MACI 2019

Vol. 7

VII CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA, COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Luis R. Ceballos, Claudia M. Gariboldi y Bruno A. Roccia (Eds.)

UNRC

Río Cuarto, Córdoba, Argentina

8 al 10 de Mayo de 2019

Existencia y unicidad global de solución a una ecuación diferencial fraccional no lineal para la derivada de Caputo–Fabrizio

Sabrina D. Roscani†, Lucas Venturato‡ y Domingo A. Tarzia†

†*CONICET - Depto. Matemática,FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina*
‡*Depto. Matemática, ECEN, FCEIA, Univ. Nac. de Rosario, Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina*
sroscani@austral.edu.ar, lucasv@fceia.unr.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: En el presente trabajo se enuncian propiedades de la derivada de Caputo-Fabrizio (CF), analizando la convergencia de la misma, cuando el orden de derivación tiende a uno, a las derivadas clásicas para un conjunto particular de funciones. Se proporcionan nuevas fórmulas para la derivada de CF de funciones potencia (en términos de la función de Mittag-Leffler) y de las funciones seno y coseno. Además, se prueba la existencia y unicidad de solución global a un problema de valor inicial para una ecuación diferencial fraccionaria no lineal con derivada de CF.

Palabras clave: *Ecuaciones diferenciales fraccionarias ordinarias, derivada de Caputo-Fabrizio; función de Mittag-Lefler.*
2000 AMS Subject Classification: 26A33, 33E12, 34A08, 34A12, 34A34.

1. Introducción

En el campo de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, la derivada de Caputo, definida en 1967 [2], ha sido una de las más utilizadas al momento de modelar procesos que involucran efectos de memoria, difusión en dominios no homogéneos, o en el estudio de la difusión anómala (ver [5, 7, 9]). En 2015, con el objetivo de evitar el núcleo singular que aparece en la definición de la derivada de Caputo, y motivados por situaciones físicas relacionadas con la necesidad de un núcleo exponencial (ver por ejemplo [4, 10]) M. Caputo y M. Fabrizio proponen en [3] la definición del siguiente operador

$$ {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{1-\alpha}\int_a^t f'(\tau) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \tag{1}$$

para cada $f \in W^1(a,b) = \{f \in \mathcal{C}[a,b]/f' \in L^1(a,b)\}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\alpha \in (0,1)$, al que llamaremos derivada de Caputo-Fabrizio (CF).

Nuestro objetivo es desarrollar algunas propiedades del operador (1), entre ellas, se proporciona una nueva fórmula para el cálculo de la derivada fraccionaria (1) de funciones potencia, siendo la misma más compacta que las existentes en la literatura (ver por ejemplo [11], [12]). Por otro lado, se demuestra existencia y unicidad global de solución a un problema de valor inicial para una ecuación diferencial fraccionaria no lineal para la derivada de CF, basada en la existencia de solución para tiempos finitos dada por Lozada y Nieto en [8] y una fórmula de traslación.

2. Definiciones y propiedades

En adelante, se denotará por ${}^{CF}D^{\alpha}$ a la derivada fraccionaria de CF con límite inferior $a = 0$.

Definición 1 *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0,1)$, y $f \in W^{(n+1)}(a,b) = \{f \in \mathcal{C}^{(n)}[a,b]/f^{(n+1)} \in L^1(a,b)\}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de orden $n+\alpha$ está dada por*

$$ {}^{CF}_{\ a}D^{(n+\alpha)} f(t) := {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right). \tag{2}$$

Proposición 1 *Sea $\alpha \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $f \in W^{(n+1)}(a,b)$. Entonces*

1. *Para cada $t \in [a,b]$, $\lim\limits_{\alpha \searrow 0} {}^{CF}_{\ a}D^{(\alpha+n)} f(t) = \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau$. En particular, si $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}[a,b]$ entonces $\lim\limits_{\alpha \searrow 0} {}^{CF}_{\ a}D^{(\alpha+n)} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)$ para todo $t \in [a,b]$.*

2. *Si $f^{(n+1)}$ es una función seccionalmente continua con un número finito de raíces en (a,b), entonces $\lim\limits_{\alpha\nearrow 1} {}^{CF}_{\ a}D^{(\alpha+n)}f(t) = f^{(n+1)}(t)$ p.c.t. $t\in(a,b)$. En particular, si $f\in\mathcal{C}^{(n+2)}[a,b]$ entonces $\lim\limits_{\alpha\nearrow 1} {}^{CF}_{\ a}D^{(\alpha+n)}f(t) = f^{(n+1)}(t)$ para todo $t\in(a,b]$.*

