

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

III SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

Rosario, 11 al 15 de octubre - 1988

LA FILTRACION EN MEDIOS POROSOS

Mario Primicerio - Roberto Gianni

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "ULISSE DINI"
UNIV. DEGLI STUDI DI FIRENZE, FIRENZE, ITALIA

18

Rosario - República Argentina

-1989-

Serie : CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi"

Coordinador : Domingo Alberto TARZIA.

NUMEROS APARECIDOS :

1. G. STAMPACCHIA, "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales e inecuaciones variacionales".
2. C. PROCESI, "Teoría de Galois elemental".
3. U. MOSCO, "Transformada de Fourier y distribuciones".
4. P. BERNHARD, "Introducción a la teoría de Control Optimo".
5. P. FAURRE, "Teoría de Control. Filtrado estadístico e Introducción al Control Estocástico".
6. "Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", Rosario, 2-7 de julio de 1973.
7. A. BENSOUSSAN, "Teoría moderna de Control Optimo".
8. C. BAIOCCHI, "Movimiento de un fluido en medios porosos. Enfoque variacional, cuasi-variacional y numérico".
9. R. GLOWINSKI, "Introducción a la aproximación de inecuaciones variacionales elípticas".
10. H. SAMARA, "Resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Formulación variacional del método TAU".
11. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1.
12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2.
13. A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", en "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 1.
14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2.
15. P.L. GEORGE, "Introducción a la utilización del Software Científico MODULEF".
16. J.L. MENALDI, "Programación dinámica estocástica".
17. "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 1.
18. M. PRIMICERIO — R. GIANNI, "La filtración en medios porosos", en "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 2.
19. J.C. CESCO, "Economía matemática", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
20. L. QUINTAS, "Teoría de juegos", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.
21. E. GENTILE, "Forma Normal de Jordan", en "Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina", Rosario, 11-14 de octubre de 1989.

PREFACIO

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años (ver Anexo I), el *Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario*, PROMAR (CONICET—UNR), que se desarrolla en el *Instituto de Matemática "Beppo Levi"*, emprendió, a través del proyecto de investigación y desarrollo "*Problemas de Frontera Libre de la Física Matemática*", la organización del interdisciplinario *Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones*, realizado en la ciudad de Rosario (Argentina) durante el periodo del 11 al 15 de octubre de 1988.

El Comité Organizador estuvo compuesto por H. R. BERTORELLO (FAMAF, Córdoba), J. E. BOUILLET (IAM—UBA, Buenos Aires), E. A. GARCIA (CNEA, Buenos Aires), D. A. TARZIA (PROMAR, Rosario) (Coordinador) y L. T. VILLA (UNSa, Salta).

La Secretaría estuvo a cargo de L. R. BERRONE, G. G. GARGUICHEVICH, S. DI MARCO, P. R. MARANGUNIC (Coordinador), M. C. SANZIEL, C. O. STOICO, todos del PROMAR.

Este Seminario ha sido realizado, en parte, gracias a un subsidio que a tal efecto otorgó el CONICET. Además se contó con la ayuda de las siguientes Instituciones Auspiciantes :

AMCA — Asociación Argentina de Mecánica Computacional; CAMAT — Comité Argentino de Transferencia de Calor; CERIDER — Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Rosario; CONICET — Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas; CIUNR — Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario; Depto. de Matemática — Escuela de Ciencias Exactas y Naturales; Depto. de Matemática — Escuela de Formación Básica; FCEIA — Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR); Municipalidad de Rosario.

Además colaboraron las siguientes entidades:

CIDCA (CIC — CONICET — UNLP), La Plata; CNEA, Buenos Aires; Consulado de Italia en Rosario; FAMAF (UNC), Córdoba; IAM (CONICET), Buenos Aires; INIQUI (CONICET — UNSa), Salta; PEMA (CONICET — UNL), Santa Fe.

En el Seminario participaron 51 personas (de las cuales 5 son extranjeras) provenientes de 14 ciudades argentinas y 4 extranjeras (ver Anexo III — Lista de Participantes).

Los objetivos del Seminario fueron :

- 1) Gestar un *encuentro bianual/trianual* de las personas y grupos que trabajan en problemas de frontera libre, en particular, en el problema de Stefan (cambio de fase) en el país, a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos.

- 2) No limitar el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia, sino también, y muy especialmente, despertar el interés y el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*.

Esta tercera edición del Seminario estuvo constituida por cursillos intensivos sobre los aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones (ver Anexo II). En años sucesivos, los cursillos versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numérico (no tratados en Seminarios anteriores) y los principios teóricos irán paulatinamente dando lugar a las aplicaciones.

Para finalizar, quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a los profesores encargados de la redacción de estas notas como asimismo a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA

Compilador

Rosario, Abril 1989.

ANEXO I PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Los problemas de frontera libre son aquellos problemas de contorno donde interviene además una incógnita (la "frontera libre") que separa dos o más regiones, y sobre la cual se conocen datos que dependen del modelo analizado. Según el número de dimensiones del espacio, en lugar de una superficie de separación se podrá tener una curva o un número finito de puntos.

