MACI 2019

Vol. 7

VII CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA, COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Luis R. Ceballos, Claudia M. Gariboldi y Bruno A. Roccia (Eds.)

UNRC

Río Cuarto, Córdoba, Argentina
8 al 10 de Mayo de 2019

SOBRE PROBLEMAS DE TIPO STEFAN MODELIZADOS POR DERIVADAS FRACCIONARIAS TEMPORALES

Sabrina D. Roscani † y Domingo A. Tarzia†

†*CONICET - Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina,*
sroscani@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: En este trabajo se presenta una formulación de un problema de tipo Stefan fraccionario a partir de conceptos físicos. Se analizan formulaciones equivalentes y se comparan con problemas similares preexistentes en la literatura para los cuales se conocen soluciones explícitas.

Palabras clave: *problema de Stefan, ecuación de difusión fraccionaria, derivada de Caputo, derivada de Riemann–Liouville.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35, 26A33, 35C05, 33E20, 80A22.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría del Cálculo Fraccionario ha tenido un gran desarrollo en las últimas décadas. Se han planteado problemas con derivadas fraccionarias tanto desde el punto de vista matemático (como generalización u operador de interpolación), como desde el punto de vista de las aplicaciones.
Consideremos el siguiente problema de frontera libre unidimensional a una fase, conocido como Problema de Stefan.

$$\begin{array}{lll} (i) & \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), & 0 < x < s(t),\ 0 < t < T, \\ (ii) & u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le b = s(0), \\ (iii) & u(0,t) = g(t), & 0 < t \le T, \\ (iv) & u(s(t),t) = 0, & 0 < t \le T, \\ (v) & s'(t) = -k\frac{\partial}{\partial x}u(s(t),t), & 0 < t \le T, \end{array} \tag{1}$$

Donde λ es la difusividad, k es la constante de conductividad térmica y, por simplicidad en los cálculos, consideraremos el resto de las constantes físicas involucradas iguales a uno. Este tipo de problema ha sido estudiado en profundidad en la década de los '80 (ver e.g. [1, 2, 9])
Desde el punto de vista físico, se puede plantear un problema de frontera libre gobernado por ecuaciones diferenciales fraccionarias a partir de la suposición de que el flujo verifica una ecuación que no es exactamente la Lay de Fourier. Vale destacar que la Ley de Fourier (que dice que el flujo es proporcional al gradiente de temperatura) es una ley experimental y se han propuesto diferentes alternativas. Una de las más destacadas, que data de 1968 corresponde a Guptin y Pipkin [5] y plantea la relación flujo–temperatura via una convolución. Suguiendo esta línea, se considera un problema de cambio de fase a una fase (por ejemplo un problema de fusión) y se supone que la temperatura u (que es nula en la fase sólida) y el flujo de calor J verifican la siguiente relación en la fase líquida

$$\frac{\nu_\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{h(x)}^{t}\frac{J(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau = -k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \tag{2}$$

donde ν_α es una constante destinada a tender a 1 cuando $\alpha \nearrow 1$ cuyo objetivo es balancear las unidades de medida en (2), y el valor correspodiente al tiempo inicial en la integral fraccionaria depende de la posición y está dado por el valor $h(x)$ que da el momento en el cual se produce el cambio de fase. Esto es, si s es la función del tiempo que para cada t da la posición del cambio de fase $x = s(t)$, entonces $h = s^{-1}$.
La relación (2) nos dice que *"la suma generalizada con pesos de flujos pasados, es proporcional al gradiente de temperatura"* y se puede dar en términos de integrales fraccionarias.
Se recuerda que se define al operador integral de Riemann–Liouville definido para todo $\beta > 0$ y para toda función integrable por ${}_aI^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\beta-1}d\tau$, y Γ es la función Gamma. Luego, la relación

(2) resulta

$$\nu_{\alpha\ h(x)} I_t^{1-\alpha} J(x,t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{3}$$

Sea entonces la ecuación de contiuidad (1er Ppio. de la termodinámica) dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial J}{\partial x}(x,t). \tag{4}$$

