DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES TÉRMICOS A TRAVÉS DE UN CAMBIO DE FASE CON CONDUCTIVIDAD TÉRMICA VARIABLE Y SOBRE-CONDICIÓN NEUMANN-ROBIN

Natalia N. Salva[2 3], Mara Rossani[1 4] y Domingo A. Tarzia[1 4]

[1] *Universidad Austral, Paraguay 1950, 2000 Rosario, Argentina, mrossani@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar*
[2] *CNEA-CONICET, Centro Atómico Bariloche, Bariloche, Río Negro, Argentina, natalia.salva@yahoo.com.ar*
[3] *Universidad Nacional del Comahue, Quintral 1250, Bariloche, Río Negro, Argentina.*
[4] *CONICET, Argentina*

Resumen:

Este trabajo presenta la determinación de dos coeficientes térmicos desconocidos de un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura a través de un proceso de cambio de fase con una sobre-condición en el borde fijo, de tipo convectiva y de flujo, mediante un problema de frontera libre o un problema de frontera móvil.

Palabras clave: *Problema de Stefan, Problema de cambio de fase, Determinación de coeficientes térmicos, Solución explícita, Método de semejanza.*
2000 AMS Subject Classification: 80A22-35K35-35K05

1. INTRODUCCIÓN

Los procesos de transferencia de calor con cambio de fase están presentes en una amplia variedad de sistemas dinámicos, como ser la solidificación o fusión de materiales, la colada continua de metales, solidificación de aleaciones binarias, congelación y secado de alimentos, etc. Se remite al lector a [14] y las referencias allí citadas para un estudio reciente sobre soluciones explícitas y aplicaciones.

Los coeficientes térmicos, como la conductividad térmica, el calor latente, la densidad de masa y el calor específico, son propiedades fundamentales de los materiales y esenciales para modelar procesos térmicos. Un método para determinar estos coeficientes consiste en agregar una condición de contorno extra, generando un sistema sobre determinado que permite obtener analíticamente tanto la temperatura como uno o dos coeficientes térmicos [15]. Estudios previos, como [12], han analizado procesos de cambio de fase con conductividad térmica dependiente de la temperatura, determinando coeficientes en distintos escenarios de frontera libre y móvil. En [10], se amplió el estudio incluyendo un parámetro adicional relacionado con la función GME definida en [5]. Otros trabajos relevantes sobre este tema son [7, 8, 9].

En 1974, Cho y Sunderland estudiaron un proceso de cambio de fase para un material semi-infinito unidimensional con conductividad térmica lineal dependiente de la temperatura [6]. En [5] se mejoró el modelado de la temperatura impuesta en el borde fijo al considerar una condición de borde convectiva obteniendo una solución de tipo semejanza. En este trabajo también se considera una condición de Robin, donde la transferencia de calor en el borde fijo es proporcional a la diferencia entre la temperatura externa y la temperatura del material [1, 3], para obtener coeficientes térmicos con una sobre-condición.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se considera el siguiente problema de solidificación para un material semi infinito con sobre-condiciones de flujo de calor y condición convectiva en el borde fijo $x = 0$:

$$
(1)\begin{cases}
\rho c T_t(x,t) = (k(T(x,t))T_x(x,t))_x, & 0 < x < s(t),\ t > 0 \quad \text{(1a)}\\
s(0) = 0, & \text{(1b)}\\
T(x,0) = T(+\infty,t) = T_f, & x > 0,\ t > 0 \quad \text{(1c)}\\
T(s(t),t) = T_f, & t > 0 \quad \text{(1d)}\\
k(T_f)T_x(s(t),t) = \rho l \dot{s}(t), & t > 0 \quad \text{(1e)}\\
k(T(0,t))T_x(0,t) = \dfrac{h_0}{\sqrt{t}}(T(0,t) - T_\infty), & t > 0 \quad \text{(1f)}\\
k(T(0,t))T_x(0,t) = \dfrac{q_0}{\sqrt{t}}, & t > 0 \quad \text{(1g)}
\end{cases}
$$

