

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

V SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

D. A. Tarzia (Editor)

Rosario, 19 al 21 de Diciembre de 1994

25

Rosario - República Argentina
1995

TOMA DE AGUA Y CRECIMIENTO DE RAICES DE CULTIVOS

J.C. Reginato

Dpto de Química-Física, Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químico y Naturales

Univ. Nac. Río Cuarto, Ruta 8 - Km 601, (5800) - RIO CUARTO - Cordoba - ARGENTINA.

E-mail: Reginato@unrcc.edu.ar Fax: 54 (058) 645980/676224

D.A. Tarzia

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales,

Universidad Austral, Paraguay 1950, (2000) - Rosario y

PROMAR (CONICET-UNR) - ARGENTINA

E-mail: Tarzia@uaufce.edu.ar

Se presenta un modelo mecánico simple para el crecimiento de raíces de cultivos debido a la toma de agua. El modelo es deducido para una única raíz y considera el efecto de los parámetros de sistema a través del acoplamiento entre el transporte de agua en suelo y la absorción de la misma por la raíz y no a través de los modelos clásicos de resistencias al flujo de agua en rizósfera, interface suelo-planta así como en el interior de la raíz. El efecto

de la capacidad suelo-agua es incluida para suelos de bajo contenido de agua con una aproximación basada en el modelo de tubos capilares de Alexander para el flujo de agua. Se obtienen soluciones analíticas a través del planteo de un modelo de frontera libre para el crecimiento de la raíz. Dichas soluciones, para el crecimiento radial vs. tiempo así como valores del potencial agua sobre la interfase raíz-suelo vs radio raíz son graficadas en función de parámetros característicos del sistema suelo-planta-agua.

INTRODUCCION

Una gran variedad de trabajos sobre el flujo de agua en el sistema suelo-planta han descripto al mismo por un análogo de la ley de Ohm (Van den Honert, 1948 [1]) y han sido definidas diferentes resistencias al flujo de agua hacia una única raíz en suelo (Gardner, 1960 [2]; Newman, 1969 [3]), en la interfase raíz-suelo (Herkelrath, 1977 [4]; Weatherley, 1978 [5]) y en el interior de la raíz (Newman, 1976 [6]; Fiscus, 1977 [7]), así como la importancia de las mismas sobre el transporte de agua (Passioura, 1980 [8]), pero sin considerar simultáneamente el transporte de agua, toma de agua y crecimiento radical acoplados. Recientemente, se han presentado trabajos sobre transporte de nutrientes y crecimiento radical acoplados mediante la modelización con problemas de frontera libre y solucionados a través del método cuasistacionario (Reginato et al., 1990 [9], 1991 [10]) y el método del balance integral (Reginato et al., 1993 [11], [12]). Similarmente, en forma análoga a los trabajos citados últimamente, el objetivo del presente modelo es estimar cualitativamente en una primera etapa los efectos de los diferentes parámetros

del sistema suelo-planta sobre el transporte de agua y crecimiento radical acoplados a través de un modelo de frontera libre a una fase (el suelo).

ANALISIS

De acuerdo al modelo de flujo de agua hacia una única raíz, el flujo en la dirección radial hacia la raíz por unidad de longitud de raíz está dado (Nye y Tinker, 1977 [13]) por:

$$v = -\pi r k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1)$$

donde v es el flujo de agua ($\text{cm}^3 \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}$), r es la distancia radial desde el centro de la raíz (cm) como se muestra en la figura 1, k es la conductibilidad hidráulica (cm s^{-1}) y ψ es el potencial agua (cm).

