RELACIÓN INTEGRAL PARA UN PROBLEMA DE STEFAN FRACCIONARIO UNIDIMENSIONAL

Sabrina D. Roscani † y Domingo A. Tarzia‡

†*CONICET - Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina,*
sabrinaroscani@gmail.com
‡*CONICET - Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina,*
dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: En este trabajo se considera un nuevo problema de Stefan fraccionario unidimensional a una fase con condición de temperatura en el borde fijo. Se obtiene una relación integral para la temperatura y la interfase que es equivalente a la condición de Stefan fraccionaria. Se obtienen además soluciones explícitas de tipo similaridad a partir de funciones de Wright.

Palabras clave: *Problema de Stefan, Ecuación de Difusión Fraccionaria, Derivada de Riemann–Liouville, relación integral equivalente.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35, 26A33, 35C05, 33E20, 80A22.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de frontera libre fraccionarios son problemas de frontera libre donde la ecuación gobernante es una ecuación de difusión fraccionaria (EDF) [1, 5, 6]. En Voller et al. [7] se afirma que, si se considera un flujo ideal no local y se lo reemplaza en la expresión para el balance de energía, se obtiene una EDF para la derivada de Caputo en la variable temporal.
Siguiendo estas ideas, se considera el siguiente flujo ideal dado por

$$q = -k\, {}_0^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t), \tag{1}$$

donde ${}_0^{RL}D_t^{1-\alpha}$ es la derivada fraccionaria de Rieman–Liouville respecto de la variable temporal, de orden $1-\alpha$ ($\alpha \in (0,1)$) y extremo 0 definida por

$${}_0^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial x} u(x,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \qquad \alpha \in (0,1).$$

Reemplazando (1) en la expresión para el balance de energía, se obtiene la siguiente EDF:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} \left({}_0^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right). \tag{2}$$

Respecto de la condición fraccionaria de Stefan, se recuerda que la condición clásica de Stefan relaciona la velocidad de la interfase con el flujo de calor de la temperatura de la sigueinte manera:

$$\frac{d}{dt} s(t) = q^l(x,t)\Big|_{(s(t)^-,t)}, \quad 0 < t \le T. \tag{3}$$

donde q^l es el flujo local dado por la ley de Fourier que establece que el flujo de calor es proporcinal al gradiente de temperatura ($q^l(x,t) = -k \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$).
Reemplazando (1) en (3), se obtiene entonces la siguiente "condición de Stefan fraccionaria":

$$\frac{d}{dt} s(t) = -\, {}_0^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\Big|_{(s(t)^-,t)}, \quad 0 < t \le T. \tag{4}$$

El problema de Stefan fraccionario que se considerará en este trabajo está dado por:

$$\begin{array}{lll} (i) & \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x}\left({}_0^{RL}D_t^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right), & 0 < x < s(t),\, 0 < t < T,\, 0 < \alpha < 1, \\ (ii) & u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le b = s(0), \\ (iii) & u(0,t) = g(t), & 0 < t \le T, \\ (iv) & u(s(t),t) = 0, & 0 < t \le T,\, C \ge 0, \\ (v) & \frac{d}{dt}s(t) = -\,{}_0^{RL}D_t^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\big|_{(s(t)^-,t)}, & 0 < t \le T, \end{array} \tag{5}$$

donde f y g son funciones continuas no–negativas definidas en $(0,T]$.

2. Conceptos Preliminares

Definición 1 *Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y sea $\alpha \in (0,1]$.*

1. *Si $f \in L^1[a,b]$, se define la integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α como*

$$ {}_aI^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau. $$

2. *Si f es una función absolutamente continua en $[a,b]$, se define la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α como*

$$ {}_a^{RL}D^\alpha f(t) = \left[D\,{}_aI^{1-\alpha}f\right](t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)d\tau. $$

3. *Si $f \in W^1(a,b) = \left\{f \in \mathcal{C}^1(a,b) \,|\, f' \in L^1[a,b]\right\}$, se define la derivada fraccionaria de Caputo de orden α como*

$$ {}_a^{C}D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)d\tau, & 0 < \alpha < 1 \\ f'(t), & \alpha = 1. \end{cases} $$

Proposición 1 1. *El operador derivada fraccionaria de Riemann–Liouville es inverso a izquierda del operador integral fraccionaria de Riemann–Liouville del mismo orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Esto es, si $f \in L^1[a,b]$ entonces*

$$ {}_a^{RL}D^\alpha\,{}_aI^\alpha f(t) = f(t) \quad p.c.t.p. $$

2. *La integral fraccionaria de Riemann–Liouville no es, en general, un inverso a izquierda de la derivada fraccioanria de Riemann–Liouville.*

   En particular, si $0 < \alpha < 1$, entonces ${}_aI^\alpha({}_a^{RL}D^\alpha f)(t) = f(t) - \dfrac{{}_aI^{1-\alpha}f(a^+)}{\Gamma(\alpha)(t-a)^{1-\alpha}}$.