Reemplazándo (3) en (4) se obtiene la siguiente ecuación fraccionaria gobernante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mu_\alpha d \frac{\partial}{\partial x}\left({}^{RL}_{h(x)}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right), \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0,$$

donde ${}^{RL}_{a}D_t^{\beta}$ es el operador derivada fraccionaria de Rienamm–Liouville respecto de la variable temporal dado por

$${}^{RL}_{a}D_t^{\beta} u(x,t) = \left[D\, {}_aI_t^{1-\beta} u \right](x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t (t-\tau)^{-\beta} u(x,\tau) d\tau$$

y que resulta ser el inverso a izquierda del operador integral de RL. Con el mismo argumento, pero a partir de las ecuaciones de Rankine–Hugoniot en la interface se obtiene la siguiente ecuación del cambio de fase

$$\lim_{x \nearrow s(t)} {}^{RL}_{h(x)}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = s'(t).$$

Finalmente, si en el problema de fusión sobre una barra semi–infinita ($0 \leq x < \infty$) de un material "con memoria" que se modela, se supone que:
a) la barra está a temperatura de fusión (que supondremos nula) para todo $x \geq b$,
b) se conoce la temperatura inicial en $(0, b)$, dada por la función no negativa $u_0(\cdot)$,
c) se impone una temperatura de borde $T_0 > 0$ sobre la cara $x = 0$,
d) existe una función $x = s(t)$ creciente que representa la posición (desconocida) de la frontera libre para cada tiempo t tal que $s(0) = b$.
e) todas las constante termofísicas son constantes,
resulta que se obtiene la siguiente formulación correspondiente al problema fraccionario de fronetera libre

$$\begin{array}{lll}
(i) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mu_\alpha \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left({}^{RL}_{0}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right), & 0 < x \leq b,\ 0 < t < T, \\
(ii) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mu_\alpha \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left({}^{RL}_{h(x)}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right), & b < x < s(t),\ 0 < t < T, \\
(iii) & s(0) = b, & \\
(iv) & u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < b, \\
(v) & u(0,t) = T_0, & 0 < t \leq T, \\
(vi) & u(s(t),t) = 0, & 0 < t \leq T, \\
(vii) & s'(t) = -\mu_\alpha k \lim\limits_{x \nearrow s(t)} {}^{RL}_{h(x)}D_t^{1-\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x} u(x,t), & 0 < t \leq T.
\end{array} \tag{5}$$

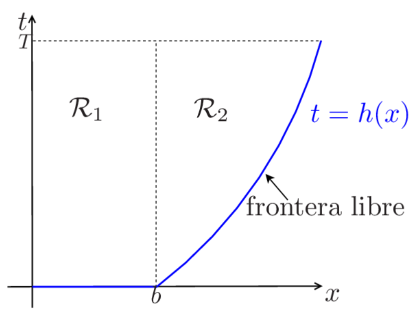
donde la función h está definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x \leq b \\ s^{-1}(x) & \text{if } b < x < s(t) \end{cases}$$

y, dado que h es una función que no es derivable en $x = b$, se han separado las ecuaciones gobernantes en dos regiones:

$\mathcal{R}_1 : \quad \{(x,t) \,|\, 0 < x \leq b,\ 0 < t < T\}$.
(Flujo continuo, sin cambio de fase)

$\mathcal{R}_2 : \quad \{(x,t) \,|\, b < x < s(t),\ 0 < t < T\}$.
(Flujo discontinuo debido al cambio de fase)



2. La formulación con derivada de Caputo

Definición 1 *Para toda función* $f \in W^1(a,b) = \left\{ f \in \mathcal{C}[a,b] |\, f' \in L^1(a,b) \right\}$*, definimos la* derivada de Caputo de orden α *como*

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha} f(t) = \left[{}_{a}I^{1-\alpha} (D^n f) \right](t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) \mathrm{d}\tau, & 0<\alpha<1, \\ f'(t), & \alpha = 1. \end{cases} $$

Proposición 1 *[3] Las siguientes propiedades valen para todo* $\alpha \in (0,1)$*:*

