Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021

asa maci

ASOCIACION ARGENTINA DE MATEMATICA APLICADA COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

SOLUCIONES AUTO-SIMILARES PARA DOS PROBLEMAS DE STEFAN FRACCIONARIOS EN EL ESPACIO

Sabrina D. Roscani, Lucas D. Venturato y Domingo A. Tarzia

Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina
CONICET, Argentina
sroscani@austral.edu.ar, lventurato@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: En el presente trabajo se obtienen soluciones auto-similares para dos problemas de Stefan fraccionarios a una fase en términos de la función de Mittag-Leffler de 3 parámetros $E_{\alpha,m,l}(z)$. Se consideran condiciones en el borde fijo de Dirichlet y de Newmann mediante la derivada de Caputo de orden $0<\alpha<1$ en el espacio.

Palabras clave: *problemas de stefan fractionarios, soluciones explícitas, método de similaridad, derivada de caputo.*
2000 AMS Subject Classification: 26A33 - 35C06 - 35R11 - 35R35 - 80A22.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se consideran los dos siguientes problemas de Stefan fraccionarios que involucran una ecuación de difusión con derivada de Caputo en la variable espacial:

$$\begin{array}{lll} (i) & \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\,{}_0^C D_x^\alpha u(x,t) = 0, & 0<x<s(t), 0<t<T, \\ (ii) & u(0,t) = U_0 > U_m, & 0<t<T, \\ (iii) & u(s(t),t) = U_m, & 0<t<T, \\ (iv) & s(0)=0, & \\ (v) & \dot{s}(t) = -({}_0^C D_x^\alpha u)(s(t),t), & 0<t<T. \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{lll} (i) & \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\,{}_0^C D_x^\alpha u(x,t) = 0, & 0<x<s(t), 0<t<T, \\ (ii) & \lim\limits_{x\to 0^+} {}_0^C D_x^\alpha u(x,t) = -g_0 t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & 0<t<T, \\ (iii) & u(s(t),t) = g_m < g_0, & 0<t<T, \\ (iv) & s(0)=0, & \\ (v) & \dot{s}(t) = -({}_0^C D_x^\alpha u)(s(t),t), & 0<t<T. \end{array} \tag{2}$$

Un estudio de esta clase de problemas, conexiones entre el cálculo fraccionario y la viscoelasticidad, como así también algunas de sus aplicaciones se presentan en [1] y [3].

Por otro lado, en [6] se proponen problemas de Stefan fraccionarios con derivada fraccionaria en el espacio, mientras que en [4] se proporciona un análisis matemático para uno de ellos.

Los problemas (1) y (2) pueden obtenerse al considerar el problema de cambio de fase con flujo de calor dado por $q(x,t) = {}_0^C D_x^\alpha u(x,t)$. Además, la ecuación (1)(i) corresponde a un modelo de difusión anómala, mientras que en [7] se prueba que la ecuación

$$u_t(x,t) - {}_0^C D_x^{\alpha+1} u(x,t) = 0,$$

no permite representar un modelo de difusión anómala.

El objetivo de este trabajo es hallar soluciones auto-similares para los problemas (1) y (2), las cuales estarán dadas en términos de la función de Mittag-Leffler de 3 parámetros $E_{\alpha,m,l}(z)$.

2. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Definición 1 *Sea $\alpha>0$, y $f\in L^1[a,b]$. Se define la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de f de orden α como*

$${}_a^{RL}I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(p)(x-p)^{\alpha-1}\mathrm{d}p. \tag{3}$$

Definición 2 *Se define el conjunto de funciones absolutamente continuas en* $[a,b]$ *como*

$$AC[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ tales que } \exists g \in L^1[a,b] \text{ con } f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t\}.$$

Nota 1 *Para toda* $f \in AC[a,b]$ *existe* $f' \in L^1[a,b]$.

Definición 3 *Sea* $\alpha > 0$, *y* $f \in AC[a,b]$. *Se define la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de* f *de orden* α *como*

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x f(p)(x-p)^{-\alpha}\mathrm{d}p. \tag{4}$$

Definición 4 *Sea* $\alpha > 0$, *y* $f \in AC[a,b]$. *Se define la derivada fraccionaria de Caputo de* f *de orden* α *como*

$$ {}_a^{C}D_x^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u_x(p,t)}{(x-p)^\alpha}\mathrm{d}p. \tag{5}$$

Proposición 1 *Sea* $f \in AC[a,b]$ *tal que* ${}_aI^{1-\alpha}f' \in AC[a,b]$. *Entonces*

$$\frac{d}{dx}\,{}_a^{C}D^\alpha f(x) = {}_a^{RL}D^\alpha (f')(x), \quad \text{c.t.p. en } (a,b).$$