Un ejemplo típico es el problema de Stefan (o problema de cambio de fase), que estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida (por ej. hielo y agua en procesos de fusión o solidificación). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. Sobre la superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, se impone una condición adicional que surge del principio de conservación de la energía. El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha frontera libre, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Otros ejemplos son:

- * problemas de hidráulica, por ej. el del dique poroso, donde una superficie desconocida separa la zona seca de la zona húmeda;
- * el problema del obstáculo, donde hay una zona de contacto entre el obstáculo y la configuración de equilibrio de la cuerda o membrana elástica;
- * problemas de difusión-reacción gas-sólido en Ingeniería Química, donde la superficie incógnita separa la región del sólido ya atacada de la todavía no atacada;
- * problemas de elasto-plasticidad, problemas térmicos con pared semi-permeable, semiconductores bajo una unión P-N, problemas de mecánica de los fluidos, etc.

Entre las múltiples aplicaciones de estos problemas se pueden mencionar: electropintura; envenenamiento y regeneración de catalizadores; combustión de sólidos; solidificación de aleaciones binarias; soldadura de metales; colada continua del acero; congelación de alimentos en la industria frigorífica; almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase; oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares, en caso de accidentes; procesos de ablación térmica; difusión-consumo de oxígeno en tejidos vivos, para el tratamiento médico de tumores mediante la aplicación de radiaciones; problemas de control óptimo ligados a procesos con cambio de fase; solidificación de suelos húmedos; derretimiento de glaciares; etc.

El avance considerable que se ha obtenido en el desarrollo teórico de estos temas a nivel nacional, y sus variadas aplicaciones industriales que se encuentran en etapa inicial, impulsan la realización de este III Seminario, prosiguiendo la línea de los ya concretados I y II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones (Rosario, 4-8/7/83 y 13-17/10/86, respectivamente). El material correspondiente a estos últimos ha sido publicado en la colección CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", números 11, 12, 13 y 14.

ANEXO II
CONTENIDO DEL SEMINARIO

CURSO (en CUADERNOS No. 18):

- * M. PRIMICERIO, "La filtración en medios porosos".

CONFERENCIAS GENERALES Y DE APLICACIONES (en CUADERNOS No. 17):

- * N. AGUILERA, "Análisis numérico de flujos potenciales cavitacionales".
- * J. E. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas".
- * A. DENIS, "Modelos de simulación para interpretar cinéticas de permeación con trampas profundas".
- * M. ELGUETA, "Localización de soluciones en problemas de filtración".
- * E. A. GARCIA — A. WILHELM, "Disolución de UO_2 por zircaloy líquido".
- * G. G. GARGUICHEVICII, "El problema estacionario de Stefan a dos fases con una fuente de energía interna".
- * S. IDELSOHN — M. STORTI, "Solución numérica del problema de Stefan con un método de convergencia cuadrática".
- * M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas".
- * R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos".
- * D. A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados".
- * D. A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción".
- * C. TURNER, "El problema del polímero".
- * K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic approach".
- * K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Stochastic approach".
- * E. VICENTE, "Procesos de solidificación de metales y aleaciones".
- * L. T. VILLA, "Problemas de frontera móvil y libre en procesos de ingeniería química".
- * D. G. WILSON, "Cyclic melting and freezing with variable density".
- * D. G. WILSON, "Implicit finite-difference schemes for phase-change problems".

ANEXO II
CONTENIDO DEL SEMINARIO

CURSO (en CUADERNOS No. 18):

- * M. PRIMICERIO, "La filtración en medios porosos".

CONFERENCIAS GENERALES Y DE APLICACIONES (en CUADERNOS No. 17):

- * N. AGUILERA, "Análisis numérico de flujos potenciales cavitacionales".
- * J. E. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas".
- * A. DENIS, "Modelos de simulación para interpretar cinéticas de permeación con trampas profundas".
- * M. ELGUETA, "Localización de soluciones en problemas de filtración".
- * E. A. GARCIA - A. WILHELM, "Disolución de UO_2 por zircaloy líquido".
- * G. G. GARGUICHEVICH, "El problema estacionario de Stefan a dos fases con una fuente de energía interna".
- * S. IDELSOHN - M. STORTI, "Solución numérica del problema de Stefan con un método de convergencia cuadrática".
- * M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas".
- * R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos".
- * D. A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados".
- * D. A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción".
- * C. TURNER, "El problema del polímero".
- * K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic approach".
- * K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Stochastic approach".
- * E. VICENTE, "Procesos de solidificación de metales y aleaciones".
- * L. T. VILLA, "Problemas de frontera móvil y libre en procesos de ingeniería química".
- * D. G. WILSON, "Cyclic melting and freezing with variable density".
- * D. G. WILSON, "Implicit finite-difference schemes for phase-change problems".

