Serie A

MAT

Conferencias, seminarios
y trabajos de Matemática

ISSN:1515-4904

10

Segundas Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico

Domingo A. Tarzia
Cristina V. Turner (Eds.)

Departamento de Matemática,
Rosario,
Argentina

Diciembre 2005

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

ISSN 1515-4904

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 10

SEGUNDAS JORNADAS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES, OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Domingo A. Tarzia – Cristina V. Turner (Eds.)

INDICE

Rosario, Diciembre 2005

Un caso de determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material semiinfinito poroso a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad. *

Eduardo A. SANTILLAN MARCUS [(1)] - Domingo A. TARZIA [(1)(2)]

[(1)]Depto de Matemática, F.C.E.,Universidad Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA
[(2)] CONICET, ARGENTINA
E-mail: Eduardo.Santillan@fce.austral.edu.ar;
Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Resumen

Se considera un modelo de flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante congelamiento, con sobrecondición de temperatura y de flujo de calor en el borde fijo para la determinación de un coeficiente desconocido del material semi-infinito de cambio de fase. Se trata de un problema de frontera libre con acoplamiento de las funciones temperatura y concentración (ecuaciones de tipo Luikov) con ocho parámetros. Para uno de los casos de determinación posibles, se hallan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución y las fórmulas correspondientes para las temperaturas y concentraciones de ambas fases, la frontera libre y el coeficiente desconocido.

1. Introducción.

Los problemas de transferencia de calor y masa con cambio de fase que se llevan a cabo en un medio poroso, tales como evaporación, condensación, congelamiento, derretimiento, sublimación y desublimación, tienen una gran aplicación en procesos de separación, tecnología de alimentos, migración de calor en terrenos y suelos, etc. Debido a que este tipo de problemas es no lineal, el resolverlos usualmente tiene dificultades matemáticas. Sólo se han encontrado unas pocas soluciones exactas para casos ideales (ver [1],[2],[3],[4],[6],[7],[14] por ejemplo). Una extensa bibliografía sobre problemas de frontera libre y móvil para la ecuación de calor-difusión está dada en [15].

La formulación matemática de la transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos fue establecida por Luikov ([8],[9],). Mikhailov [10] presentó dos modelos diferentes para resolver el problema de la evaporación de humedad líquida desde un medio poroso. Para el problema del congelamiento (desublimación) de un semiespacio poroso

*MAT - Serie A, 10 (2005), 17-22.

húmedo, Mikhailov también presentó una solución exacta [11] para una condición de temperatura constante en el borde fijo $x = 0$. En el trabajo [12] fue presentada una solución explícita para las distribuciones de temperatura y humedad en un semiespacio poroso con una condición de flujo de calor en el borde fijo $x = 0$ del tipo $\frac{q_0}{\sqrt{t}}$.

Ahora se considerará el modelo presentado en [11]-[12] con una sobrecondición en el borde fijo para hallar condiciones necesarias y suficientes sobre los datos para la determinación de un coeficiente desconocido siguiendo la idea de [16] para una fase y de [5] para dos fases.

Se considera el flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante el congelamiento. La posición del frente de cambio de fase al tiempo t está dada por $x = s(t)$ que divide al cuerpo poroso en dos regiones. En la región congelada, $0 < x < s(t)$, no hay movimiento de humedad y la distribución de temperatura está descripta por la ecuación del calor

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x,t) = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0, \qquad a_1 = \frac{k_1}{\rho c_1}. \tag{1}$$

La región $s(t) < x < +\infty$ es la parte húmeda del cuerpo de capilares porosos en donde fluyen acoplados el calor y la humedad. El proceso está descripto por el ya conocido sistema de Luikov [9] para el caso $\varepsilon = 0$ (ε es el factor de conversión de fase de líquido en vapor) dado por

