sci.: (9), 1-10 (1999).

Lamé, G. y B.P. Clapeyron, Memoire sur la soldification par refroidissement dun globe liquide, Annales Chimie Physique: 47, 250-256 (1831).

Lin, S., An exact solution of the desublimation problem in a porous medium, Int. J. Heat y Mass Transfer: 25 (5), 625-630 (1982).

Luikov, A.V., Heat and mass transfer in capillary-porous bodies, Pergamon Press, Oxford (1966).

Lunardini, V.J., Heat transfer with freezing and thawing, Elsevier, Amsterdam (1991).

Mikhailov, M.D., Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front, Int. J. Heat Mass Transfer: 18, 797-804 (1975).

Mikhailov, M.D., Exact solution for freezing of humid porous half-space, Int. J. Heat Mass Transfer: 19, 651-655 (1976).

Santillan Marcus, E. A. y D.A. Tarzia, Explicit solution for freezing of humid porous half-space with a heat flux condition, Int. J. Eng. Sci.: 38 (2000), to appear.

Tarzia, D.A., An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem, Quart. Appl. Math.: 39, 491-497 (1982).

Tarzia, D.A., A bibliography on moving free-boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem (con 5869 referencias), Univ. Austral, Rosario (1999).