LISTA DE PARTICIPANTES

- ACOSTA, Nelson A., Fac. Cs. Tecnológicas (UNSa), Buenos Aires 177, 4400 Salta (ARGENTINA).
- AGUILERA, Néstor, PEMA-INTEC (CONICET-UNL), Guemes 3450, 3000 Santa Fe (ARGENTINA).
- AKOVALI, Yurdanur, Oak Ridge Nat. Lab., P.O.Box 2008 - Oak Ridge, TN 37831-6371 (USA).
- ANTONETTI, Daniel Eduardo, Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- ARAGONE, Laura Susana, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- BANCORA-IMBERT, María Cristina, Dpto. de Matemática, Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- BERGALLO, Marta Beatriz, Fac. de Ingeniería Química - P.E.M.A., Guemes 3450, 3000 Santa Fe (ARGENTINA).
- BERRONE, Lucio, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- BOUILLET, Julio E., Fce y N. - UBA - IAM (CONICET), Viamonte 1636, 1055 Buenos Aires (ARGENTINA).
- BRITO, Héctor H., Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- BRUNET, Hector Arnaldo, Dpto de Matemática - U.N.S., Alem 1253, 8000 Bahía Blanca (ARGENTINA).
- CAMARGO, Susana O., Dr. Vidal 1161, C. de Nieva, 4600 S.S. de Jujuy (ARGENTINA).
- CASTELLINI, Horacio, Fac. Cs. Ex., Ing. y Agr., Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- CIAVATTINI, Roberto Antonio, Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- CICUTTI, Carlos E., Inst. Arg. Metalurgia, Avda Central y 19 de Oeste B. Gral. Savio, 2901 San Nicolás (ARGENTINA).
- DENIS, Alicia, Dpto Materiales - CAC - CNEA, Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (ARGENTINA).
- DI MARCO, Silvia, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- DUELLI, Rodolfo M., Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace rutas 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- ELGUETA, Manuel, Univ. Católica de Chile, Cardenal Neuman 1016, Santiago de Chile (CHILE).
- FRATTINI, Agustín L., Fac. Cs. Bioq. y Far., Suipacha 531, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- GARCIA, Eduardo A., CNEA-CAC - Dpto de Materiales, Avda del Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (ARGENTINA).
- GARGUICHEVICH, Graciela G., PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000 Rosario (ARGENTINA).
- GONZALEZ, Adriana María, Univ. Nac. de Río Cuarto, Enlace ruta 8 y 36 - Km 603, 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).
- IDELSHON, Sergio, INTEC-SANTA FE (CONICET-UNL), Guemes 3450, 3000 Santa Fe (ARGENTINA).
- KORTEN, Marianne, IAM-CONICET, Viamonte 1636, 1055 Cap. Fed. (ARGENTINA).
- LASSERRE, Cecilia M., Univ. Nac. de Jujuy, Gorriti 237, 4600 S.S. de Jujuy (ARGENTINA).
- LEDERMAN, Claudia, IAM - CONICET, Viamonte 1636 - 1^{er} piso - 1^{er} cuerpo, Buenos Aires (ARGENTINA).

LEHMAN, Mario M., Univ. Nac. de Centro de la Prov. de Bs. As.,
Pinto 399, 7000 Tandil (ARGENTINA).

MARANGUNIC, Pedro R., PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250,
2000 Rosario (ARGENTINA).

MARTINEZ, Rubén Germán, Avda Pellegrini 1474 - 2p. 6, 2000
Rosario (ARGENTINA).

MASCHERONI, Rodolfo H., CIDCA, 47 Y 116, 1900 La Plata
(ARGENTINA).

MOEX, Guillermo S., Gálvez 5930, 2000 Rosario (ARGENTINA).

MOYANO, Edgardo A., C.N.E.A. (Centro de Cálculo), Av.
Constituyentes y Gral Paz, 1704 Buenos Aires (ARGENTINA).

MULER, Nora, CONICET - Inst. Arg. de Mat., Viamonte 1636 - 1^{er}
piso - 1^{er} cuerpo, 1055 Cap. Fed. (ARGENTINA).

ORNASS, Victoria R., Fac. Cs. Tecnológicas (UNSa), Buenos Aires
177, 4400 Salta (ARGENTINA).

PRIMICERIO, Mario, Ist. Mat. U. Dini, Viale Morgagni 67/A, 50134
Firenze (ITALIA).

QUIROGA, Marisa, Fac. de Ing., Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario
(ARGENTINA).

REGINATO, Juan Carlos, Univ. Nac. Río Cuarto, Enlace rutas 8 y
36, Río Cuarto - 5800 Río Cuarto (ARGENTINA).

ROYO DE OVANDO, Josefina, Univ. Nac. de Jujuy, Gorriti 237, 4600
S.S. de Jujuy (ARGENTINA).

SANZIEL, María Cristina, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini
250, 2000 Rosario (ARGENTINA).

STOICO, César O., PROMAR (CONICET-UNR), Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario (ARGENTINA).

STORTI, Mario Alberto, INTEC-SANTA FE (CONICET-UNL), Guemes 3450,
3000 Santa Fe (ARGENTINA).

TARZIA, Domingo A., PROMAR (CONICET - UNR), Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario (ARGENTINA).

TIDBALL, Mabel, PROMAR (CONICET-UNR), Avda Pellegrini 250, 2000
Rosario (ARGENTINA).

TORRES DE OSELLA, María Eugenia, Fac. de Ing. (UNER), Oro Verde,
Entre Ríos (ARGENTINA).

TURNER, Cristina, FAMAF UNC, Valparaíso y R. Martínez - Cd.
Univ., 5000 Córdoba (ARGENTINA).

TWARDOWSKA, Krystyna, Jagiellonian Univ., 31501 Krakow, UL.
Kopernika 27 (POLAND).

VICENTE, Eduardo, Dpto Materiales - CAC - CENEA, Av. del
Libertador 8250, 1429 Buenos Aires (ARGENTINA).

VILLA, Luis T., Fac. Cs. Tecnológicas (UNSa), Buenos Aires 177,
4400 Salta (ARGENTINA).

WILHELM, Aida N., C.N.E.A., Av. del Libertador 8250, 1429 Buenos
Aires (ARGENTINA).

WILSON, D.G., Oak Ridge Nat. Lab., P.O.Box 2009 Oak Ridge, TN
37831 - 8083 (USA).