Proposición 2 *Las siguientes propiedades para la derivada de Caputo-Fabrizio son válidas:*

1. *Si $u\in W^1(a,b)$ y $f(t)={}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}u(t)$, entonces $f(a)=0$.*
2. *Sea $g\in W^1(a,b)$ y $\alpha\in(0,1)$. Entonces para cada $a>0$, se tiene la siguiente fórmula de traslación:*

$$ {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}g(t) = {}^{CF}D^{\alpha}g(t) - \exp\left\{\frac{-\alpha(t-a)}{1-\alpha}\right\} {}^{CF}D^{\alpha}g(a). \tag{3}$$

Prueba. 1. Sea $h(\cdot)=e^{-\frac{\alpha(t-\cdot)}{1-\alpha}}$. Es fácil ver que $u(\cdot)h(\cdot)\in\left\{v\in L^1(a,b)\colon\ v'\in L^1(a,b)\right\}$. Entonces, por Teorema 8.2 del Capítulo 8 de Brezis [1], resulta $\displaystyle\int_a^t \left(u(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}\right)' \mathrm{d}\tau = u(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}\Big|_a^t$. Aplicando dicha igualdad en la definición (1) y tomando límite cuando $t\searrow a$ obtenemos que

$$f(a)=\lim_{t\searrow a} f(t) = \lim_{t\searrow a} {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}u(t) = \lim_{t\searrow a}\frac{1}{1-\alpha}\left[u(t)-u(a)e^{-\frac{\alpha(t-a)}{1-\alpha}} - \int_a^t u(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{d}\tau\right]=0.$$

2. La igualdad (3) se deduce de la propiedad de la integral sobre intervalos adyacentes. □

A continuación, se desea encontrar una función u tal que ${}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}u(t)=f(t)$. Siguiendo el procedimiento descrito en [8], es decir, derivando respecto de t y luego integrando, teniendo en cuenta además la proposición 2-1, se obtiene que

$$u(t)-u(a)=\alpha\int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau + (1-\alpha)[f(t)-f(a)] = \alpha\int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau + (1-\alpha)f(t). \tag{4}$$

Definición 2 *Sean $\alpha\in(0,1]$, $f\in L^1(a,b)$. La integral fraccionaria de Caputo-Fabrizio de f se define por*

$$ {}^{CF}_{\ a}I^{\alpha}f(t) = (1-\alpha)f(t) + \alpha\int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t\geq a. \tag{5}$$

Nota 1 *Por* (4) *se tiene que ${}^{CF}_{\ a}I^{\alpha}f(t)=u(t)-u(a)$.*

Proposición 3 *Sea f en $L^1(a,b)$ o $W^1(a,b)$ según sea necesario. Entonces*

1. ${}^{CF}_{\ a}I^{\alpha}\left({}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}f(t)\right)=f(t) \Leftrightarrow f(a)=0 \Leftrightarrow {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}\left({}^{CF}_{\ a}I^{\alpha}f(t)\right)=f(t)$.
2. $\lim\limits_{\alpha\nearrow 1} {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}\left({}^{CF}_{\ a}I^{\alpha}f(t)\right)=f(t)$.

Recordando las definiciones de las funciones de Mittag–Leffler y Beta, junto a una propiedad conocida de la función Beta (ver p. 10 de [6]), dadas respectivamente por

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad B(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}\mathrm{d}\tau, z>0,\ w>0,\quad B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

donde Γ es la función Gama, puede probarse el siguiente resultado

Proposición 4 *Sea $\alpha\in(0,1)$ y $\beta>0$. Entonces*

$$ {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\left[1-\Gamma(\beta)E_{1,\beta}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-a)\right)\right]. \tag{6}$$

Corolario 1 *Si $\alpha\in(0,1)$ y $m\in\mathbb{N}$, entonces*

$$ {}^{CF}_{\ a}D^{\alpha}(t-a)^{m} = \frac{m!}{\alpha}\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{m-1}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{(t-a)^k}{k!} - \exp\left\{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-a)\right\}\right]. \tag{7}$$

En la Figura 1 puede verse la gráfica de ${}^{CF}D^{\alpha}t$ para algunos valores de α a partir de la fórmula (7).