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x,t) = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x,t), \qquad x > s(t),\ t > 0, \qquad a_2 = \frac{k_2}{\rho c_2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x > s(t),\ t > 0. \tag{3}$$

Las distribuciones iniciales de temperatura y humedad son uniformes

$$\begin{cases} T_2(x,0) = T_2(+\infty,t) = t_0, \\ u(x,0) = u(+\infty,t) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

Se supone que sobre la superficie del semiespacio el flujo de calor depende del tiempo de la siguiente manera, como en [13]

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} \tag{5}$$

donde $q_0 > 0$ es un coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$. Sobre el frente de congelamiento, existe una igualdad entre las temperaturas

$$T_1(s(t),t) = T_2(s(t),t) = t_v, \qquad t > 0, \tag{6}$$

donde $t_v < t_0$.

El balance de calor y humedad en el frente de congelamiento da lo siguiente

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t),t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t),t) = \rho\ r\ u(s(t),t) \frac{ds}{dt}(t), \qquad t > 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t),t) + \delta \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t),t) = 0, \qquad t > 0. \tag{8}$$

Se considera además una sobre condición en el borde fijo $x = 0$ dada por

$$T_1(0,t) = t_s \tag{9}$$

donde $t_s < t_v$.

Se tratará de hallar fórmulas para la determinación de un coeficiente térmico desconocido elegido entre ρ (densidad de masa), a_m (difusividad de la humedad), c_1 (calor específico de la región congelada), c_2 (calor específico de la región húmeda), k_1 (conductividad térmica de la región congelada), k_2 (conductividad térmica de la región húmeda), δ (coeficiente de gradiente térmico), r (calor latente) junto a la frontera libre $s(t)$, las temperaturas T_1, T_2 y la humedad u.

Siguiendo [12], se tiene que

$$T_1(x,t) = t_v - \frac{\sqrt{\pi a_1} q_0}{k_1}\left[-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a_{12}}}\right)\right],\ 0 < x < s(t),\ t > 0 \tag{10}$$

$$T_2(x,t) = t_v + \frac{t_0 - t_v}{1 - \operatorname{erf}(\lambda)}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - \operatorname{erf}(\lambda)\right],\ x > s(t),\ t > 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 - \frac{\delta\rho c_2 a_m (t_0 - t_v)}{k_2\left(1 - \frac{\rho a_m c_2}{k_2}\right)}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - \frac{\exp\left(\left(\frac{k_2}{\rho a_m c_2} - 1\right)\lambda^2\right)}{\sqrt{\frac{\rho a_m c_2}{k_2}}}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_m t}}\right)\right)\right], \\ x &> s(t),\ t > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{a_2 t}. \tag{13}$$

donde el parámetro λ (que caracteriza la frontera libre) y el coeficiente térmico desconocido deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones trascendentales:

$$\frac{\sqrt{\pi} q_0}{\sqrt{k_2 c_2 \rho}\,(t_0 - t_v)} \exp\left(-\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}\lambda^2\right) - F_1(\lambda) = \tag{14}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} r\, u_0}{c_2(t_0 - t_v)}\lambda\left[1 - \frac{\delta(t_0 - t_v)}{u_0\left(\frac{k_2}{a_m \rho c_2} - 1\right)}\left(1 - \frac{Q\left(\frac{\sqrt{k_2}\lambda}{\sqrt{a_m \rho c_2}}\right)}{Q(\lambda)}\right)\right]$$

$$\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}}\right) = \frac{t_v - t_s}{q_0}\sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}}. \tag{15}$$

donde

$$F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{erfc(x)}, \qquad Q(x) = \sqrt{\pi} x \exp\left(x^2\right) erfc(x).$$

De los ocho casos posibles en la presente comunicación sólo se considerará el caso de la determinación de $\{\lambda, \delta\}$.