LA FILTRACIÓN EN MEDIOS POROSOS

MARIO PRIMICERIO, ROBERTO GIANNI

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI di FIRENZE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "ULISSE DINI"
Viale Morgagni 67/A
50134-Firenze, Italia

PARTE I . MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS

1. Introducción

Consideremos una muestra de arena que llena un recipiente de volumen V ; supongamos que se pueda agregar un líquido sin que los granos de arena se muevan y sea V_0 el volumen máximo de líquido que se puede agregar. Diremos que la cantidad

$$(1.1) \quad \bar{\epsilon} = V_0/V \in (0,1)$$

es la porosidad media de la muestra de arena.

Sea ahora P un punto de la muestra; con el mismo procedimiento podemos definir la porosidad media $\bar{\epsilon}(P;R)$ de la arena contenida en cualquier esfera de centro P y radio R .

Si hacemos variar R , se verificará una situación de este tipo

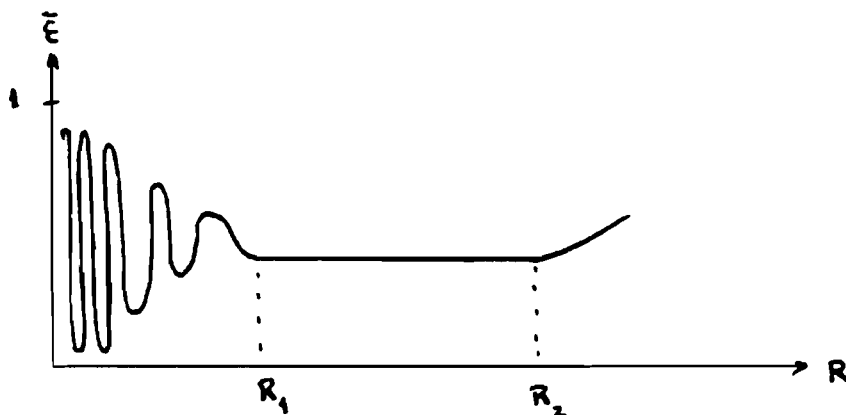


fig. 1

Si como en la fig. 1 existe un intervalo $R_1 \leq R \leq R_2$ en el cual el radio de la esfera es suficientemente pequeño como para que la influencia de

las deshomogeneidades macroscópicas resulte despreciable, pero suficientemente grande con respecto a las dimensiones medias de los granos de arena y de los poros, entonces $\bar{\epsilon}(P,R)$ es constante en este intervalo y se toma su valor como porosidad en el punto P. Este tipo de aproximación es el típico de la mecánica de los sistemas continuos. Las cantidades son el valor medio sobre un volumen elemental representativo (R.E.V.), pequeño con respecto a las dimensiones de las regiones en las cuales se estudia el fenómeno, pero grande con respecto a las dimensiones microscópicas; cuando esto no es posible, no vale en general el esquema continuo.

En base a lo antedicho, podemos dar las siguientes definiciones

Definición 1.1 Se dice que un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$ está ocupado por un medio poroso cuando existe una función $\epsilon: \Omega \rightarrow (0,1)$ de manera que la masa $m(D)$ de líquido de densidad dada ρ_0 que puede estar contenida en una región arbitraria $D \subset \Omega$ es no superior al valor (de saturación)

$$(1.2) \quad m_s(D) = \int_D \rho_0 \epsilon(P) dV ,$$

Más generalmente podrán considerarse casos en los cuales $\epsilon = \epsilon(P,t)$.

Es evidente que, en la aproximación que hemos elegido, las dimensiones del subconjunto D no serán nunca inferiores a las del R.E.V.

Definición 1.2 Se llama saturación del medio poroso (en el punto P y en el instante t) al cociente

$$(1.3) \quad \sigma = \frac{m(K;t)}{m_s(K;t)}$$

donde K es un R.E.V. centrado en P^1 , $m(K,t)$ es la masa de líquido contenido efectivamente en K y $m_s(K,t)$ es el valor máximo (de saturación) de la masa de líquido que puede estar contenida en K . Obviamente $\sigma \in [0,1]$; además $\sigma=0$ corresponde al medio seco y $\sigma=1$ corresponde al medio saturado.

Equivalentemente, $1-\epsilon$ es la relación entre el volumen ocupado por los "granos" del medio poroso y el volumen total. Por lo tanto ϵ es la relación entre el volumen de los "poros" y el total, mientras σ es la relación entre el volumen ocupado por el líquido y el total; todo este análisis está referido a una situación homogénea, pero puede fácilmente generalizarse.

2. La ley de Darcy

Consideremos un medio poroso saturado con un líquido dado. Por simplicidad consideremos $\epsilon=\text{constante}$ y estudiemos el flujo estacionario del líquido a través de una sección Σ normal al flujo en presencia de un gradiente constante de presión (fig. 2)

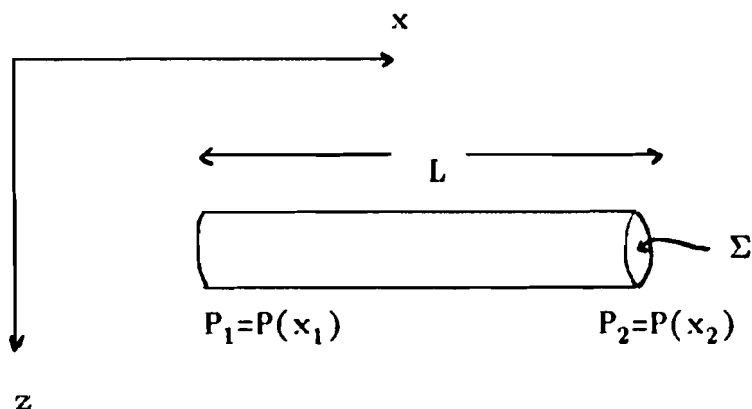


fig. 2

¹Alternativamente, se puede llegar a la misma definición de σ con un razonamiento similar al que nos ha conducido de $\bar{\epsilon}$ a ϵ .

