

# UN MODELO DE FRONTERA MOVIL PARA EL PH DEL SUELO CON CULTIVOS

Juan C. Reginato†, Jorge L. Blengino Albrieu† y Domingo A. Tarzia‡

†Departamento de Física, Univ. Nacional de Río Cuarto, Ruta Nac.36, Km 603, X5804BYA Río Cuarto, Córdoba, Argentina, jreginato@exa.unrc.edu.ar

‡CONICET-Departamento de Matemática, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Santa Fe, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Las relaciones entre toma de nutrientes, metabolismo de las plantas y pH son centrales en el estudio de la nutrición de plantas y en particular el pH del suelo cercano a las raíces de plantas tiene un gran efecto sobre diferentes procesos que se manifiestan en la rizósfera de las raíces. Este trabajo examina la capacidad de las raíces para cambiar el pH del suelo que rodea a las raíces mediante la formulación de un modelo de convección-difusión para un sistema radical en crecimiento. A diferencia de modelos previos (Nye, 1981; Kim y Silk, 1999), el modelo se plantea mediante la formulación de un problema unidimensional de frontera móvil. El mismo es resuelto mediante adimensionalización e inmovilización del dominio y posterior aplicación del método de los elementos finitos. Usando valores experimentales típicos se obtienen predicciones para el perfil de pH entre la raíz y el borde rizosférico versus el tiempo en función de parámetros relevantes como el número de Peclet y el pH inicial del suelo. Los gráficos obtenidos muestran valores similares en la magnitud del cambio de pH predicho por modelos previos aunque una mayor acidificación volumétrica a consecuencia del aumento de densidad de raíces en el sistema radical.

Palabras claves: *pH del suelo radical, frontera móvil, inmovilización del dominio, elementos finitos*  
2000 AMS Subjects Classification: 35R35, 80A20, 80M10

## 1. INTRODUCCIÓN

Las relaciones entre toma de nutrientes, metabolismo de la planta y pH del suelo son centrales en el estudio de la nutrición de plantas. La capacidad de las raíces de cambiar el pH del suelo en su vecindad afecta tanto la toma de nutrientes benéficos como fitotóxicos. Se ha observado que las raíces tienden a acidificar un medio alcalino como un suelo calcáreo así como pueden elevar el pH de un medio ácido [1],[2]. De hecho, la teoría de intercambio [3] propuso que las raíces absorben cationes desde los coloides del suelo intercambiándolos en su superficie por protones provistos por la raíz a fin de balancear el exceso de influjo de cationes sobre aniones y viceversa. Nye y colegas desarrollaron una teoría para predecir los perfiles de pH inducidos por la planta en la rizósfera [4]. Asumiendo que los iones hidrógeno difunden de acuerdo a una ley de Fick modificada, Nye usa una solución analítica [5] para la ecuación de difusión en dominio fijo con flujo sobre la superficie de un cilindro para encontrar el pH como una función de la distancia,  $r$ , desde la superficie de la raíz y el tiempo  $t$ , dada por

$$pH = pH_{\infty} - \left( \frac{s_o F}{2b_{HS} D_{HS}} \right) \ln \left( \frac{2.25 D_{HS} t}{r^2} \right),$$

donde  $F$  es el flujo de  $H^+$  (desde la superficie de la raíz);  $s_o$  es el radio de la raíz;  $pH_{\infty}$  es el pH del suelo inicial,  $b_{HS}$  es el poder buffer del suelo y  $D_{HS}$  es el coeficiente de difusión de acidez del suelo. El coeficiente de difusión de la acidez varía con el contenido volumétrico de agua y un factor de impedancia de difusión. El modelo de Nye predice grandes efectos sobre los perfiles de pH desde valores iniciales de pH y contenido de agua y una dependencia logarítmica con el tiempo. Los gradientes de pH predichos son profundos en la rizósfera, cuya extensión se predice tanto como 0.5 a 3 mm. desde la superficie de la raíz, particularmente si el coeficiente de difusión de acidez y el poder buffer son bajos. Asimismo, Kim y Silk [6] han estudiado los perfiles de pH radialmente y longitudinalmente desde el ápice de una raíz creciendo encontrando a través de sus predicciones que el perfil de pH se hace estacionario después de 6 horas. En este trabajo se propone estudiar la variación de los perfiles de pH en suelo pero considerando el suelo disponible a cada raíz (o sistema radical) mediante la formulación de un modelo de frontera móvil. A los fines de obtener un modelo simplificado solo se considera el eflujo y transporte de protones  $[H^+]$  en suelo dejando el estudio del efecto de los aniones  $[HCO_3^-]$  para una etapa posterior.