donde $T(x,t)$ es la temperatura de la fase sólida, $\rho > 0$ es la densidad de masa, $l > 0$ es el calor latente de fusión por unidad de masa, $c > 0$ es el calor específico, $x = s(t)$ es la interfase de cambio de fase, T_f es la temperatura de cambio de fase, T_∞ es la temperatura externa en el borde fijo $x = 0$ ($T_\infty < T_f$), h_0 es el coeficiente que caracteriza el coeficiente de transferencia de calor en $x = 0$ dado por (1f), y q_0 es el coeficiente que caracteriza el flujo de calor en $x = 0$ dado por (1g) que debe obtenerse experimentalmente a través de un proceso de cambio de fase. Los parámetros mencionados anteriormente son todos constantes. Se supone que la conductividad térmica depende de la temperatura y tiene la siguiente expresión:

$$k(T) = k_0 \left(1 + \beta \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}\right) \tag{2}$$

como puede observarse en numerosos materiales con $k_0 > 0$, $\beta > 0$ son constantes dadas.

El problema de cambio de fase (1) con condiciones ((1a)-(1f)) es un problema clásico de Stefan [2], donde la condición (1g) es una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$, del tipo dado en [13]. Se resalta que si $\beta = 0$, entonces el problema (1) se convierte en el clásico problema de Stefan a una fase con una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$. La determinación de coeficientes térmicos fue estudiada en [12, 15] y recientemente en [11].

La siguiente proposición presenta una solución de tipo semejanza al problema (1), donde la temperatura $T(x,t)$ puede escribirse como una función de la variable única $\eta = \dfrac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}}$, donde $\alpha_0 = \dfrac{k_o}{\rho c}$ es la difusividad térmica.

Proposición 1 *El problema de Stefan (1) tiene la solución dada por:*

$$\begin{cases} T(x,t) = (T_f - T_\infty)\varphi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}}\right) + T_\infty, & \textit{if } 0 < x < s(t), t > 0 \quad (3a) \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_0 t} & \textit{if } t > 0 \quad (3b) \end{cases}$$

si y solo si el parámetro $\lambda > 0$ y los coeficientes térmicos desconocidos satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \varphi'(\lambda) = \lambda \dfrac{2l}{(1+\beta)c(T_f - T_\infty)} & (4a) \\ \varphi'(0) = \dfrac{2h_0}{\sqrt{k_0 \rho c}} \dfrac{\varepsilon_0}{(1 + \varepsilon_0 \beta)} & (4b) \end{cases}$$

donde la función φ satisface el siguiente problema diferencial ordinario:

$$\begin{cases} [(1 + \beta y(\eta))y'(\eta)]' + 2\eta y'(\eta) = 0, & 0 < \eta < \lambda \\ y(0) = \varepsilon_0 = \dfrac{q_0}{h_0(T_f - T_\infty)} < 1, & y(\lambda) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Teniendo en cuenta que la solución φ del problema (5) depende de los parámetros $\beta > 0$ y $\lambda > 0$ se puede considerar $\varphi(\eta) = \varphi_{\beta,\lambda}(\eta)$ o $\varphi(\eta) = \varphi_\lambda(\eta)$ en los casos en que β, λ o λ sean incógnitas para problemas de frontera libre, o $\varphi(\eta) = \varphi_\beta(\eta)$ en los casos en que β sea desconocida para problemas de frontera móvil. Se resalta que la solución del problema diferencial ordinario (5) es similar a la función GME definida en [5].

3. Solución al problema

Para estudiar la solución del problema (5), utilizando las ideas de [4, 5], a través de un punto fijo se estudia el problema diferencial lineal siguiente:

$$\begin{cases} [\Psi_h(\eta)y'(\eta)]' + 2\eta y'(\eta) = 0, & 0 < \eta < \lambda \\ y(0) = \varepsilon_0, \quad y(\lambda) = 1 \end{cases} \tag{6}$$

donde $\Psi_h(x) = 1 + \beta h(x)$, $x > 0$, para $\beta > 0$, $h \in K \subset X$, donde siguiendo [4, 5], X es el conjunto de todas las funciones reales analíticas acotadas en $[0, \lambda]$ con la norma del supremo y $K = \{h \in X \,:\, 0 \leq h \; ||h||_\infty \leq 1\}$. A continuación se muestran los resultados obtenidos, que aseguran la existencia de solución del problema (5).