1. *Inverso a izquierda:* ${}^{RL}_{a}D^{\alpha}\, {}_{a}I^{\alpha} f(t) = f(t) \quad c.t.p..$
2. *La integral de Riemann–Liouville no es, en general, inverso del operador fraccionaria de Riemann–Liouville. En particular,* ${}_{a}I^{\alpha}({}^{RL}_{a}D^{\alpha} f)(t) = f(t) - \dfrac{{}_{a}I^{1-\alpha} f(a^+)}{\Gamma(\alpha)(t-a)^{1-\alpha}}.$
3. *Si existe una* $\phi \in L^1(a,b)$ *tal que* $f = {}_{a}I^{\alpha}\phi$*, entonces* ${}_{a}I^{\alpha}\, {}^{RL}_{a}D^{\alpha} f(t) = f(t) \quad c.t.p.$
4. ${}^{RL}_{a}D^{\alpha} f(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + {}^{C}_{a}D^{\alpha} f(t).$

Proposición 2 *Bajo las sufucientes condiciones de regularidad respecto de la variable* x*, el problema (5) es equivalente al siquiente problema*

$$ \begin{array}{lll} (i) & {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t} u(x,t) = \mu_\alpha \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0<x\leq b,\ 0<t<T, \\ (ii) & {}^{C}_{h(x)}D^{\alpha}_{t} u(x,t) + \lambda \frac{(t-h(x))^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \mu_\alpha \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & b<x<s(t),\ 0<t<T, \\ (iii) & s(0) = b, & \\ (iv) & u(x,0) = u_0(x), & 0<x<b, \\ (v) & u(0,t) = T_0, & 0<t\leq T, \\ (vi) & u(s(t),t) = 0, & 0<t\leq T, \\ (vii) & s'(t) = -\mu_\alpha k \lim\limits_{x\nearrow s(t)} {}^{RL}_{h(x)}D^{1-\alpha}_{t} \dfrac{\partial}{\partial x} u(x,t), & 0<t\leq T. \end{array} \tag{6} $$

Prueba. Idea de la demostración: La equivalencia de las ecuaciones gobernantes (i) se deduce de las propiedades de los operadores dado que que extremo de derivación fraccionaria es constante igual a cero. Respecto de las ecuaciones $(5-ii)$ y $(6-ii)$, se debe prestar atención al término inferior variable ivolucrado en la derivada fraccionaria. Se aplica ${}_{h(x)}I^{1-\alpha}_{t}$ a ambos miembros en $(5-ii)$ teniendo en cuenta los siguientes cálculos.

$$ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left({}_{h(x)}I^{1-\alpha}_{t}\, {}^{RL}_{h(x)}D^{1-\alpha}_{t} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{h(x)}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}\, {}^{RL}_{h(x)}D^{1-\alpha}_{t} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,\tau) \right) \mathrm{d}\tau \right] \\ = {}_{h(x)}I^{1-\alpha}_{t} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}^{RL}_{h(x)}D^{1-\alpha}_{t} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right)\right)\right] &- \lim_{\tau \searrow h(x)} {}^{RL}_{h(x)}D^{1-\alpha}_{t} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right) \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} h'(x). \end{aligned} \tag{7} $$

De la relación (3) y la proposición $1-3$, sigue que

$$ {}_{h(x)}I^{1-\alpha}_{t} \left({}^{RL}_{h(x)}D^{1-\alpha}_{t} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right)\right) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t). \tag{8} $$

Luego, juntando (7) con (8) siendo h la inversa de s para $x>b$,

$$ \mu_\alpha \lambda\, {}_{h(x)}I^{1-\alpha}_{t} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left({}^{RL}_{h(x)}D^{1-\alpha}_{t} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right)\right)\right] = \mu_\alpha \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{\lambda}{k\Gamma(1-\alpha)} (t - h(x))^{-\alpha}. $$

de donde se deduce que $(5-ii)$ implica $(6-ii)$. La recíproca es análoga. $\square$

Nota 1 *No se ha podido probar existencia y unicidad de solución del problema (5). Sin embargo se tienen soluciones de tipo autosimilares a problemas similares (pero que no provienen del enfoque físico) que convergen a las soluciones clásicas del problema de Stefan clásico. Por ejemplo, se sabe que los problemas*

$$
\begin{array}{rlclr}
 & \textbf{(PFL-Cap)} & & \textbf{(PFL-RL)} & \\
(i) & {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x^2} u(x,t), & & \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x}\left({}_0^{RL} D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right), & 0 < x < s(t), \\
 & & & & 0 < t < T, \\
(ii) & s(0) = 0, & & s(0) = 0, & \\
(iii) & u(0,t) = 1, & y & u(0,t) = 1, & 0 < t \leq T, \\
(iv) & u(s(t),t) = 0, & & u(s(t),t) = 0 & 0 < t \leq T, \\
(v) & {}_0^C D^\alpha s(t) = -u_x(s(t),t), & & \frac{d}{dt} s(t) = -\, {}_0^{RL} D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\Big|_{(s(t),t)} & 0 < t \leq T
\end{array}
$$