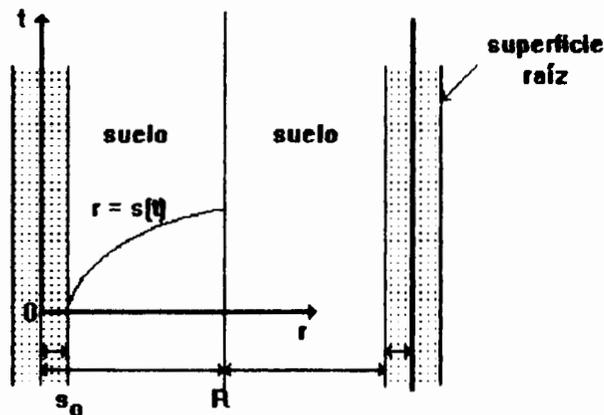


Figura 1

La ecuación de continuidad correspondiente es:

$$2\pi \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

donde θ es el contenido de agua del suelo. Como θ es función de ψ , $\theta = \theta(\psi)$ se cumple:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3)$$

donde $C(\psi)$ es la capacidad diferencial de humedad del suelo y donde se asume que el suelo no presenta histéresis en el humedecimiento y secado del mismo (ψ es función univaluada).

Reemplazando la expresión (3) en la ecuación (2) y teniendo en cuenta la ecuación (1) resulta:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{k(\psi)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial k(\psi)}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + k(\psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (4)$$

Las relaciones entre k , ψ y θ están dadas (Campbell, 1974 [15]) por:

$$\psi = \psi_e \left(\frac{\theta}{\theta_s} \right)^b = \psi_o \theta^{-b} \quad \text{con} \quad \psi_o = \psi_e \theta_s^b \quad (5)$$

$$k(\psi) = k_s \left(\frac{\psi_e}{\psi} \right)^n = k_o \psi^{-n} \quad \text{con} \quad k_o = k_s \psi_e^n \quad (6)$$

donde ψ_e es el potencial suelo-agua de entrada de aire (cm), θ_s es el contenido de saturación suelo-agua ($\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$), k_s es la conductividad hidráulica saturada del suelo, $-b$ es la pendiente de la curva característica suelo-agua $\psi = \psi(\theta)$ en un sistema coordenado log-log y n es la pendiente de la curva $k(\psi)$ en un sistema coordenado log-log.

De la expresión (5) se obtiene la relación inversa:

$$\theta = \theta_s \psi^{-(1/b)} \quad \text{con} \quad \theta_s = \psi_e^{(1/b)} \theta_s \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6) para $\star k / \star \psi$ y la ecuación (7) para $C(\psi)$, la ecuación (4)

puede expresarse:

$$-\alpha \psi^{(1-n+1/b)} \frac{\psi_r}{r} + \beta \psi^{(-n+1/b)} \psi_r^2 - \alpha \psi^{(1-n+1/b)} \psi_{rr} = \psi_t \quad (8)$$

donde $\psi_r = \partial \psi / \partial r$, $\psi_{rr} = \partial^2 \psi / \partial r^2$, $\psi_t = \partial \psi / \partial t$. Con estas suposiciones, el crecimiento de raíces de cultivos es dado por el siguiente modelo de frontera libre (en coordenadas cilíndricas):

$$-\alpha \psi^{(1-n+1/b)} \frac{\psi_r}{r} + \beta \psi^{(-n+1/b)} \psi_r^2 - \alpha \psi^{(1-n+1/b)} \psi_{rr} = \psi_t, \quad s(t) < r < R, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9.i)$$

$$\psi(r, 0) = \varphi(r), \quad s_0 \leq r \leq R, \quad (9.ii)$$

$$\psi(R, t) = \psi_R, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9.iii)$$

$$-2\pi s(t)k(\psi(s(t), t))\psi_r(s(t), t) = \pi s^2(t)G(\psi(s(t), t)), \quad 0 < t < T \quad (9.iv)$$

$$F_r \pi s^2(t)G(\psi(s(t), t)) = -\psi(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt}, \quad 0 < t < T \quad (9.v)$$

$$s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < R \quad (9.vi)$$

Aunque han sido propuestos numerosas funciones de extracción de agua por la raíz [15], una de las mas sencillas y por simplicidad matemática es la de Feddes, 1978 [16]) con $G(\psi)$ definida como:

$$G(\psi) = 0 \quad \text{para } 0 > \psi_s > \psi_1 \text{ con } \psi_1 = \text{potencial agua punto anaerobiosis}$$