Primero se tiene el siguiente lema:

Lema 1: Se tiene que

$$E(x) = \frac{m^2 - 1}{1 - \frac{Q(mx)}{Q(x)}} < 0, \qquad \forall x > 0,\ \forall m > 0,\ m \neq 1.$$

Demostración: La función Q tiene las siguientes propiedades

$$Q(0) = 0, \qquad Q(+\infty) = 1, \qquad Q'(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Entonces si se considera que $m > 1$, entonces se tiene que $m^2 - 1 > 0$ y $\dfrac{Q(mx)}{Q(x)} > 1$, con lo que surge $E(x) < 0$.

Si en cambio se contempla el caso $0 < m < 1$, surge que $m^2 - 1 < 0$ y $\dfrac{Q(mx)}{Q(x)} < 1$, con lo que también resulta $E(x) < 0$.■

Entonces se tiene el siguiente resultado para la determinación del caso $\{\lambda, \delta\}$:

Teorema 2: Si

$$\max\left(\frac{(t_v - t_s)\sqrt{\dfrac{\rho k_1 c_1}{\pi}}}{q_0 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\dfrac{k_2 c_1}{k_1 c_2}}\lambda^*\right)} ; \frac{(t_0 - t_v)}{q_0}\sqrt{\frac{\rho k_2 c_2}{\pi}} \right) < 1, \tag{16}$$

donde $\lambda^* > 0$ es la única solución de la ecuación

$$g_1(x) = g_2(x), \qquad x > 0 \tag{17}$$

con

$$\begin{cases} g_1(x) = F_1(x) + \dfrac{u_0 r\sqrt{\pi}}{c_2(t_0 - t_v)}x, \\ g_2(x) = \dfrac{q_0}{t_0 - t_v}\sqrt{\dfrac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}x^2}, \end{cases} \tag{18}$$

entonces $\exists! \lambda > 0$, $\delta > 0$ dados por las expresiones

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_1 c_2}{k_2 c_1}} \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{t_v - t_s}{q_0}\sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}} \right) \tag{19}$$

$$\delta = \frac{u_0}{t_0 - t_v} \frac{\dfrac{k_2}{\rho a_m c_2} - 1}{1 - \dfrac{Q\left(\lambda\sqrt{\dfrac{k_2}{\rho a_m c_2}}\right)}{Q(\lambda)}} \left\{ 1 - \frac{c_2(t_0 - t_v)}{\lambda r u_0 \sqrt{\pi}} \left(\frac{q_0}{t_0 - t_v}\sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{\lambda^2 k_2 c_1}{k_1 c_2}} - F_1(\lambda) \right) \right\}. \tag{20}$$

Demostración: Considerando que de (16) se tiene

$$\frac{t_v - t_s}{q_0}\sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}} < 1 \tag{21}$$

surge trivialmente que existe un único $\lambda > 0$ solución de la ecuación (15) en la forma (19). Luego, sustituyendo λ en (14) y despejando δ se obtiene (20). Resta aún mostrar que $\delta > 0$.

Primero se observa que gracias al Lema 1, para tener $\delta > 0$ basta imponer que

$$1 - \frac{c_2 (t_0 - t_v)}{\lambda r u_0 \sqrt{\pi}} \left(\frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{\lambda^2 k_2 c_1}{k_1 c_2}} - F_1 (\lambda) \right) < 0$$

es decir que

$$F_1 (\lambda) + \frac{r u_0 \sqrt{\pi}}{c_2 (t_0 - t_v)} \lambda < \frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{\lambda^2 k_2 c_1}{k_1 c_2}}$$

lo que de acuerdo a las definiciones (18) se puede escribir como

$$g_1 (\lambda) < g_2 (\lambda) . \tag{22}$$

Como las funciones g_1 y g_2 tienen las siguientes características:

$$g_1 \left(0^+\right) = 1, \qquad g_1 (+\infty) = +\infty, \qquad g_1' (x) > 0, \quad \forall x > 0.$$

