

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE COEFICIENTES TÉRMICOS EN UN PROBLEMA DE CAMBIO DE FASE CON COEFICIENTE DE CONDUCCIÓN DE CALOR LINEAL

Natalia N. Salva†‡, Domingo A. Tarzia †‡

† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.

‡ CONICET, Argentina.

Resumen: El trabajo consiste en el análisis de sensibilidad de la determinación simultánea de coeficientes térmicos de un material de cambio de fase con conductividad térmica lineal con respecto a la temperatura y con una sobrecondición sobre la frontera fija.

Palabras claves: *Problema de Stefan, determinación de coeficientes térmicos, cambio de fase, análisis numérico, análisis de sensibilidad.*

2000 AMS Subjects Classification: 35R35, 65L08, 80A22

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de frontera libre han sido estudiados en las últimas décadas debido a su amplia aplicación científica y tecnológica. Una amplia bibliografía en problemas de frontera libre y móvil está presentada en [11].

Se considera el siguiente problema de solidificación de un material semi-infinito con una sobrecondición en la frontera fija $x=0$ [1, 2, 3, 5]:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho c T_t(x,t) = (k(T) T_x(x,t))_x, & 0 < x < s(t), \quad t > 0 \\ T(0,t) = T_o < T_f, & t > 0 \\ k(T_o) T_x(0,t) = \frac{q_o}{\sqrt{t}}, & t > 0, \quad q_o > 0 \\ T(s(t),t) = T_f, & t > 0 \\ k(T_f) T_x(s(t),t) = \rho h \dot{s}(t), & t > 0 \end{cases}$$

donde $T(x,t)$ es la temperatura de la fase sólida, $\rho > 0$ es la densidad de masa, $h > 0$ es el calor latente de fusión por unidad de masa, $c > 0$ es el calor específico, $x=s(t)$ es la frontera de cambio de fase, T_f es la temperatura de fusión, T_o es la temperatura en la frontera fija $x=0$ y q_o es el coeficiente que caracteriza el flujo de calor en $x=0$. Se supone que la conductividad térmica del material es de la siguiente forma [4]:

$$k = k(T) = k_o [1 + \beta(T - T_o) / (T_f - T_o)] \quad , \quad \beta \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Sea $\alpha_o = k_o / \rho c$ el coeficiente de difusividad para la temperatura T_o . Se puede observar que si $\beta=0$, el problema se convierte en el clásico problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a una fase con una sobrecondición en $x=0$; en este caso, la determinación simultánea de coeficientes térmicos fue realizada en [8, 9]. El proceso de cambio de fase con conductividad térmica dependiente de la temperatura fue inicialmente estudiado por [4]. Otros trabajos sobre determinación de coeficientes térmicos son [6, 7, 12, 13].

La solución del problema (1) viene dada por [4, 10]:

$$(3) \quad \begin{cases} T(x,t) = T_o + \frac{(T_f - T_o)}{\Phi_\delta(\lambda)} \Phi_\delta(\eta) \quad , \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_o t}} \quad , \quad 0 < \eta < \lambda \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_o t} \end{cases}$$

donde la función de error modificada $\Phi_\delta = \Phi_\delta(x)$ es la única solución del siguiente problema diferencial ordinario:

$$(4) \quad \begin{cases} [(1 + \delta y(x)) y'(x)]' + 2xy'(x) = 0 \quad , \quad x > 0, \quad \delta > -1 \\ y(0^+) = 0 \\ y(+\infty) = 1 \end{cases}$$

y los coeficientes térmicos desconocidos deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\beta - \delta \Phi_{\delta}(\lambda) = 0 \quad (5)$$

$$[1 + \delta \Phi_{\delta}(\lambda)] \frac{\Phi_{\delta}'(\lambda)}{\lambda \Phi_{\delta}(\lambda)} - \frac{2h}{c(T_f - T_o)} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\Phi_{\delta}'(0)}{\Phi_{\delta}(\lambda)} - \frac{2q_o}{(T_f - T_o)\sqrt{k_o \rho c}} = 0 \quad (7)$$

En [10] fue analizado el problema (1) con el coeficiente δ conocido, hallándose las condiciones necesarias y/o suficientes sobre los datos para la determinación simultánea de los coeficientes térmicos desconocidos del material (elegidos entre: densidad, calor latente, calor específico) a través de 10 casos diferentes.