$$G(\psi) = S_{\max} \quad \text{para } \psi_1 > \psi_s > \psi_2 \text{ con } \psi_2 = \text{potencial agua punto límite}$$

$$G(\psi) = S_{\max} \frac{(\psi_1 - \psi_3)}{(\psi_2 - \psi_3)} \quad \text{para } \psi_2 > \psi_s > \psi_3 \text{ con } \psi_3 = \text{potencial agua punto marchitez}$$

$$G(\psi) = 0 \quad \text{para } \psi_3 > \psi_s, \quad (10)$$

La figura 2 muestra la variación de $G(\psi)$ vs. ψ según se indicó arriba.

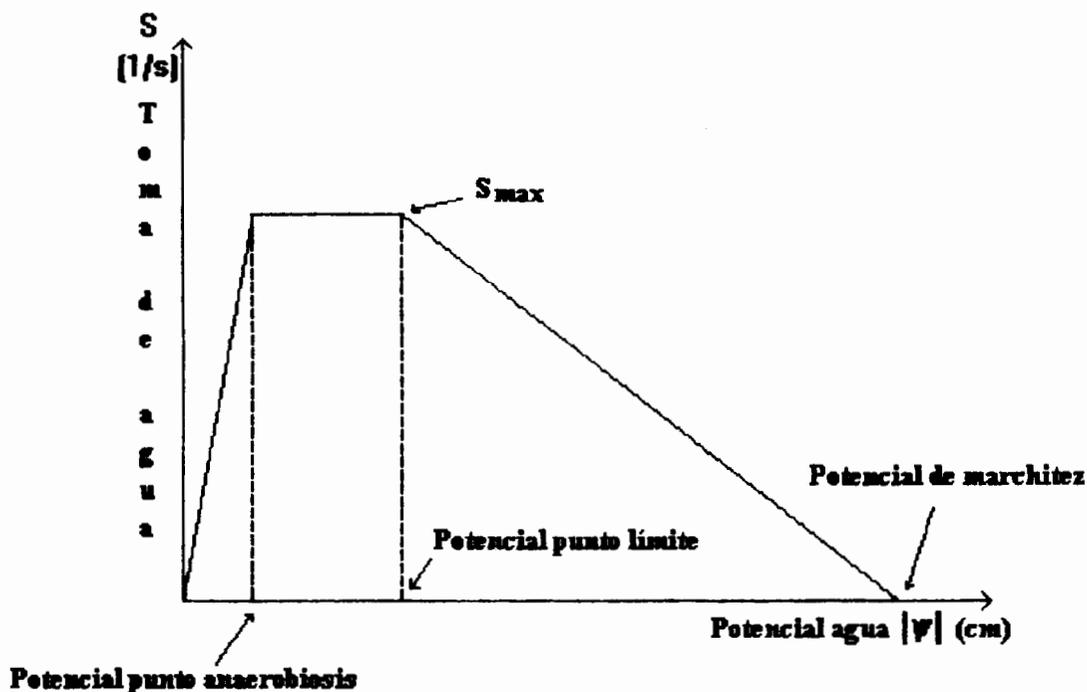


Figura 2

T es el tiempo para el cual existe solución. La ecuación (9.i) es la ecuación de conducción hidráulica expresada en términos del potencial agua ψ ; teniendo en cuenta la dependencia de la misma del contenido de agua de suelo θ . Nótese que es una ecuación a derivadas parciales con coeficientes fraccionarios que resultan de determinaciones experimentales. La condición (9.ii) es el perfil inicial de potenciales entre la raíz y el radio del cilindro de suelo R de donde extrae agua la raíz. La ecuación (9.iii) es la condición de contorno sobre R representando un potencial agua constante (como podría ser el obtenido bajo condiciones de riego por goteo). La ecuación (9.iv) representa el balance de energía por unidad de masa dado a través del potencial agua donde el miembro de la izquierda representa el flujo sobre la raíz y el término de la derecha el mismo flujo a través de la absorción de agua por la raíz. La ecuación (9.v) representa el mismo balance expresado en función de la velocidad de crecimiento $ds(t)/dt$. La condición (9.vi) es la condición inicial para la frontera libre $s(t)$ en la cual F_r es la fracción de agua incorporada y usada por el metabolismo radical para el crecimiento.