$$g_2 \left(0^+\right) = \frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}}, \qquad g_2 (+\infty) = 0, \qquad g_2' (x) < 0, \quad \forall x > 0.$$

se puede concluir que cuando

$$\frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} > 1, \tag{23}$$

existirá un único $\lambda^* > 0$ tal que $g_1 (\lambda^*) = g_2 (\lambda^*)$. Entonces surge que (22) es válida cuando

$$0 < \lambda < \lambda^*. \tag{24}$$

Para finalizar se observa que las hipótesis necesarias (21), (23) y (24) se pueden resumir de la manera siguiente: Como la función erf es creciente, (24) es equivalente a

$$\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda \right) < \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda^* \right),$$

y entonces (21) y (24) se pueden resumir en

$$\frac{t_v - t_s}{q_0} \sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}} < \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda^* \right). \tag{25}$$

Así pues, por (24) y (25) se tiene que

$$q_0 > \frac{(t_v - t_s) \sqrt{\dfrac{\rho k_1 c_1}{\pi}}}{\operatorname{erf} \left(\sqrt{\dfrac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda^* \right)}, \qquad q_0 > (t_0 - t_v) \sqrt{\frac{\rho k_2 c_2}{\pi}},$$

lo que puede resumirse en (16) .■

Los siete casos restantes serán considerados en un futuro trabajo que se encuentra en etapa de preparación.

References

[1] Cho, S. H., *"An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium"*, Int. J. Heat and Mass Transfer **18**, 1139-1142 (1975).

[2] Cho, S. H. - Sunderland, J. E., *"Heat conduction problem with melting or freezing"*, J. Heat. Transfer **91**, 421-426 (1969).

[3] Fasano, A. - Guan, Z. - Primicerio, M. - Rubinstein, I., *"Thawing in saturated porous media"*, Meccanica, **28**, 103-109 (1993).

[4] Fasano, A. - Primicerio, M. - Tarzia, D. A., *"Similarity solutions in class of thawing processes"*, Math. Models Methods Appl. **9**, 1-10 (1999).

[5] Gonzalez, A. M. - Tarzia, D. A., *"Determination of unknown coefficients of a semi-infinite material through a simple mushy zone model for the two phase Stefan problem"*, Int. J. Engng. Sci. **34** N° 7, 799-817 (1996).

[6] Gupta, L. N., *"An approximate solution to the generalized Stefan's problem in a porous medium"*, Int. J. Heat Transfer **17**, 313-321 (1974).

[7] Lombardi, A. - Tarzia, D. A., *"Similarity solutions for thawing processes with a heat flux condition at the fixed boundary"*, Meccanica, 36 (2001), 251-264.

[8] Luikov, A. V., *"Heat and mass transfer in capillary-porous bodies"*, Pergamon Press, Oxford (1966).

[9] Luikov, A. V., *"Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies"*, Int. J. Heat Mass Transfer **18**, 1-14 (1975).

[10] Mikhailov, M. D., *"Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front"*, Int. J. Heat Mass Transfer **18**, 797-804 (1975).

[11] Mikhailov, M. D., *"Exact solution for freezing of humid porous half-space"*, Int. J. Heat Mass Transfer **19**, 651-655 (1976).

[12] Santillan Marcus, E. A. - Tarzia, D. A., *"Explicit solution for freezing of humid porous half-space with a heat flux condition"*, Int. J. Eng. Science **38,** 1651-1665 (2000).

[13] Tarzia, D. A., *"An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem"*, Quart. Appl. Math. **39**, 491-497 (1981).

[14] Tarzia, D. A., *"Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional"*, Cuadern. Inst. Mat. B. Levi **12**, 5-36 (1985).

[15] Tarzia, D. A., *"A bibliography on moving - free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems"*, MAT-Serie A #2 (2000) (con 5869 títulos en el tema, 300 páginas). Ver www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000).

[16] Tarzia, D. A., *"Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)"*, Adv Appl. Math. **3**, 74-82 (1982).