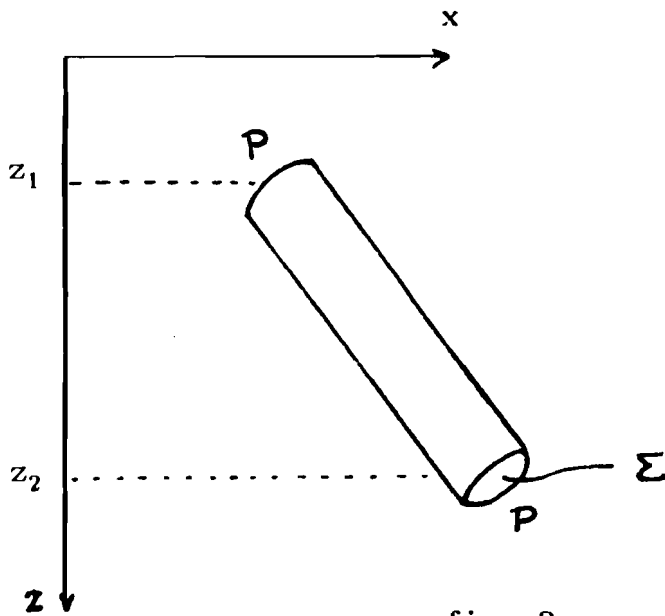


fig. 3

o bien cuando, siendo igual la presión en los dos extremos (por ejemplo la atmosférica), se tiene un desnivel (fig. 3). El eje z se elige coincidente con el eje vertical descendente.

En el primer caso se prueba experimentalmente que la cantidad de líquido que fluye en un tiempo T en la dirección de las x positivas está, en buena aproximación, dada por

$$(2.1) \quad Q = c\Sigma T (P_1 - P_2)/L .$$

En el segundo caso se tiene

$$(2.2) \quad Q = c\Sigma T \rho g (z_2 - z_1)/L .$$

La constante c depende del medio poroso y del líquido. A partir de estos resultados se enuncia la ley de Darcy, en base a la cual el vector de flujo q está dado por

$$(2.3) \quad \vec{q} = -c \text{ grad}(p - \rho g z) ,$$

o sea, la cantidad de líquido que pasa por una superficie regular Σ de

normal \underline{n} (en el sentido dado por el sentido de \underline{n}) en un intervalo (t_1, t_2) es

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma} \bar{q} \cdot \underline{n} d\Sigma \right] ;$$

Q es el caudal (en inglés "discharge") a través de Σ , mientras que la velocidad macroscópica media del fluido a través de Σ es $V=Q/\epsilon$.

Distinguiendo en la constante c la influencia del medio poroso de la del fluido se encuentra que $c=k/\mu$ donde μ es la viscosidad del líquido y k depende solo del medio poroso y se llama permeabilidad; entonces la fórmula (2.3) se escribe

$$(2.4) \quad \bar{q} = - \frac{k}{\mu} \text{grad}(p - \rho g z) ,$$

Poniendo

$$(2.5) \quad K = \frac{k \rho g}{\mu} \quad ,$$

cuando ρ es constante la ley de Darcy se escribe

$$(2.6) \quad \bar{q} = -K \text{grad}\left(\frac{p}{\rho g} - z\right) .$$

La (2.6) es la forma más común de la ley de Darcy; K es la llamada conductividad hidráulica mientras la cota $p/\rho g - z$ se llama cota hidráulica o altura piezométrica (en inglés "hydraulic head").

Consideremos brevemente el caso, hasta ahora excluido, en el cual ρ no es constante.

Si está dada la dependencia de ρ de la presión se usa la ley de Darcy

² o también $K=kg/\nu$, donde $\nu=\mu/\rho$ es la viscosidad cinemática.

en la forma de Hubbert (1960)

$$(2.7) \quad \bar{q} = -k \operatorname{grad} \left[\int_{p_0}^p \frac{dp}{g\rho(p)} - z \right],$$

pero más simplemente puede ser oportuno usar la forma

$$(2.8) \quad \bar{q} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} \left[p - \int_0^z g\rho(\xi) d\xi \right],$$

que se refiere también al caso en que ρ dependa de la cota y que expresa el simplísimo hecho que el flujo está determinado por la presión menos la presión hidrostática, que es

$$(2.9) \quad \Pi(z) = g \int_0^z \rho(\xi) d\xi .$$

Si además el medio poroso es no homogéneo (pero se conserva la hipótesis de isotropía) la ley de Darcy se escribe en uno de los modos ya vistos, con la única advertencia de que K (o bien k) es variable con la posición.

Una última observación: al escribir la ley de Darcy el observador que efectúa la medición del flujo se supone en reposo respecto a la matriz porosa (indeformable).

Para los casos de anisotropía, deformabilidad del medio y límites de validez de la ley de Darcy, se recomienda consultar los clásicos textos [8][9].

3. Medios no saturados

Consideremos ahora un medio poroso en el cual el líquido (nos ocuparemos siempre de sistemas con un solo líquido; el problema de dos o más líquidos inmiscibles, como en el caso agua-petróleo, no será considerado) no ocupe todo el volumen de los poros; sea entonces $\sigma < 1$.