Las dos condiciones de frontera libre (9.iv) y (9.v) pueden ser escritas (para $G(\psi) = S_{\max}$) y para el caso muy particular (que conduce a una fácil resolución) de suelos arcillosos ($n = 2$) como:

$$\psi_r(s(t), t) = g(\psi(s(t), t)) = -\frac{s}{2k_o} S_{\max} \psi^2(s) \quad (11)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = f(\psi(s(t), t)) = -F_r \pi \frac{s^2}{\psi(s)} S_{\max} \quad (12)$$

y para $G(\psi) = S_{\max} (\psi_s - \psi_3) / (\psi_2 - \psi_3)$ como:

$$g(\psi) = A s \left[\psi_3 \psi_s^2 - \psi^3 \right] \quad \text{con} \quad A = -\frac{S_{\max}}{2k_o (\psi_2 - \psi_3)} \quad (13)$$

$$f(\psi) = B s^2 \left[1 - \frac{\psi_3}{\psi_s} \right] \quad \text{con} \quad B = \frac{-F_r \pi S_{\max}}{\psi_2 - \psi_3} \quad (14)$$

Para resolver el modelo de frontera libre (9.i,ii,iii,iv,v,vi) aplicamos el método cuasiestacionario (Stefan, 1889 [17]; Carslaw and Jaeger, 1959 [18]; Tarzia, 1988 [19]), a través del cual se resuelve la ecuación (9.i) con $\psi_t = 0$ junto a las restantes ecuaciones (9.ii,iii,iv,v,vi) (Este método, es decir, el método cuasistacionario, contiene implícitamente todos los modelos de capilaridad que relacionan n con b y en particular, el modelo válido para suelos con bajos contenido de agua ($n = 1 + 3/b$) (Alexander y Skagg, 1986 [20]) lo que produce las siguientes soluciones para $G(\psi) = S_{\max}$:

$$\psi(s(t), t) = \left(\frac{1}{\psi_R} + \frac{s^2 S_{\max}}{2k_o} \ln \frac{s}{R} \right)^{-1} \quad (15)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -F_r s^2 S_{\max} \left(\frac{1}{\Psi_R} + \frac{s^2 S_{\max}}{2k_0} \ln \frac{s}{R} \right)^{-1} \quad (16)$$

y para $G(\psi) = S_{\max} (\psi_s - \psi_3) / (\psi_2 - \psi_3)$ las siguientes soluciones:

$$\psi(s(t), t) = \left\{ \frac{1}{\Psi_R} - \left[\frac{1}{\Psi_R} + As^2 \psi_3 \ln \left(\frac{s(t)}{R} \right) - \sqrt{\frac{1}{\Psi_R} + As^2 \psi_3 \ln \left(\frac{s(t)}{R} \right) - 4 \ln \left(\frac{s(t)}{R} \right) As^2 \left(\frac{\Psi_3}{\Psi_R} - 1 \right)} \right] / 2 \right\}^{-1} \quad (17)$$

$$f(\psi(s(t), t)) = Bs^2 \left[1 - \frac{\Psi_3}{\psi(s(t), t)} \right] \text{ con } \psi_s \text{ dada por (17)}. \quad (18)$$

Las ecuaciones (16) y (18) son resueltas por el método de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales ordinarias y las figuras 3 y 4 muestran algunos resultados teóricos para el potencial agua en la interfase raíz-suelo vs. radio raíz así como la frontera libre $s(t)$ vs. tiempo en función de algunos parámetros característicos del sistema suelo-agua-planta como la conductibilidad hidráulica k_0 para el caso de toma de agua proporcional a ψ .