Ejemplo 1 *Integrando por partes, y notando que $e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}$ tiende a 0 cuando $\alpha \nearrow 1$ se puede ver que*

$$ {}^{CF}D^{\alpha}\sin(t) = \frac{1}{(1-\alpha)^2+\alpha^2}\left(\alpha\cos(t) + (1-\alpha)\sin(t) - \alpha e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}\right),\ y\ \lim_{\alpha\nearrow 1} {}^{CF}D^{\alpha}\sin t = \cos(t), $$

$$ {}^{CF}D^{\alpha}\cos(t) = \frac{1}{(1-\alpha)^2+\alpha^2}\left(-\alpha\sin(t) + (1-\alpha)\cos(t) - (1-\alpha)e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}\right)\ y\ \lim_{\alpha\nearrow 1} {}^{CF}D^{\alpha}\cos(t) = -\sin(t). $$

En la Figura 2 se muestran las gráficas de ${}^{CF}D^{\alpha}\sin t$ para algunos valores de α.

Nota 2 *No localidad. Sean $f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ t^2 & 1 < t, \end{cases}$, $f_3(t) = \begin{cases} 2t-1 & 0 \le t \le 1 \\ t^2 & 1 < t. \end{cases}$ definidas en $\mathbb{R}_0^+$. Notar que f_1, f_2, f_3 coinciden en un entorno de $t = 2$, pero difieren en un intervalo anterior. Más aún, f_1 y f_3 son funciones diferenciables en $\mathbb{R}_0^+$, mientras que $f_2 \in H^1(0,b)$ para cada $b > 0$ con un salto en la derivada en $t = 1$. Observar que, por el Corolario 1, se tiene que ${}^{CF}D^{\alpha}f_1(2) = \frac{4}{\alpha} - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2}e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$. Por otro lado, puede verse que*

$$ {}^{CF}D^{\alpha}f_2(2) = \tfrac{4}{\alpha} - \tfrac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} - \tfrac{e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}{\alpha} + \tfrac{2-3\alpha}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}},\ {}^{CF}D^{\alpha}f_3(2) = \tfrac{4}{\alpha} - \tfrac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} - \tfrac{2}{\alpha}e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}} + \tfrac{2(1-\alpha)}{\alpha^2}e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}. $$

Luego, $h(\alpha) = {}^{CF}D^{\alpha}f_1(2) - {}^{CF}D^{\alpha}f_2(2) \neq 0,\ g(\alpha) = {}^{CF}D^{\alpha}f_1(2) - {}^{CF}D^{\alpha}f_3(2) \neq 0,\ \forall\,\alpha \in (0,1)$.

Por lo tanto, ${}^{CF}D^{\alpha}f_1(2) \neq {}^{CF}D^{\alpha}f_2(2) \neq {}^{CF}D^{\alpha}f_3(2)$ para cada $\alpha \in (0,1)$, mientras que para la derivada clásica local se tiene que $f_1'(2) = f_2'(2) = f_3'(2)$.

3. Solución global a una ecuación diferencial no lineal fraccionaria

El siguiente resultado es una reformulación del Teorema 1 presentado en el trabajo de Losada y Nieto [8].

Teorema 1 *Sea $\varphi\colon [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz respecto de la segunda variable con constante L, y sea $\alpha \in (0,1)$ tal que $L < \frac{1}{1-\alpha}$. Entonces si $\varphi(0,a_0) = 0$, el problema a valores iniciales*

$$ \begin{cases} {}^{CF}D^{\alpha}f(t) = \varphi(t, f(t)), & t > 0, \\ f(0) = a_0 \end{cases} \tag{8} $$

tiene una única solución $f \in \mathcal{C}[0,T]$, para cada $T \in \left(0, \frac{1-(1-\alpha)L}{\alpha L}\right)$.

La demostración de este resultado es similar a la prueba del Teorema 1 en [8].

Teorema 2 *Sea $\varphi\colon [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz respecto de la segunda variable con constante L, y sea $\alpha \in (0,1)$ tal que $L < \frac{1}{1-\alpha}$. Entonces, el problema a valores iniciales*

$$ \begin{cases} {}^{CF}D^{\alpha}f(t) = \varphi(t, f(t)), & t > 0, \\ f(0) = a_0 \end{cases} \tag{9} $$

tiene una única solución $f \in \mathcal{C}[0,T]$, para cada tiempo finito $T \in \mathbb{R}^+$, esto es, globalmente en el tiempo.