3. *Si $f \in AC^n[a,b]$, entonces ${}_a^{RL}D^\alpha f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-\alpha} + {}_a^{C}D^\alpha f(t)$.*

Definición 2 *Sean $z \in \mathbb{C}$, $\rho > -1$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la función de Wright como*

$$ W(z;\rho;\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\beta)}. \tag{6} $$

Un caso particular de la función de Wright es la función de Mainardi [4] y está dada por

$$ M_\rho(z) = W(-z,-\rho,1-\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!\Gamma\left(-\rho n+1-\rho\right)}, \quad z \in \mathbb{C},\, 0 < \rho < 1. \tag{7} $$

Proposición 2 *Sea* $0 < \alpha < 1$. *Luego:*

1. $M_{\alpha/2}(x)$ *es una función positiva y estrictamente decreciente en* $\mathbb{R}^+$ *tal que* $M_{\alpha/2}(x) < \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}$ *para todo* $x > 0$. *Más aún,* $\lim\limits_{\alpha \nearrow 1} M_{\alpha/2}(2x) = M_{1/2}(2x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$.

2. $1 - W\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)$ *es una función positiva y estrictamente creciente en* $\mathbb{R}^+$ *tal que* $0 < 1 - W\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) < 1$, *para todo* $x > 0$. *Más aún,* $\lim\limits_{\alpha \nearrow 1} \left[1 - W\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = erf\,(x)$.

3. Una relación Integral para el Problema de Stefan Fraccionario

Se retoma el problema (5) y se consideran los siguientes conjuntos:
$\Omega_T = \{(x,t)/0 < x < s(t),\ 0 < t \leq T\}$ y su frontera parabólica
$\partial_p \Omega_T = \{(0,t), 0 < t \leq T\} \cup \{(s(t),t), 0 < t \leq T\} \cup \{(x,0), 0 \leq x \leq b\}$.
Sin pérdida de generalidad se supone que $\lambda = 1$ y se considera el siguiente caso particular para el problema de Stefan fraccionario:

$$\begin{array}{lll} (i) & \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left({}_0^{RL}D_t^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right), & 0 < x < s(t),\ 0 < t < T,\ 0 < \alpha < 1, \\ (ii) & u(0,t) = 1, & 0 < t \leq T, \\ (iii) & u(s(t),t) = 0, & 0 < t \leq T,\ s(0) = 0 \\ (iv) & \frac{d}{dt}s(t) = -\,{}_0^{RL}D_t^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\big|_{(s(t),t)}, & 0 < t \leq T, \end{array} \tag{8}$$

Se utiliza la Proposición 2 y [3, Lemma 17] para probar el siguiente Teorema:

Teorema 1 *El par dado por*

$$u(x,t) = 1 - \frac{1}{1 - W\left(-2\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)}[1 - W\left(-\frac{x}{t^{\alpha/2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)], \qquad s(t) = 2\xi t^{\alpha/2}, \tag{9}$$

donde ξ *es la única solución de la siguiente ecuación*

$$2x\left[1 - W\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right] = 2xW\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1\right) + W\left(-2x, -\frac{\alpha}{2}, 1 + \frac{\alpha}{2}\right), \quad x > 0 \tag{10}$$

es una solución del problema (8).

El siguiente teorema exhibe una relación integral para la interfase s y la función u, obtenida a partir de la condición fraccionaria de Stefan $(5 - v)$.

Teorema 2 *Sea* $\{u, s\}$ *una solución del problema* (5) *tal que* $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}u(x,t) \in \mathcal{C}^1(\Omega_T)$, $g \in AC^1(0,T)$ *y,* ${}^{RL}D_t^{1-\alpha}g$ *y* ${}^{RL}D_t^{1-\alpha}u(x,t)|_{(s(t),t)} \in L^1(a,b)$. *Entonces se tiene la siguiente relación integral para la frontera libre* $s(t)$ *y la función* $u(x,t)$ *dada por:*

$$s^2(t) = b^2 + 2\int_0^t {}^{RL}D_t^{1-\alpha}g(\tau)d\tau + 2\int_0^b zf(z)dz - 2\int_0^{s(t)} zu(z,t)dz - 2\int_0^t {}^{RL}D_t^{1-\alpha}u(x,t)\big|_{(s(\tau),\tau)}d\tau. \tag{11}$$

Bosquejo de la demostración. La ecuación (11) se obtiene aplicando el Teorema de Green al campo vectorial $F = (P, Q)$ donde $P(x,t) = -x\,{}^{RL}D_t^{1-\alpha}u_x(x,t) + {}^{RL}D_t^{1-\alpha}u(x,t)$ y $Q(x,t) = -x\,u(x,t)$ en la región $\Omega_\epsilon = \left\{(x,\tau) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \epsilon < \tau < t, 0 < x < s(\tau), \quad \epsilon > 0\right\}$. Finalmente se hace tender $\epsilon \searrow 0$.