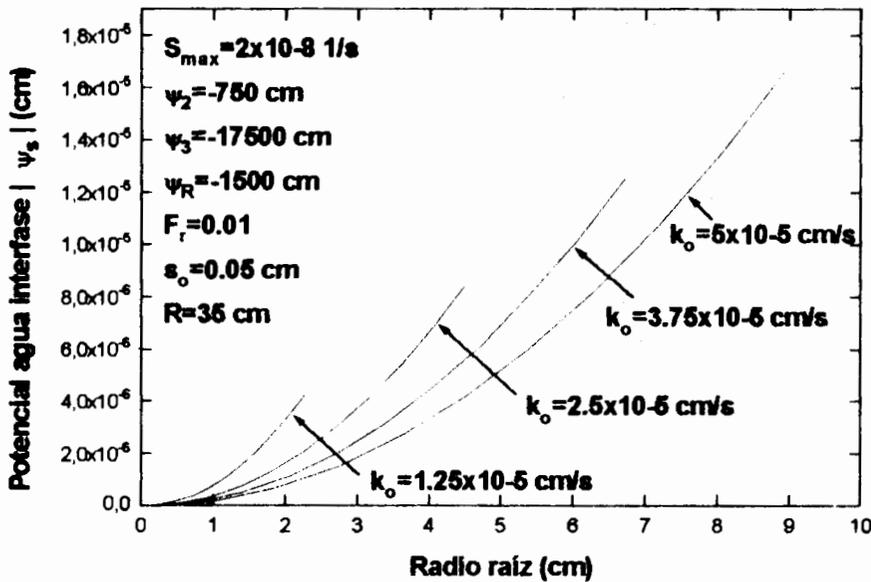


Figura 3

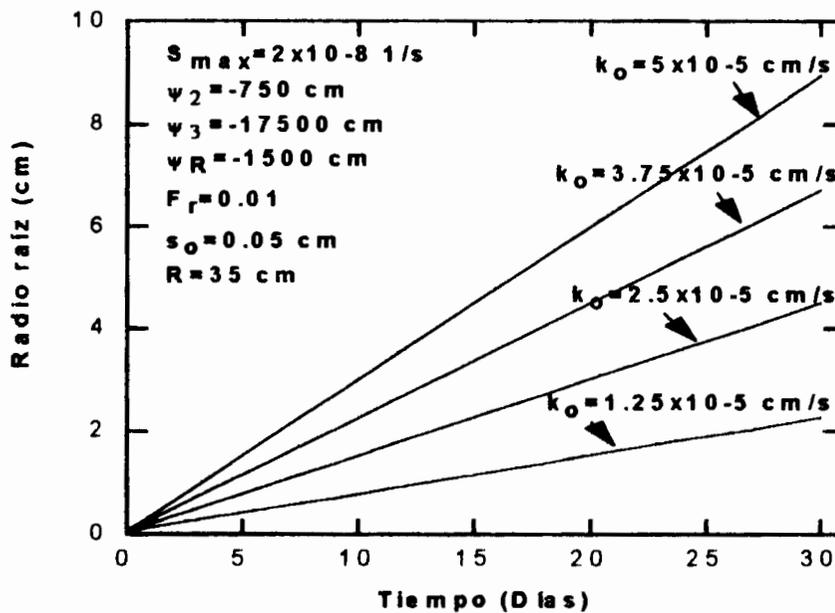


Figura 4

Un análisis mas detallado del efecto de los restantes parámetros se muestran en los siguientes diagramas de sensibilidad paramétrica en los cuales se varían cada uno de los parámetros con los restantes permaneciendo constantes en los valores 0.5, 1, 1.5 y 2 como se muestra en las figuras 5

y 6 que ilustran el crecimiento radial a los 12 días para los casos de toma de agua constante y toma de agua variable lincalmente con ψ , respectivamente.