## 2. DESARROLLO DEL MODELO

Se asume un volumen fijo de suelo en el cual nuestro sistema radical se distribuye como un apilamiento homogéneo de raíces. La ecuación de transporte difusivo y masal en suelo de iones liberados (protones) desde la raíz en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial[H^+](r,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2[H^+](r,t)}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{s_o v}{D\theta f}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial[H^+](r,t)}{\partial r}, \quad (1)$$

donde  $[H^+]$  es la concentración de protones,  $v$  es la velocidad de flujo convectivo,  $D$  es el coeficiente de difusión,  $\theta$  es el contenido de agua del suelo y  $f$  es un factor de tortuosidad. La ecuación (1) se puede notar:

$$[H^+]_t = D_e [H^+]_{rr} + D_e (1 + Pe) \frac{[H^+]_r}{r} \quad (2)$$

con  $Pe = \frac{s_o v}{D\theta f} = \frac{s_o v}{D_e}$  número de Peclet,  $[H^+]_t = \frac{\partial[H^+](r,t)}{\partial t}$ ,  $[H^+]_r = \frac{\partial[H^+](r,t)}{\partial r}$ ,  $[H^+]_{rr} = \frac{\partial^2[H^+](r,t)}{\partial r^2}$  y

el producto  $D\theta f = D_e$  es el coeficiente de difusión efectivo. Para la condición de contorno en el borde exterior del rizocilindro de nuestro problema y cuyo radio es  $R(t)$  se impone un flujo nulo ( $[H^+]_r(1,t) = 0$ , es decir, no pueden salir protones ni entrar protones liberados por raíces vecinas) y para la condición sobre nuestra raíz se propone la misma condición de un eflujo de protones como la propuesta por Nye [4]:

$$-D_e [H^+]_r(s_o, t) - v[H^+](s_o, t) = F \quad (3)$$

A medida que nuestro sistema radical aumenta su longitud (aumenta la densidad de raíces) el radio del rizocilindro disponible a cada raíz disminuye con el tiempo según [7]:

$$R(t) = R_o \sqrt{\frac{l(t)}{l_o}} \quad (4)$$

Finalmente nuestra primera aproximación del problema, pero ahora en dominio variable, está dada por el siguiente modelo de frontera móvil:

$$\begin{aligned} [H^+]_t &= D[H^+]_{rr} + D_e (1 + Pe) \frac{[H^+]_r}{r}, \quad 0 < r < R(t), \quad 0 < t < T \\ [H^+](r, 0) &= [H_o^+](r), \quad 0 \leq r \leq R(0) = R_o \\ [H^+]_r(R(t), t) &= 0, \quad 0 < t < T \\ -D_e [H^+]_r(s_o, t) - v[H^+](s_o, t) &= F, \quad 0 < t < T \\ R(t) &= R_o \sqrt{\frac{l(t)}{l_o}}, \quad 0 < t < T \end{aligned} \quad (5)$$

Para obtener la solución del problema (5), previamente se adimensionaliza e inmoviliza el dominio simultáneamente mediante el siguiente cambio de variables:

$$[H^*](r^*, t^*) = \frac{v_o}{F} [H^+](r, t), \quad r^* = \frac{r - s_o}{R(t) - s_o}, \quad t^* = \frac{v_o^2}{D} t, \quad l^*(t^*) = \frac{l(t)}{s_o}, \quad R^*(t^*) = \frac{R(t)}{s_o} = \frac{R_o}{s_o} \sqrt{\frac{l_o}{s_o} \frac{1}{l^*(t^*)}} \quad (6)$$