Proposición 2 *Sea $h \in K$ y $\beta > 0$, la función y es solución del problema (6) si y solo si se tiene que:*

$$y(\eta) = \varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)\frac{1}{E_h}\int_0^\eta \frac{\exp\left(-2\displaystyle\int_0^x \frac{\xi}{\Psi_h(\xi)}d\xi\right)}{\Psi_h(x)}dx, \quad 0 < \eta < \lambda, \tag{7}$$

donde la constante $E_h > 0$ está definida por:

$$E_h = \int_0^\lambda \frac{\exp\left(-2\displaystyle\int_0^x \frac{\xi}{\Psi_h(\xi)}d\xi\right)}{\Psi_h(x)}dx. \tag{8}$$

Teorema 1 *Sea $y \in K$ y $\beta > 0$. Entonces y es solución al problema (6) si y solo si y es un punto fijo del operador $T : K \longrightarrow K \subset X$ definido como:*

$$T_h(\eta) = \varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)\frac{1}{E_h}\int_0^\eta \frac{\exp\left(-2\displaystyle\int_0^x \frac{\xi}{\Psi_h(\xi)}d\xi\right)}{\Psi_h(x)}dx, \quad 0 < \eta < \lambda. \tag{9}$$

Más aún, para $h_1, h_2 \in K$, se tiene $||Th_1 - Th_2||_\infty \leq G(\beta)||h_1 - h_2||_\infty$ donde la función real $G(\beta)$ está definida por

$$G(\beta) = G_\lambda(\beta) = (1-\varepsilon_0)\frac{\beta}{2}\frac{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}(3+\beta)}{erf(\lambda)}\left(1 + (1+\beta)^{\frac{3}{2}}\right);$$

con lo cual existe una única solución $\beta_0 = \beta_0(\lambda)$ de la ecuación $G(x) = 1$, $x > 0$. Además, T es un operador de contracción para $0 \leq \beta < \beta_0(\lambda)$, $\forall \lambda > 0$.

Para la determinación de coeficientes térmicos desconocidos se tienen 5 casos cuando se considera un problema de frontera libre ($x = s(t)$ es desconocida) y se tienen 10 casos cuando se considera un problema de frontera móvil ($s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$, con $\sigma > 0$ dado).

En este trabajo se consideran solamente los resultados para la determinación de los coeficientes λ, k_0 (frontera libre) y para la determinación de los coeficientes k_0, ρ (frontera móvil).

Proposición 3 *La temperatura y la frontera libre para el problema (1) con coeficientes térmicos desconocidos $\{\lambda, k_0\}$ están dados por (3a) y (3b) con λ y k_0 dados por las siguientes expresiones:*

$$\begin{cases} \lambda = F_1^{-1}\left(\dfrac{2l}{c(T_f - T_\infty)(1+\beta)}\right) & \text{(10a)} \\ k_0 = \dfrac{4\varepsilon_0^2 h_0^2}{\rho c\,(1+\varepsilon_0\beta)^2\,\varphi'(0)^2} & \text{(10b)} \end{cases}$$

donde $F_1(x) = \frac{\varphi'(x)}{x}$.

Demostración 1 *Es consecuencia directa de que la función F_1 es decreciente con valores $F_1(0^+) = +\infty$ y $F_1(+\infty) = 0$ y un proceso iterativo.*

Proposición 4 *Si la frontera móvil está dada por $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$, con $\sigma > 0$ conocido, entonces:*

(a) el problema inverso de Stefan (1) tiene solución de temperatura dada por (3a) si y solo si los coeficientes térmicos desconocidos satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \varphi'(0) = \dfrac{2h_0}{\sqrt{k_0\rho c}}\dfrac{\varepsilon_0}{(1+\varepsilon_0\beta)} & \text{(11a)} \\ \varphi'\left(\sigma\sqrt{\dfrac{\rho c}{k_0}}\right) = \sigma\sqrt{\dfrac{\rho c}{k_0}}.\dfrac{2l}{(1+\beta)c(T_f - T_\infty)} & \text{(11b)} \end{cases}$$

donde φ es la solución del problema (5), donde el parámetro $\lambda > 0$ se reemplaza por $\zeta = \sigma\sqrt{\rho c/k_0}$.