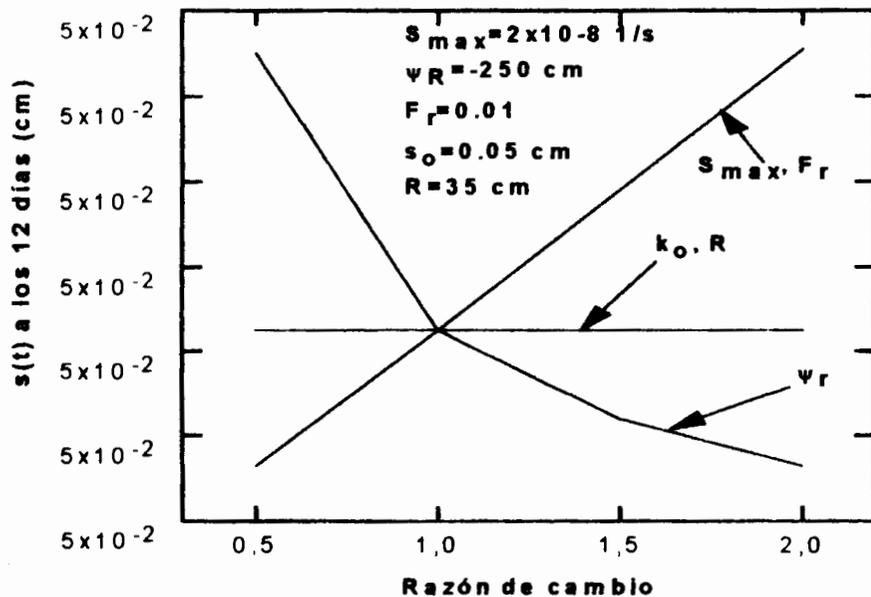


Figura 5

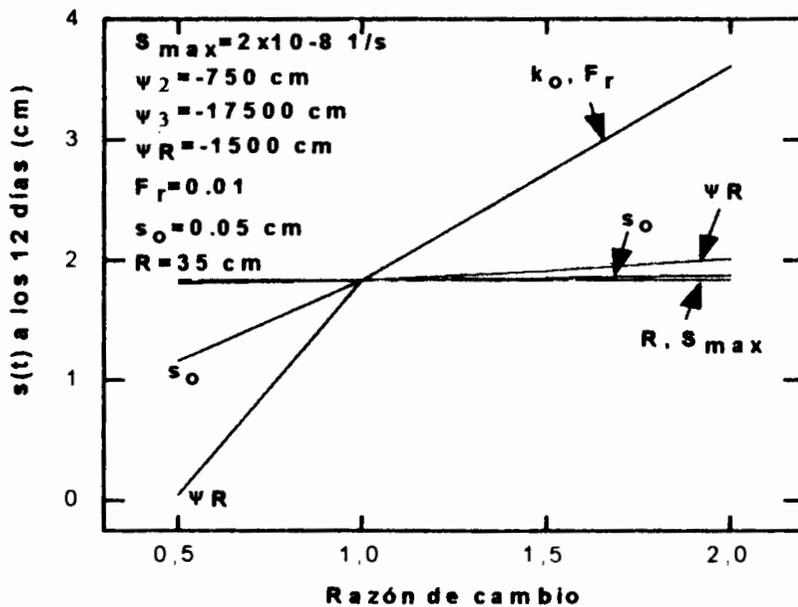


Figura 6

CONCLUSIONES

De un análisis más completo de los resultados, se concluye que el crecimiento radial es lineal para ambos casos de toma de agua constante y variando linealmente con el potencial agua. Asimismo se encuentra que la eficiencia del mecanismo de absorción para el crecimiento radial es mayor en el caso de toma de agua variando linealmente con el potencial agua. De la comparación de los diagramas de sensibilidad se concluye que a toma de agua constante, mientras más seco está el suelo (potencial agua mas grande) menor es el crecimiento. En cambio, para toma de agua proporcional al potencial agua, mientras más seco está el suelo, el crecimiento puede ser ligeramente mayor. Este comportamiento (en este tipo de suelos), puede ser de gran importancia tecnológica para el desarrollo genético de nuevas semillas que tengan valores óptimos del potencial agua máximo, S_{max} , ψ_2 y ψ_3 adaptados a suelos particulares. Debe remarcarse que, aunque las soluciones obtenidas solo brindan una aproximación cualitativa de la situación real y el modelo sólo ha sido desarrollado para suelos arcillosos, estas conclusiones son útiles para el diseño de modelos más complejos (por ejemplo, en cualquier tipo de suelos) que predigan la toma de agua en forma más precisa, así como para la instrumentación de técnicas agrícolas que permitan optimizar el funcionamiento de cultivos desde el punto del aprovechamiento del agua del suelo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Van den Honert, T.H. 1948. "*Water transport in plants as a catenary process*". Discuss. Faraday Soc. 3:146-153.