Con este cambio de variables nuestro problema de frontera móvil resulta:

$$\begin{aligned} [H^*]_{t^*} &= \frac{1}{Pe^2} \frac{[H^*]_{r^* r^*}}{[R^*(t^*) - 1]^2} + \left[ r^* \frac{dR^*}{dt^*} + \frac{(1 + Pe)}{Pe^2} \frac{1}{1 + r^* [R^*(t^*) - 1]} \right] \frac{[H^*]_{r^*}}{[R^*(t^*) - 1]}, \quad 0 < r^* < R^*(t^*), \quad 0 < t^* < T^* \\ [H^*](r^*, 0) &= [H_o^*](r^*), \quad 0 \leq r^* \leq R^*(0) = 1 \\ [H^*]_{r^*}(1, t^*) &= 0 \quad 0 < t^* < T^* \\ [H^*]_{r^*}(0, t^*) &= -Pe [R^*(t^*) - 1] [1 + [H^*](0, t^*)], \quad 0 < t^* < T^* \\ R^*(t^*) &= \frac{R_o}{s_o} \sqrt{\frac{l_o}{s_o} \frac{1}{l^*(t^*)}}, \quad 0 < t^* < T^* \end{aligned} \quad (7)$$

Para la obtención de la solución a nuestro problema de frontera móvil adimensionalizado (7) se utilizó el método de los elementos finitos (MEF), el cual fue implementado en esta primera aproximación al problema mediante el software FlexPDE (<http://www.pdesolutions.com>). Para la simulación se usaron datos extraídos de la literatura [4], [6] según la siguiente tabla:

Parámetro	Magnitud	Dimensiones
Periodo de Simulación	259200 (3 días)	seg
Radio raíz ( $s_0$ )	0.05	cm
Longitud inicial raíz ( $l_0$ )	7.05	cm
Radio rizosférico ( $R_0$ )	2	cm
Velocidad flujo convectivo ( $v_o$ )	$1 \times 10^{-5}$	cm/s
Velocidad crecimiento raíz ( $k_1$ ) [ $l(t) = l_0 + k_1 t$ ]	$6.66 \times 10^{-5}$	cm/s
Eflujo de protones desde la raíz ( $F$ )	$3 \times 10^{-12}$	mol/cm <sup>2</sup> -s
Coefficiente de Difusión efectivo ( $D_e$ ) (Difusión lenta) $Pe = 2.5$ (Difusión rápida) $Pe = 0.0053$	$2 \times 10^{-7}$ $9.4 \times 10^{-5}$	cm <sup>2</sup> /s
Concentración inicial protones según pH inicial ( $[H^+]$ ) pH = 6.8 (suelo neutro) pH = 8 (suelo moderadamente alcalino)	$1.5849 \times 10^{-10}$ $1 \times 10^{-11}$	mol/cm <sup>3</sup>

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Una vez obtenidas las concentraciones de protones  $[H^+]$  se obtiene el pH como el  $\log[1/[H^+]]$ , donde log es  $\log_{10}$  y  $[H^+] = 10^3 F[H^*] / v_o$  (para obtener nuestra concentración física de protones en Molares a partir de la concentración adimensionalizada). El factor  $10^3$  resulta de la transformación de moles/cm<sup>3</sup> a molar)