El objetivo de este trabajo es suponer que el parámetro δ es una incógnita más, y por ende el problema de frontera libre (1) consiste en determinar el coeficiente δ , el coeficiente λ que caracteriza la frontera libre $x=s(t)$ y un coeficiente térmico, del material de cambio de fase, elegido entre: β , k_o , ρ , c , h . Se plantea determinar numéricamente los siguientes parámetros en los 5 casos de frontera libre:

FL: i) δ, λ, β ii) δ, λ, k_o iii) δ, λ, ρ iv) δ, λ, h v) δ, λ, c .

2. MÉTODO NUMÉRICO

Se utilizó el software libre SCILAB para la resolución numérica. El método consiste en definir una función vectorial, que al ingresar los datos del problema evalúe los primeros miembros de las ecuaciones (5)-(7). Dentro de dicha función se utiliza el comando bvodeS para resolver el problema diferencial (4), y así poder evaluar la función de error modificada en los puntos correspondientes. Para hallar un cero de dicha función, se minimiza la suma de los cuadrados de las imágenes sobre los parámetros elegidos como incógnitas.

3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Se utilizó, en cada uno de los casos, el siguiente conjunto de parámetros, que verifican las ecuaciones (5)-(7). Dichos parámetros corresponden al aluminio, cerca de su punto de fusión:

$\beta=0,0318778$	$\delta=0,1177546$	$\lambda=0,2433491$	$k_o=293,1882 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$	$\rho=2698,4 \text{ kg/m}^3$
$c=783,6192 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$	$h=388000 \text{ J/kg}$	$q_o=3179226,8 \text{ J}$	$T_f=660 \text{ } ^\circ\text{C}$	$T_o=600 \text{ } ^\circ\text{C}$

Se analizó la dependencia de la solución con respecto a los parámetros. Para ello se varió levemente cada parámetro y se determinó cómo se modificaba la solución. Se puede observar que los parámetros ρ y k_o se comportan idénticamente, ya que sólo aparecen en la ecuación (7) mediante una multiplicación, y por ende los casos FL-(ii) y (iii) se analizaron juntos.

Propiedades

- En el caso (i) los parámetros más influyentes con respecto a δ , λ y β fueron k_o , ρ y h .
- En el caso (ii) y (iii) la influencia de β sobre λ es despreciable, en cambio δ es directamente proporcional a la variación de dicho parámetro. El calor específico c y calor latente h son los parámetros más relevantes con respecto a λ y k_o (ρ). Ver Figuras 1 y 2.
- En el caso (iv) δ y λ reaccionan de la misma forma al variar k_o , ρ y c , dependiendo inversa y directamente proporcional, respectivamente. Por otra parte, δ es directamente proporcional a β y λ es inversamente proporcional a β . La otra incógnita en este caso es el calor latente, el cual es altamente influenciado por k_o y ρ .
- En el caso (v) las tres incógnitas δ , λ y c son muy sensibles al modificar los parámetros k_o , ρ y h .

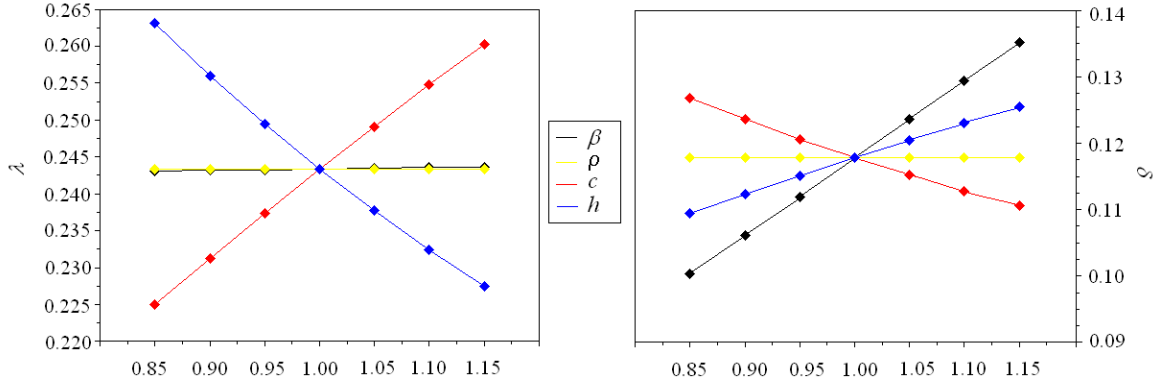


Figura 1 : Dependencia de δ y λ con respecto a β , ρ , c y h en el caso ii).