En tal caso se supone todavía válida la ley de Darcy, pero la conductividad hidráulica es función de la saturación: $K=K(\sigma)$. En la bibliografía se encuentran distintas determinaciones experimentales de $K(\sigma)$; a menudo se supone una ley empírica del tipo ([15])

$$(3.1) \quad K = \alpha \sigma^3 .$$

Por otra parte, es también razonable suponer que por debajo de una saturación crítica ya no sea posible aplicar la ley de Darcy, pues la región ocupada por el líquido no es más conexa. Se escribe entonces [46]

$$(3.2) \quad K(\sigma) = K_s \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{1 - \sigma_0} \right)^3 , \quad \sigma \geq \sigma_0$$

donde K_s es la conductividad hidráulica del medio saturado y σ_0 es la saturación crítica.

Pasamos ahora a hablar de la presión en un líquido en un medio poroso. Si $\sigma=1$, la presión se define (y se mide) en modo análogo a cuanto se hace usualmente en fluidodinámica. En cuanto a la densidad, en el caso más simple que estamos considerando, el fluido es incompresible y su densidad no depende de la presión, $\rho=\rho_0$. Otras ecuaciones de estado que a veces se consideran son

$$(3.3) \quad \rho = \rho_0 \exp[\beta(p-p_0)]$$

o bien

$$(3.4) \quad \rho = \rho_0 \{1 + \beta(p - p_0)\}$$

donde ρ_0 es la densidad a la presión de referencia p_0 , β es el coeficiente de compresibilidad, o sea un valor medio de la cantidad

$$(3.5) \quad \beta(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p},$$

en el intervalo de densidades considerado. En todos los casos concretos (3.3) y (3.4) son equivalentes ya que $\beta(p - p_0) \ll 1$.

Se pueden además tomar en consideración problemas en los cuales los fluidos son no homogéneos y por lo tanto ρ_0 puede depender de la posición.

Cuando el medio no está saturado, la presión del líquido no es la presión del aire circundante, por efecto de la capilaridad en el interior de los poros. La diferencia entre la presión del aire p_a y la presión p se llama presión de capilaridad y es una función de la saturación característica del medio poroso:

$$(3.6) \quad p_a - p = p_c(\sigma).$$

En la mayoría de los casos p_a es constante y se toma igual a cero. La curva p_c es entonces tal que $p_c = 0$ para $\sigma = 1$ y $\frac{dp_c}{d\sigma} \leq 0$. Además, en principio se tiene $p_c \rightarrow \infty$ cuando $\sigma \rightarrow 0$.

En la bibliografía se encuentran distintas expresiones empíricas deducidas de datos experimentales, por ejemplo

$$(3.7) \quad \sigma = (1 + ap_c^2)^{-1/2},$$

como en [30], o

$$(3.8) \quad \sigma = (1+bp_c)^{-1/4}$$

como en [13]. En (3.7) y (3.8) a y b son constantes a determinar.

Por otra parte el caso $\sigma=0$ carece prácticamente de significado, al menos en la situación en la cual estamos interesados (en la que se desecha la migración del vapor, se mantiene la temperatura constante, etc.), a tal punto que podría ser razonable suponer que $\sigma=\sigma_{res}$ para $p_c > \bar{p}_c$, con σ_{res} coincidente o no con la σ_0 de (3.2).

Para tener en cuenta este hecho se puede sustituir σ en (3.7), (3.8) por $\sigma_{eq}=(\sigma-\sigma_{res})/(1-\sigma_{res})$ e introducir \bar{p}_c en el segundo miembro (por ejemplo en la fórmula (3.8) se podría escribir $[(1+bp_c)^{-1/4}-(1+b\bar{p}_c)^{-1/4}]/[1-(1+b\bar{p}_c)^{-1/4}]$).

Una diferencia importante entre (3.7) y (3.8) es que en la primera $\frac{d\sigma}{dp_c} \leq 0$, mientras que en la segunda $\frac{d\sigma}{dp_c} < 0$ para cada p_c finito.

Concluimos este parágrafo transcribiendo algunas relaciones empíricas entre K y p (o sea entre K y $-p_c$) que se encuentran en la bibliografía para interpolar datos experimentales bastante lejanos de la saturación crítica, a saber

$$(3.9) \quad K = a/[b+(p/\rho g)^m] ,$$

o bien

$$(3.10) \quad K = K_0 \exp[-\alpha p/\rho g].$$

Una última observación se refiere a la dificultad para obtener datos experimentales reproducibles, entre otras cosas por la presencia de evidentes fenómenos de histéresis: la capilaridad como función de la

saturación es sensiblemente distinta en los casos de absorción y en los casos de drenaje. Para tener solo una idea del fenómeno, que no trataremos aquí, ver [8].

4. Balance de masa

Está claro que, en ausencia de fuentes, la conservación de la masa de líquido toma la siguiente forma

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\rho\sigma) + \text{div } \rho\vec{q} = 0$$

y, en la hipótesis de validez de la ley de Darcy

$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\rho\sigma) = \text{div}\left[\frac{K}{g} \text{grad } p - K\rho\mathbf{e}_3\right] .$$

Aquí usamos (2.6) e indicamos con \mathbf{e}_3 el versor del eje vertical (descendente).

Consideremos en primer lugar un medio saturado; si el medio poroso es indeformable ($\epsilon=\text{constante}$) y homogéneo ($k=\text{constante}$) y el líquido incompresible ($\rho=\text{constante}$), se tiene

$$(4.3) \quad \Delta p = 0 .$$

Sea aún $\epsilon=\text{constante}$ y $\sigma=1$. Si el fluido es compresible pero k/μ se puede suponer constante tendremos

$$(4.4) \quad \epsilon\rho'p_t = \frac{k}{\mu} [\rho\Delta p + \rho'(\text{grad } p)^2 - 2\rho\rho'gp_z] ,$$

donde $\rho' = \frac{d\rho}{dp}$ se puede deducir de la ecuación de estado, por ejemplo (3.3) o (3.4).