Definición 5 *Sea* $\alpha > 0, m > 0$, *y* l *tal que* $\alpha(jm+l) \neq -1, -2, -3, \dots$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$. *Se define la función de Mittag-Leffler de 3 parámetros* $E_{\alpha,m,l}(z)$ *por*

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ \ \text{con} \ \ c_0 = 1, \ c_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)}, \ (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{6}$$

Nota 2 *En particular,*

$$E_{1,1,0}(z) = e^z, \quad E_{\alpha,1,0}(z) = E_\alpha(z), \quad E_{\alpha,1,l}(z) = \Gamma(\alpha l + 1)E_{\alpha,\alpha l+1}(z), \quad E_{1,2,1}\left(-\frac{z^2}{2}\right) = e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2}.$$

3. Soluciones autosimilares

Se busca una solución a través del método de variables autosimilares. Supongamos que $u = u(x,t)$ es una solución de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\,{}_0^{C}D_x^\alpha u(x,t) = 0, \tag{7}$$

y sea u_λ la función definida por $u_\lambda(x,t) = u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^b}\right)$, $b \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Proposición 2 *Una función* $u = u(x,t)$ *es solución de* (7) *si y sólo si* $u_\lambda = u_\lambda(x,t)$ *es solución de* (7), *con* $b = 1+\alpha$, *para todo* $\lambda > 0$.

Considerando $\lambda = t^{\frac{1}{1+\alpha}}$, obtenemos $\theta(z) = u\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{1+\alpha}}}, 1\right)$, con $z := \frac{x}{t^{\frac{1}{1+\alpha}}}$. Entonces,

$$\frac{z}{1+\alpha}\theta'(z) + \frac{\partial}{\partial z}\,{}_0^{C}D_z^\alpha \theta(z) = 0. \tag{8}$$

de donde, definiendo $\sigma(z) = \theta'(z)$, y aplicando la Proposición 1, resulta

$$\frac{z}{1+\alpha}\sigma(z) + {}^{RL}D_z^\alpha(\sigma)(z) = 0. \tag{9}$$

La ecuación (9) fue resuelta en [8] y su solución viene dada por

$$\sigma_\alpha(z) := z^{\alpha-1}E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{z^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right). \tag{10}$$

De aquí se deduce que la función buscada es de la forma

$$\theta(z) = A + B\int_0^z w^{\alpha-1} E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\mathrm{d}w = A + B\int_0^z \sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w. \tag{11}$$

con A y B constantes arbitrarias.

Proposición 3 *Para $A, B \in \mathbb{R}$ arbitrarios, la función $u\colon \mathbb{R}_0^+ \times (0,T) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u(x,t) = A + B\int_0^{x/t^{\frac{1}{1+\alpha}}} \sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w. \tag{12}$$

es una solución de (7)*.*

Proposición 4 *Si u es una solución autosimilar dada por* (12)*, entonces*

$$-{}_0^C D_x^\alpha u(x,t) = -B\Gamma(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{Bt^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha}\int_0^{x/t^{\frac{1}{1+\alpha}}} w\sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w. \tag{13}$$

Prueba. Basta utilizar la expresión en series de potencias de u, y la siguiente igualdad

$${}_0^C D_x^\alpha(x^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}x^{\beta-\alpha}, \qquad \beta > 0.$$

□

Para finalizar esta sección, se presenta una proposición y un corolario, cuya prueba se basa en un principio del máximo débil para la ecuación $u_t - \frac{\partial}{\partial x}{}_0^C D_x^\alpha u = f$, demostrado en [4].

Proposición 5 *Sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces, la función σ_α definida en* (10) *es no negativa en $\mathbb{R}^+$.*

Idea de la prueba. Se puede ver que $\sigma_\alpha(0^+) = +\infty$ y $\sigma_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+)$. Si se supone que existe $z_0 > 0$ tal que $\sigma_\alpha(z_0) < 0$, entonces existe $c = \min_{z>0}\{\sigma_\alpha(z) = 0\} > 0$. Luego, para $\delta, \varepsilon > 0$ suficientemente pequeños, $\sigma_\alpha(z) < 0$ para $z \in (c, c+\delta]$ y $C = \displaystyle\int_0^{c+\delta} \sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w > 0$, y se puede construir una solución $(u^\varepsilon, s^{\varepsilon,\delta})$ dada por $s^{\varepsilon,\delta}(t) = (c+\delta)(t+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}}$, para $t \geq 0$, $u^\varepsilon(x,t) = u(x, t+\varepsilon)$ para $0 < x < s^{\varepsilon,\delta}(t)$, $0 < t < T$, con u^ε definida por (12) para $A = 0$ y $B = C^{-1}$. Luego, aplicando los principios del máximo y del mínimo demostrados en [4] se llega a una contradicción, por lo que $\sigma_\alpha(z) \geq 0$ para todo $z > 0$.