Nota 1 *Si se toma* $\alpha = 1$ *en la relación integral (11) resulta*

$$s^2(t) = b^2 + 2\int_0^t g(\tau)d\tau + 2\int_0^b zf(z)dz - 2\int_0^{s(t)} zu(z,t)dz, \tag{12}$$

donde (12) es la relación integral clásica de Stefan para el problema clásico de Stefan considerado en [2, Lemma 17.1.1], que resulta ser equivalente a la condición clásica de Stefan

$$\frac{d}{dt}s(t) = -\frac{\partial}{\partial x}u(s(t),t), \quad \forall\, t > 0. \tag{13}$$

Es natural entonces preguntarse si la "condición fraccionaria de Stefan" $(5-v)$ *es equivalente a la "relación integral fraccionaria" (11).*

Teorema 3 *Sea* $\{u, s\}$ *una solución del problema* $\{(5-i),(5-ii),(5-iii),(5-iv),(11)\}$ *tal que* $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}u(x,t) \in \mathcal{C}^1(\Omega_T)$, $g \in AC^1(0,T)$, ${}^{RL}D_t^{1-\alpha}g$, ${}^{RL}D_t^{1-\alpha}u(x,t)|_{(s(t),t)} \in L^1(a,b)$ *y* $s(t) > 0$ *para todo* $t > 0$. *Entonces las funciones* $s = s(t)$ *y* $u = u(x,t)$ *verifican la condición fraccionaria de Stefan (5 -v).*

Nota 2 *Vale destacar que la hipótesis* $s(t) > 0$ *para todo* $t > 0$ *mencionada en el teorema anterior no es una hipótesis necesaria en la formulación clásica de este mismo teorema ya que, de la condición de Stefan (13) junto con el principio del máximo para* u, *se deduce que* $s' > 0$ *y por ende que* s *es una función creciente de* t. *Esta propiedad tan sencilla no se verifica para la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville ya que funciones decrecientes pueden tener derivada positiva. Por ejemplo, si se toma* $\alpha \in (0,1)$ *y* $\gamma \in (0,1)$ *tales que* $0 < \alpha - \gamma$, *y se considera la función* $f(t) = t^{-\gamma}$, *resulta que* f *es una función decreciente en* $\mathbb{R}^+$ *y sin embargo*

$${}^{RL}D^{1-\alpha}(t^{-\gamma}) = \frac{\Gamma(-\gamma+1)}{\Gamma(-\gamma-(1-\alpha)+1)}t^{-\gamma+\alpha-1} = \frac{\Gamma(-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma)}t^{-\gamma+\alpha-1} > 0 \quad \textit{para todo} \quad t > 0.$$

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido subsidiado parcialmente por los Proyectos PIP N° 0275 de CONICET–Univ. Austral, y por AFOSR–SOARD Grant $FA9550-14-1-0122$.

REFERENCIAS

[1] C. ATKINSON, *Moving boundary problems for time fractional and composition dependent diffusion,* Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 15(2) (2012), pp.207–221.

[2] J. R. CANNON, *The One–Dimensional Heat Equation*, Cambridge University Press, 1984.

[3] D. GOOS, G. REYERO, S. ROSCANI, AND E. SANTILLAN MARCUS, *On the initial–boundary–value problem for the time–fractional diffusion equation on the real positive semiaxis*, International Journal of Differential Equations, Vol. 2015, article ID 439419, pp. 1–14.

[4] R. GORENFLO, Y. LUCHKO, AND F. MAINARDI, *Analytical properties and applications of the Wright function*, Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 2 (1999), pp.383–414.

[5] S. ROSCANI AND D. TARZIA, *A generalized neumann solution for the two-phase fractional lamé-clapeyron-stefan problem*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 24(2) (2014), pp.237–249.

[6] V. R. VOLLER, *Fractional Stefan problems*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 74 (2014), pp.269–277.

[7] V. R. VOLLER, F. FALCINI, AND R. GARRA, *Fractional Stefan problems exhibing lumped and distributed latent–heat memory effects*, Physical Review E, Vol. 87 (2013), 042401.