Con referencia a (4.4) recordemos brevemente que la misma se aplica

para el flujo de gases en medios porosos; en tales casos generalmente se desprecia el último término del segundo miembro debido a la gravedad.

Si la ecuación de estado es la de una transformación politrópica $p=c\rho^\alpha$, $\alpha \geq 1$ entonces se tiene (limitándose a un caso unidimensional por simplicidad de escritura)

$$(4.5) \quad \rho_t = C (\rho^\alpha \rho_x)_x$$

o también

$$(4.5') \quad p_t = a(p p_{xx} + \alpha^{-1} p_x^2) .$$

El caso $\alpha=1$ corresponde al caso isotérmico. Claramente (siendo $\alpha \geq 1$) la ecuación es uniformemente parabólica sólo donde $\rho \geq \rho_0 > 0$.

Pasemos ahora a otro caso: aquel en el cual las variaciones de la presión no modifican la densidad del líquido sino la porosidad (y por tanto también la permeabilidad) del medio. Tendremos

$$(4.6) \quad \epsilon' p_t - \frac{1}{\mu} [k \Delta p + k' (\text{grad } p)^2 - k' \rho g p_z] = 0 .$$

Consideremos ahora el caso de medios no saturados, pero con la hipótesis de incompresibilidad del fluido y de indeformabilidad de la matriz porosa.

Limitándonos, por simplicidad de escritura, a casos en que las cantidades en examen dependen de la presión sólo a través de la altura piezométrica z , tendremos

$$(4.7) \quad \epsilon \sigma_t - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} [K p_z] + \frac{\partial}{\partial z} K = 0 ,$$

que se completa con una relación entre p y σ y con una ley que expresa K

en función de la cantidad elegida como función incógnita. Expresando todo en función de σ se tiene entonces

$$(4.8) \quad \epsilon \sigma_t - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} [K(\sigma) p'(\sigma) \sigma_z] + \frac{\partial K}{\partial \sigma} \sigma_z = 0 ,$$

que también se escribe ([49])

$$(4.9) \quad \theta_t = (D(\theta) \theta_z)_z - \frac{\partial K}{\partial \theta} \theta_z ,$$

donde $\theta = \epsilon \sigma$ es la masa de agua por unidad de volumen, K se supone dada en función de θ y se define la difusividad como

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{\rho g} \frac{dp}{d\theta} .$$

En función de la presión la ecuación anterior se escribe

$$(4.10) \quad \epsilon \sigma'(p) p_t - \frac{1}{\rho g} [K(p) p_z]_z + K'(p) p_z = 0 .$$

Algunos autores prefieren introducir la función

$$(4.11) \quad u = \int_0^p \frac{K(\xi)}{\rho g} d\xi \quad (\text{transformación de Kirchoff})$$

y escriben

$$(4.12) \quad [\theta(u)]_t = u_{zz} - [\gamma(u)]_z$$

donde $\gamma(u) = K(p(u))$ y θ se expresa en función de u a través de la ley experimental $\sigma = \sigma(p)$ y la inversa de (4.11).

5. Condiciones de contorno

Anticipemos una observación de carácter general: asignar una condición de contorno para un problema matemático puede corresponder a dos

situaciones distintas en el problema físico que se está considerando: la condición puede ser prescripta por el experimentador o puede ser simplemente medida por él. En el primer caso tenemos un experimento que puede ser reproducido o modificado oportunamente y por lo tanto más útil para verificar la validez del modelo usado. En el segundo caso se describe una situación midiendo y registrando los valores de determinadas cantidades en instantes y en puntos distintos; algunos de estos valores (en general aquellos iniciales y/o sobre el contorno) son utilizados como "input" del modelo, los demás, para confrontarlos con los valores que se obtienen como "output" del modelo.

En el estudio de un problema de filtración, si el medio poroso está saturado y su contorno es fijo, las ecuaciones a considerar son (4.3) o (4.4) o (4.6); en este caso es bien claro y conocido que condiciones de Dirichlet sobre la presión son condiciones que pueden ser prescriptas por el experimentador. También el flujo sobre el contorno puede ser prescripto en los casos parabólicos (4.4) y (4.6), mientras no es arbitrario sobre todo el contorno, como es sabido, en el caso de la ecuación de Laplace (4.3).

Pero la situación es más compleja y presenta nuevos aspectos cuando nos encontramos con un medio no enteramente saturado. Para fijar ideas consideremos aún la filtración unidimensional en la dirección vertical (descendente) z en una banda $z \in (0, L)$ y ocupémonos de las condiciones sobre la superficie $z=0$, que en muchas aplicaciones coincide con la superficie del suelo en el cual se estudia la filtración.

a) Condiciones de contorno tipo Dirichlet

Sea dada $p(0,t)$ (o $u(0,t)$ si se usa la transformación de Kirchoff). Si $p(0,t) > 0$ ($u > 0$), se tiene saturación en las proximidades de $z=0$; en tal caso el experimentador puede efectivamente prescribir la presión, por ejemplo variando la presión ambiente, o poniendo una capa de líquido sobre la superficie libre del medio poroso y eventualmente ejerciendo oportunas presiones sobre la misma. Está claro que será necesario agregar líquido, para mantener la banda saturada.