■

Corolario 1

$$E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right) \geq 0 \quad \textit{para todo } x > 0. \tag{14}$$

A partir de los resultados anteriores, es posible obtener soluciones explícitas a los problemas (1) y (2).

Teorema 1 *Una solución del problema de Stefan a una fase para la ecuación de difusión fraccionaria en el espacio dada por* (7) *con condición de Dirichlet está dada por*

$$u_\alpha(x,t) = U_0 - \frac{(U_0 - U_m)}{\displaystyle\int_0^{\xi_\alpha}\sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w}\int_0^{x/t^{1/(1+\alpha)}}\sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w. \tag{15}$$

$$s_\alpha(t) = \xi_\alpha t^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t \in (0,T), \tag{16}$$

donde $\xi_\alpha \in \mathbb{R}^+$ es la única solución de la ecuación $H_\alpha(x) = x$, para $x > 0$, donde

$$H_\alpha(x) = \frac{(U_0 - U_m)\left(\Gamma(\alpha)(1+\alpha) - \displaystyle\int_0^x w\sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w\right)}{\displaystyle\int_0^x \sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w}. \tag{17}$$

Prueba. Sea u definida por (12). De la condición (1)$-(iii)$, se deduce que

$$u(s(t),t) = A + B\int_0^{s(t)/t^{1/(1+\alpha)}} \sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w = U_m, \tag{18}$$

para todo $t \in (0,T)$, por lo que la frontera libre s debe ser proporcional a $t^{1/(1+\alpha)}$, es decir

$$s(t) = \xi t^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad \text{para algún } \xi \in \mathbb{R}^+. \tag{19}$$

A partir de las restantes condiciones de (1) se obtiene que $A = U_0$, y

$$B = \frac{-(U_0 - U_m)}{\int_0^\xi \sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w}.$$

Utilizando (13) y (19) en (1)-(v), resulta que

$$\frac{\xi}{1+\alpha}t^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{Bt^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha}\left(-\Gamma(\alpha)(1+\alpha) + \int_0^\xi w\sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w\right),$$

de donde ξ debe ser un valor positivo que verifique la ecuación

$$\xi = \frac{(U_0 - U_m)\left(\Gamma(\alpha)(1+\alpha) - \displaystyle\int_0^\xi w\sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w\right)}{\displaystyle\int_0^\xi \sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w} = H_\alpha(\xi). \tag{20}$$

La función $H_\alpha\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es continua, $H_\alpha(0^+) = \lim\limits_{x\searrow 0} H_\alpha(x) = +\infty$, y por Proposición 5 es una función no creciente. Por lo tanto, se puede asegurar que existe un único $\xi > 0$ tal que $H_\alpha(\xi) = \xi$. $\square$

Teorema 2 *Una solución del problema de Stefan a una fase para la ecuación de difusión fraccionaria en el espacio* (7) *con condición de Neumann está dada por*

$$v_\alpha(x,t) = g_m + \frac{g_0}{\Gamma(\alpha)}\int_{x/t^{1/(1+\alpha)}}^{\eta_\alpha} w^{\alpha-1}E_{\alpha,1+\frac{1}{\alpha},1}\left(-\frac{w^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)\mathrm{d}w \tag{21}$$

$$s_\alpha(t) = \eta_\alpha t^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t \in (0,T). \tag{22}$$

donde $\eta_\alpha \in \mathbb{R}^+$ *es la única solución de la ecuación* $G_\alpha(x) = x$*, para* $x > 0$*, donde*

$$G_\alpha(x) = g_0\left((1+\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x w\sigma_\alpha(w)\mathrm{d}w\right). \tag{23}$$

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido patrocinado por los Proyectos PIP N° 0275 de CONICET–Universidad Austral, ANPCyT PICTO Austral 2016 N°0090, y European Unions Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Sklodowska-Curie Grant Agreement N° 823731 CONMECH.

REFERENCIAS

[1] R. HILFER (ED.)., *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Word Scientific Publishing Co, 2000.

[2] G. LAMÉ AND B. P. CLAPEYRON, *Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide.*, Annales de Chimie et de Physique 2° série, 47, pp. 250-256, 1831.

[3] F. MAINARDI, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, 2010.

[4] K. RYSZEWSKA, *A space-fractional Stefan problem*, Nonlinear Analysis, 199, Article 112027, 2020.

[5] D. A. TARZIA, *An inequality for the coeficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*, Quart. Appl. Math., 39, pp. 491-497, 1981.

[6] V. R. VOLLER, *Fractional Stefan problems*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 74, pp. 269-277, 2014.

[7] KILBAS, A. A. AND SAIGO, M., *Boundary conditions for fractional diffusion*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 336, pp. 408-424, 2018.

[8] B. BAEUMER AND M. KOVÁCS AND M. MEERSCHAERT AND H. SANKARANARAYANAN, *On Mittag-Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations*, Integral Transforms and Special Functions, 4, pp. 355-370, 1996.