- [2] Gardner, W.R. 1960. *"Dynamic aspects of water availability to plants"*. Soil Sci. 89:63-73.
- [3] Newman, E.I. 1969. *"Resistance to water flow in soil and plant. I. Soil resistance in relation to amounts of root: theoretical estimates"*. J. Appl. Ecol. 16:1-12
- [4] Herkelrath, W.N, Miller, E.E. y Gardner W.R. 1977. *"Water uptake by plants; II. The root contact model"*. Soil Sci. Soc. Am. J. 41:1039-1043.
- [5] Weatherley, P.E. 1978. *"The hydraulic resistance of the soil-root interface: a cause of water stress in plants"*. The soil-root interface symposium, Oxford, England.
- [6] Newman, E.I. 1976. *"Interaction between osmotic and pressure-induced flow in plant roots"*. Plant Physiol. 57:738-739.
- [7] Fiscus, E.L. 1977. *"Effects of coupled solute and water flow in plant roots with special reference to Brouwe's experiment"*. J. Exp. Bot. 28:71-77.
- [8] Passioura J.B. 1980. *"The transport of water from soil to shoot in wheat seedlings"*. J. Exp. Bot. 31:333-345
- [9] Reginato J.C., Tarzia D.A y Cantero A. 1990. *"On the free boundary problem for the Michelis-Menten absorption model for root growth"*. Soil Sci. 150(4):722-729.
- [10] Reginato J.C., Tarzia D.A y Cantero A. 1991. *"On the free boundary problem for the Michelis-Menten absorption model for root growth.High concentrations"*. Soil Sci. 152(2):61-72.
- [11] Reginato J.C., Tarzia D.A. 1993. *"The balance integral method applied to root growth of crops"*. Int. J. Engng. Sci. 31(1):61-70

- [12] J.C.Reginato, D.A.Tarzia, M.A.Dzioba. 1993. *"Analytical study of the effects of some soil plant parameters on root growth owing to absorption of one mobile ions. A free boundary model"*. Plant and Soil , 15,(1993),185-196
- [13] Nye P.H. y Tinker P.B. 1977. *"Solute movement in the soil-root system"*. Studies in Ecology Vol. 4. University of California Press, Berkeley.
- [14] Campbell, G.S. 1974. *"A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data"*. Soil Sci. 117:311-314.
- [15] Molz, J.F. 1981. *"Models of water transport in the soil-plant system. A review"*. Water Res. Research, Vol 17, 5, 1245-1260
- [16] Feddes R.A, Kowalik, P.J., Malinka, K.K y Zaradny, H. 1978. *"Simulation of field water use and crop Yield"*. Centre for Agricultural Publishing and Documentation. Wageningen, the Netherlands.
- [17] Stefan J. 1889. *"Uber einige. probleme der theorie der warmelettung"*. Zitzungberichte der Kaiserlichen Akademic der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche classe 98:473-484
- [18] Carlaw H.S y Jaeger J.C. 1959. *"Conduction of heat in solids"*. Clarendon Press, Oxford.
- [19] Tarzia D.A. 1988. *"A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan Problem"*. Progetto Nazionale M.P.I. Equazioni di evoluzione e applicazione fisico-matematiche. Firenze, Italy.
- [20] Alexander L.; Skaggs R.G. 1986. *"Predicting unsaturated hydraulic conductivity from the soil water characteristics"*. Trans. ASAE 29:176-184