Idea de la prueba. Por Teorema 1 se tiene un par $\{T_1, f_1\}$ solución del problema a valores iniciales (9) en el intervalo $[0,T_1]$. Por otro lado, usando la fórmula de traslación dada en la proposición 2-2 puede verse que los siguientes problemas son equivalentes

$$ \begin{cases} {}^{CF}D^{\alpha}f(t) = \varphi(t, f(t)), & t > T_1 \\ f(t) = f_1(t) & \forall\, t \in [0,T_1], \end{cases} \qquad \begin{cases} {}^{CF}_{T_1}D^{\alpha}f(t) = \Phi(t, f(t)), & t > T_1 \\ f(t) = f_1(t) & \forall\, t \in [0,T_1], \end{cases} $$

con $\Phi(t,x) = \varphi(t,x) - e^{-\frac{\alpha(t-T_1)}{1-\alpha}}\varphi(T_1, f_1(T_1))$ y considerando ahora el subproblema dado por

$$ \begin{cases} {}^{CF}_{T_1}D^{\alpha}f(t) = \Phi(t, f(t)), & t > T_1 \\ f(T_1) = f_1(T_1). \end{cases} \tag{10} $$

se puede aplicar el Teorema 1 a (10) puesto que Φ resulta una función Lipschitz respecto de la segunda variable con constante L, y por hipótesis, $L < \frac{1}{1-\alpha}$. Entonces existe un par $\{T_2, f_2\}$ tal que f_2 es la única solución al problema (10) en el intervalo $[T_1, T_2]$. De manera similar y por iteración se puede construir una función continua f_N que es la única solución de

$$\begin{cases} {}^{CF}D^{\alpha} f(t) = \varphi(t, f(t)), \quad 0 < t < N\Delta T \\ f(0) = a_0 \end{cases} \tag{11}$$

para cada $N \in \mathbb{N}$, con ΔT alguna constante positiva tal que $0 < \Delta T < \frac{1-(1-\alpha)L}{\alpha L}$, y como $N \in \mathbb{N}$ es arbitrario, la solución al problema (9) está globalmente definida en el tiempo. ■

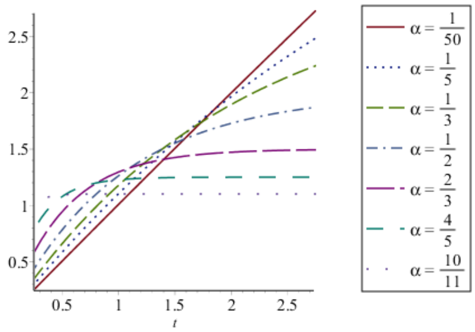

Figura 1: ${}^{CF}D^{\alpha} t$ para algunos valores de α.

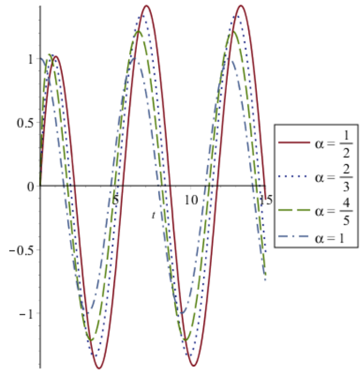

Figura 2: ${}^{CF}D^{\alpha} \sin t$ para algunos valores de α.

4. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido patrocinado por los Proyectos PIP No. 0275 de CONICET-Univ. Austral, y ANPCyT PICTO Austral 2016 No. 0090 (Rosario, Argentina).

REFERENCIAS

[1] H. BRÉZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[2] M. CAPUTO, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. II*, *Geophysical Journal International*, 13:529–539, 1967.

[3] M. CAPUTO AND M. FABRIZIO, *A new definition of fractional derivative without singular kernel*, *Progress in Fractional Differenciation and Applications*, 1(2):1–13, 2015.

[4] K. S. COLE AND R. H. COLE, *Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics*, *Journal of Chemical Physics*, 9:341–351, 1941.

[5] K. DIETHELM, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An application oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer Science & Business Media, 2010.

[6] A. ERDÉLYI, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1. McGraw-Hill, New York, 1953.

[7] A. KILBAS, H. SRIVASTAVA, AND J. TRUJILLO, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier, 2006.

[8] J. LOSADA AND J. J. NIETO, *Properties of a new fractional derivative without singular kernel*, *Progress in Fractional Differenciation and Applications*, 1(2):87–92, 2015.

[9] R. METZLER AND J. KLAFTER *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*, *Physics reports*, 339:1–77, 2000.

[10] C. ZENER, *Elasticity and anelasticity of metals*. University of Chicago Press, 1948.

[11] AKMAN YLDZ, TUĞBA AND YLDZ, BURAK AND BALEANU, DUMITRU, *New discretization of CaputoFabrizio derivative*, *Computational and Applied Mathematics*, 37(6), 2017.

[12] ATANGANA, ABDON, *On the new fractional derivative and application to nonlinear Fishers reaction–diffusion equation*, *Applied Mathematics and Computation*, 273:948–956, 2016.