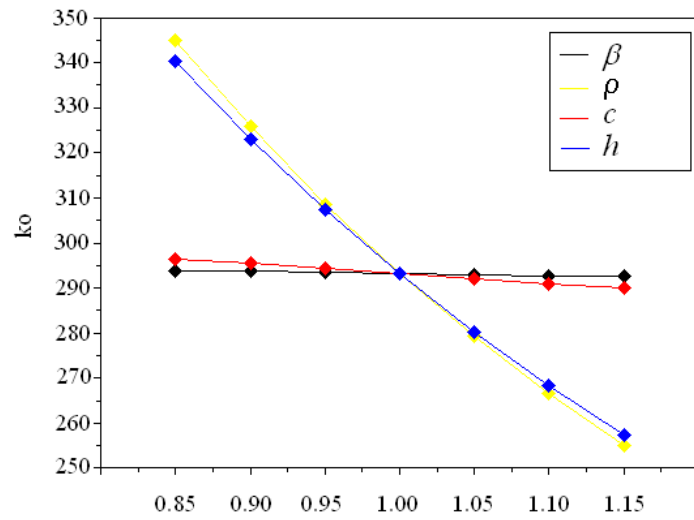


Figura 2: Dependencia de k_o con respecto a β , ρ , c y h en el caso ii).

Se puede observar que si la frontera de cambio de fase $x=s(t)$ es un dato del problema, es decir que viene dada por la expresión $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ con $\sigma > 0$ un dato (el cual debe ser obtenido experimentalmente) entonces (1) es un problema de frontera móvil con una sobre-condición sobre la frontera $x=0$ y por ende se puede plantear determinar numéricamente los siguientes coeficientes térmicos en los 10 casos de frontera móvil siguientes:

- | | | | | | |
|-----|-------------------------|---------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| FM: | i) δ, β, k_o | ii) δ, β, ρ | iii) δ, β, h | iv) δ, β, c | v) δ, k_o, ρ |
| | vi) δ, k_o, h | vii) δ, k_o, c | viii) δ, ρ, h | ix) δ, ρ, c | x) δ, c, h |

que se pueden resolver de una manera similar a los casos anteriores.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP N° 0460 de CONICET-UA y “Fondo de Ayuda a la Investigación de la UA”, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

- [1] V. ALEXAIDES, AND A.D. SOLOMON, *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere-Taylor & Francis, Washington (1996).
- [2] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).
- [3] H.S. CARSLAW, AND C.J. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford (1959).
- [4] S.H. CHO, AND J.E. SUNDERLAND, *Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity*, J. Heat Transfer, 96C (1974), pp. 214-217.
- [5] J. CRANK, *Free and moving boundary problem*, Clarendon Press, Oxford (1984).
- [6] Y. INATOMI, F. ONISHI, K. NAGASHIO, AND K. KURIBAYASHI, *Density and thermal conductivity measurements for Silicon melt by electromagnetic levitation under a static magnetic field*, Int. J. Thermophysics, 28 (2007), pp. 44-59.
- [7] M. LAMVIK, AND J.M. ZHOU, *A novel technique for measuring the thermal conductivity of metallic materials during melting and solidification*, Meas. Sci. Technol., 6 (1995), pp. 880-887.
- [8] D.A. TARZIA, *Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron Problem*, Advances in Applied Mathematics, 3 (1982), pp. 74-82.
- [9] D.A. TARZIA, *Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron problem with an overspecified condition on the fixed face*, Int. J. Heat mass Transfer, 26 (1983), pp. 1151-1158.
- [10] D.A. TARZIA, *The determination of unknown thermal coefficients through phase change process with temperature-dependent thermal conductivity*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 25 (1998), pp. 139-147.
- [11] D.A. TARZIA, *A bibliography on moving-free boundary problems for heat diffusion equation. The Stefan problem*, MAT-Serie A, 2 (2000). Ver [http://www.austral.edu.ar/fce/archivos/mat/Tarzia-MAT-SerieA-2\(2000\).pdf](http://www.austral.edu.ar/fce/archivos/mat/Tarzia-MAT-SerieA-2(2000).pdf)
- [12] A. WANG, X. LIANG, AND J. REN, *Constructal enhancement of heat conduction with phase-change*, Int. J. Thermophysics, 27 (2006), pp. 126-138.
- [13] Y. YANG, AND J. ZHOU, *An experimental technique for liquid/solid thermal conductivity measurements at the melting point*, Int. J. Thermophysics, 27 (2006), pp. 184-194.