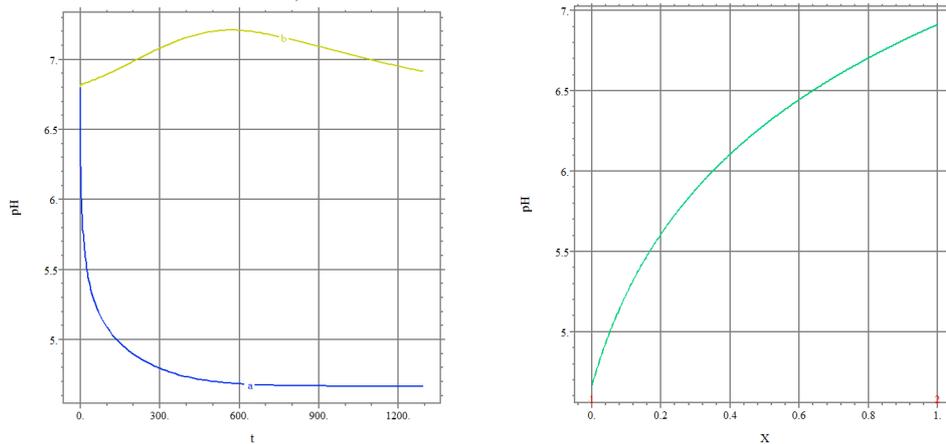


Figura 1. Variación del pH en  $r = s_0$  (azul) y  $r = R(t)$  (amarillo) versus el tiempo, y el perfil final entre  $s_0$  y  $R(t)$  (al cabo de los tres días y en dominio adimensionalizado) siendo ambos gráficos para un suelo neutro (pH inicial = 6.8) y difusión lenta ( $D_e = 2 \times 10^{-7}$  cm<sup>2</sup>/s)

Las simulaciones corridas para suelos neutros (pH=6.8) y difusión lenta ( $D_e = 2 \times 10^{-7}$  cm<sup>2</sup>/s) para un tiempo de 3 días y durante el cual el radio rizosférico se ha reducido aproximadamente a la mitad (de 2 a 1 cm) muestran una marcada acidificación sobre la raíz de aproximadamente 2 unidades y la cual se hace estacionaria al cabo de casi dos días, mientras el perfil del pH entre la raíz y el borde rizosférico se distribuye en toda la distancia radial (Figura 1). Estos resultados son similares a los de Nye [4] aunque con una acidificación más homogénea en todo el perfil entre la raíz y el borde rizosférico  $R(t)$  el cual está disminuyendo. Esta diferencia en los perfiles de pH es debido a que sus resultados son para una rizósfera infinita fija. Para los mismos suelos y difusión rápida ( $D_e = 9.4 \times 10^{-5}$  cm<sup>2</sup>/s), se obtienen variaciones de pH significativamente menores (Figura 2) y nuevamente el perfil de acidificación se distribuye en toda la longitud radial de la rizósfera debido a la rizósfera variable. Como conclusión general, en esta primera

aproximación inferimos que el efecto de una rizósfera variable produce una mayor acidificación volumétrica que la predicha por los modelos de rizósfera infinita de Nye y Kim.

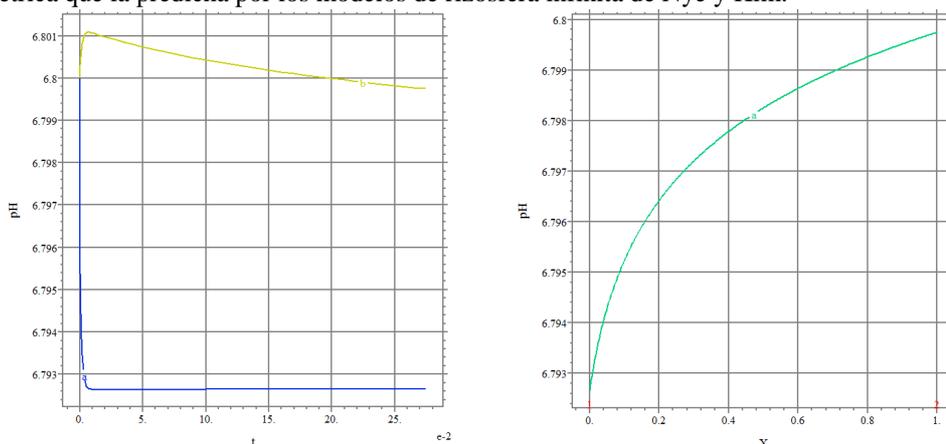


Figura 2. Variación del pH en  $r = s_0$  (azul) y  $r = R(t)$  (amarillo) versus el tiempo y el perfil final entre  $s_0$  y  $R(t)$  (dominio adimensional) siendo ambos gráficos para un suelo neutro ( $\text{pH} = 6.8$ ) y difusión rápida ( $D_e = 9.4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ )

En la Figura 3 se muestran resultados análogos a los obtenidos en la Figura 1 pero para suelos moderadamente alcalinos ( $\text{pH}$  inicial = 8) y difusión lenta.

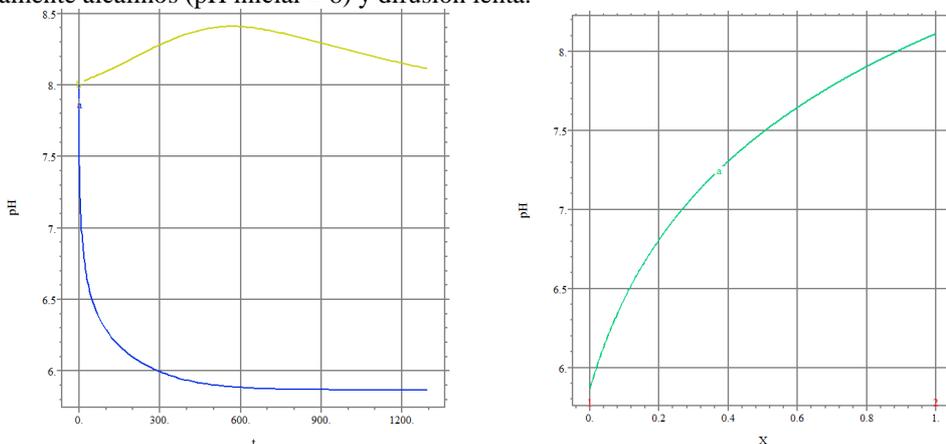


Figura 3. Variación del pH en  $r = s_0$  (azul) y  $r = R(t)$  (amarillo) versus el tiempo, y el perfil final entre  $s_0$  y  $R(t)$  (al cabo de los tres días y en dominio adimensionalizado) siendo ambos gráficos para un suelo moderadamente alcalino ( $\text{pH}$  inicial = 8) y difusión lenta ( $D_e = 2 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$ )

## REFERENCIAS

- [1] C.S. BLEDSOE AND R.J. ZASOSKI R.J. *Effects of ammonium and nitrate on growth and nitrogen uptake by mycorrhizal Douglas-fir seedlings*. Plant and Soil 71 (1983), pp. 445-454.
- [2] H. JENNY, H. AND R. OVERSTREET, *Cation interchange between plant roots and soil colloids*, Soil Sci. 47 (1939), pp. 257-272
- [3] D.. RILEY AND S.A..BARBER, *Effect of ammonium and nitrate fertilization on phosphorus uptake as related to root-induced pH changes at the root-soil interface*. Proceedings of the Soil Science Society of America 35 (1971), pp.301-306
- [4] P. H. NYE, *Changes of pH across the rhizosphere induced by roots*, Plant and Soil 61 (1981), pp.7-26
- [5] H. CARSLAW, AND J.C. JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*, 1959, 2nd Ed. Oxford.
- [6] T.K. KIM Y W.K. SILK. *A mathematical model for pH patterns in the rhizosphere of growth zones*, Plant, Cell & Environment, 22 (1999), pp. 1527-1538
- [7] J.C. REGINATO, M.C. PALUMBO, CH.I. BERNARDO, I.S. MORENO Y D.A. TARZIA. *Modeling Nutrient Uptake Using A Moving Boundary Approach. Comparison with the Barber-Cushman Model*. Soil Science Society of America Journal, 64, 4 (2000), pp.1363-1367