(b) Si los coeficientes térmicos desconocidos son $\{k_0, \rho\}$, entonces la temperatura del problema (1) está dada por (3a), y los dos coeficientes vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} k_0 = \dfrac{2h_0\varepsilon_0}{1+\beta\varepsilon_0}\dfrac{\sigma}{\zeta\varphi'(0)} & \text{(12a)} \\ \rho = \dfrac{\zeta}{\sigma\varphi'(0)c}\dfrac{2h_0\varepsilon_0}{1+\beta\varepsilon_0} & \text{(12b)} \end{cases}$$

Demostración 2 *Se demuestra teniendo en cuenta que $\zeta = F_1^{-1}\left(\frac{2l}{(1+\beta)c(T_f - T_\infty)}\right)$ y un proceso iterativo.*

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al proyecto 04/B251 de la Universidad Nacional del Comahue y a los proyectos O06-25CI2002 y O06-25CI2004 de la Universidad Austral-sede Rosario.

REFERENCIAS

[1] V. Alexiades and A.D. Solomon. *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*. Hemisphere Publishing Corp., Washington, (1993).

[2] J. R. Cannon. *The One-dimensional Heat Equation*. Addison-Wesley, Menlo Park, California, (1984).

[3] H. S. Carslaw and C. J. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford, (1959).

[4] A.M. Ceretani, N.N. Salva, and D.A. Tarzia. Existence and uniqueness of the modified error function. *Applied Math*, Letters, 70 (2017), pp.14-17.

[5] A.M. Ceretani, N.N. Salva, and D.A. Tarzia. An exact solution for a Stefan problem with variable thermal conductivity and a robin boundary condition. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 40 (2018), pp.243-259.

[6] S.H. Cho and J.E. Suderland. Phase change problems with temperature-dependent thermal conductivity. *Transactions of the ASME, J. Heat Transfer*, 96C (1974), pp.214-217.

[7] D. Das, S. C. Mishra, and R. Uppaluri. Retrieval of thermal properties in a transient conduction-radiation problem with variable thermal conductivity. *Int. J. Heat Transfer*, 52 (2009), pp.2749-2758.

[8] Y. Inatomi, F. Onishi, K. Nagashio, and K. Kuribayashi. Density and thermal conductivity measurements for silicon melt by electromagnetic levitation under a static magnetic field. *Int. J. Thermophysics*, 28 (2007), pp.44-59.

[9] M. Lamvik and J. M. Zhou. A novel technique for measuring the thermal conductivity of metallic materials during meeting and solidification. *Meas. Sci. Technol.*, 6 (1995), pp.880-887.

[10] N.N. Salva and D.A. Tarzia. Simultaneous determination of unknown coefficients through phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity. *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, 5 (2011), pp.11-39.

[11] N.N. Salva and D.A. Tarzia. Relationship between two solidification problems in order to determine unknown thermal coefficients when the heat transfer coefficient is very large. *Applied Mathematics and Computation*, 468 (2024), pp.1-15.

[12] D.A. Tarzia. The determination of unknown thermal coefficients through phase change process with temperature-dependent thermal conductivity. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 25 (1998), pp.139-147.

[13] D.A. Tarzia. An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem. *Quart. Appl . Math.*, 39 (1981-1982), pp.491-497.

[14] D.A. Tarzia. *Explicit and approximated solutions for heat and mass transfer problems with a moving interface*. Chapter 20 in Mohamed El-Amin (Ed.), Advanced Topics in Mass Transfer, InTech Open Acces Publishers, Rijeka (Croacia), (2011), pp.439-484.

[15] D.A. Tarzia. *Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)*. Adv, Applied Math, 3 (1982), pp.74-82.