admiten como soluciones a los siguientes pares respectivamente (ver [6, 8]): El par $\{w_\alpha, r_\alpha\}$ *dado por*

$$w_\alpha(x,t) = 1 - \frac{1}{1 - W\left(-2\eta_\alpha, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)} \left[1 - W\left(-\frac{x}{t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right], \quad r_\alpha(t) = 2\eta_\alpha t^{\alpha/2}$$

y η_α *es la única solución de la ecuación* $2x\left[1 - W\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = M_{\alpha/2}(2x)\frac{\Gamma(1-\alpha/2)}{\Gamma(1+\alpha/2)}, \quad x > 0.$
Y el par $\{u_\alpha, s_\alpha\}$ *dado por*

$$u_\alpha(x,t) = 1 - \frac{1}{1 - W\left(-2\xi_\alpha, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)} \left[1 - W\left(-\frac{x}{t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right], \quad s_\alpha(t) = 2\xi_\alpha t^{\alpha/2},$$

y ξ_α *es la única solución positiva de la ecuación* $2x\left[1 - W\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = 2xW\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + W\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1 + \frac{\alpha}{2}\right)$. *Se recuerda que* $W(\cdot, \beta, \delta)$ *y* $M_{\alpha/2}(\cdot)$ *son las funciones de Wright y de Mainardi (ver [4]).*
A pesar de la similaridad de estas soluciones y de que ambas temperaturas verifican ambas ecuaciones gobernantes, se ha probado en [7] que se trata de soluciones diferentes, lo que lleva a concluir que las "condiciones fraccionarias de Stefan" $(PFL - Cap - v)$ *y* $(PFL - RL - v)$ *son diferentes.*
Estas observaciones nos llevan a preguntarnos si se podrán encontrar soluciones autosimilares al problema (5). Hasta el momento no se ha logrado (debido a la dificultad que agrega el término inferior dependiente de x *en la derivada fraccionaria). Por otro lado, cabe preguntarse si las formulaciones físicas dadas hasta el momento (ver por ejemplo [10, 11]) en las que aparece la derivada de Caputo en la condición sobre la interface son correctas, o de cómo se podría conseguir una condición del tipo* $(PFL - v)$ *a partir de supuestos como los realizados en (3).*

REFERENCIAS

[1] ALEXIADES, V. AND SOLOMON, A. D., *Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes,* Hemisphere, Taylor and Francis, Washington, 1993.

[2] J. R. CANNON, *The One–Dimensional Heat Equation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[3] DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An application oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer Science & Business Media, Berlin, 2010.

[4] R. GORENFLO, Y. LUCHKO, AND F. MAINARDI, *Analytical properties and applications of the Wright function*, Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 2 No.4 (1999), pp.383–414.

[5] GURTIN, M. E. AND PIPKIN, A. C. *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 31 No. 2 (1968), pp.113–126.

[6] S. ROSCANI AND E. SANTILLAN MARCUS, *Two equivalen Stefan's problems for the time–fractional diffusion equation*, Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 16 No. 4 (2013), pp.802–815.

[7] S. ROSCANI AND D. TARZIA, *Two different fractional Stefan problems which are convergent to the same classical Stefan problem*, Mathematical Methods in the Applied Science, Vol. 41 (2018), pp.6842–6850.

[8] S. ROSCANI AND D. TARZIA, *An integral relationship for a fractional one-phase Stefan problem*, Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 21 No. 4 (2018), pp.901–918.

[9] D. TARZIA, *Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface,* Ch. 20, Advanced Topics in Mass Transfer, Prof. Mohamed El-Amin (Ed.) Intech, Rijeka (2011), pp. 439–484.

[10] C. J. VOGL, M. J. MIKSIS, AND S. H. DAVIS, *Moving boundary problems governed by anomalous diffusion*, Proceedings of the Royal Society A, Vol. 468 (2012), pp.3348–3369.

[11] V. R. VOLLER, *Fractional Stefan problems*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 74 (2014), pp.269–277.