Si en cambio se tiene $p(0,t) < 0$ ($u < 0$), el medio es no saturado en proximidades de la superficie y la presión $p(0,t)$ del líquido en los poros no coincide con la del aire (la diferencia depende de la saturación) y por tanto no puede ser prescripta por el experimentador, pero puede ser medida.

Si finalmente $p(0,t)=0$ ($u=0$), en principio es posible que $p > 0$, $p < 0$ o $p=0$ en un entorno de $z=0$. El primer caso se puede verificar solamente si todo el dominio $(0,L)$ está saturado y $p(L,t) > 0$; en efecto, en la zona saturada se tiene $p_{zz}=0$. En cuanto al último caso (banda saturada a presión nula adyacente a una banda no saturada), veremos que esto no se puede verificar si la ecuación en la zona no saturada es uniformemente parabólica (la uniforme parabolicidad permite además excluir que p no tenga signo determinado en cada entorno de $z=0$).

Siempre en el caso de condiciones del primer tipo, se puede suponer que se conoce $\sigma(0,t)$ ($\theta(0,t)$). Es evidente que si $\sigma=1$ la condición no tiene realmente significado, porque puede corresponder a diferentes

presiones. Si $\sigma < 1$, se trata aún de una condición que es medible pero no puede ser prescripta.

b) Condiciones de contorno tipo Neumann

Si la banda superficial está saturada, asignar el flujo de líquido (masa por unidad de tiempo) significa asignar $-\frac{K}{g}(p_z(0,t) - \rho g) = Q(t)$. A menos que el dominio no esté todo saturado (en tal caso p_z puede tener cualquier signo, pero obviamente las condiciones sobre $x=0$ y $x=L$ deben ser compatibles; por ejemplo, si está asignado el flujo sobre $z=L$, éste deberá coincidir aún con $Q(t)$ y la solución será determinada sólo a menos de una constante), se requiere que p_z (que es constante en la zona saturada) sea no positivo. Se requiere por tanto $Q(t) \geq K\rho$, más precisamente veremos que debe valer la desigualdad en sentido estricto si la ecuación es uniformemente parabólica en la zona no saturada. Si la capa superficial es no saturada se tratará de asignar $Q(t) = -\frac{1}{g}K(p)(p_z - \rho g)|_{z=0}$, o sea, después de la transformación de Kirchoff, $Q(t) = -\rho[u_z - \gamma(u)]_{z=0}$; o bien, expresando todo en términos de θ , se tiene $Q(t) = -\rho[D(\theta)\theta_z - K(\theta)]_{z=0}$.

Si $Q(t) > 0$ (infiltración), será necesario verificar que la capa superficial se mantenga no saturada.

Condiciones sobre el flujo pueden ser medidas y también prescriptas. Otra condición bastante natural podría ser asignar una evaporación $Q(t)$ (< 0) función de la presión o de la saturación.

c) Condiciones de "ponding"

Una condición natural, que puede ser prescripta o medida, es asignar el volumen de líquido $R(t)$ suministrado a la superficie del suelo $z=0$. Si éste es excesivo respecto al que puede ser drenado de la banda porosa, una parte se acumulará en la superficie, formando una capa de espesor

$$(5.1) \quad L(t) = \int_0^t [R(\tau) + \frac{K}{g} \{p_z(0,z) - \rho g\}] d\tau + L(0) .$$

Si $L(t) \geq 0$ se tendrá además

$$(5.2) \quad p(0,t) = \rho g L(t) .$$

Entonces (5.1) y (5.2), junto con una condición que asegure que el medio se mantiene saturado en la superficie, dan una relación entre $p_t(0,t)$ y $p_z(0,t)$.

Más generalmente podremos escribir

$$(5.3) \quad - \frac{K(p)}{\rho g} (p_z - \rho g) \Big|_{x=0} = R(t) - \frac{p_t(0,t)}{\rho g} H(p(0,t)) ,$$

donde H es la función de Heaviside.

Concluimos este párrafo observando que las mismas consideraciones (salvo obviamente las relativas al ponding) pueden ser hechas para las condiciones sobre el contorno $z=L$.

PARTE II . SOLUCIONES CLÁSICAS

1. Generalidades

Reescribamos el balance de masa en un medio parcialmente saturado y en ausencia de gravedad en la forma

$$(1.1) \quad \theta_t = u_{zz} ,$$

completándola con la relación

$$(1.2) \quad u = \phi(\theta) ,$$

o también

$$(1.2') \quad \theta = \Psi(u) .$$

Pero la forma (1.1), (1.2) (o también (1.1), (1.2')) es una forma general que incluye distintas clases de problemas, al variar la ley $\phi(\theta)$. Por ejemplo, si

$$(1.3) \quad \phi(\theta) = c \theta ,$$

(1.1)-(1.2) corresponde a la ecuación del calor. Si además $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ y se tiene

$$(1.4) \quad a_0 \leq \Psi'(u) \leq a_1 ,$$

(1.1)-(1.2') corresponde a una ecuación de difusión no lineal con difusividad $1/\Psi'(u)$.

Si se tiene

$$(1.5) \quad \phi(\theta) = c \theta |\theta|^\alpha .$$

para $\alpha \geq 1$, estamos en el caso (4.5) de la parte I. generalmente llamada "ecuación de medios porosos" y estudiada para $\theta \geq 0$. El caso $0 < \alpha < 1$ también es degenerado en $\theta=0$, mientras que cuando $-1 < \alpha < 0$ se tiene la llamada "fast diffusion".

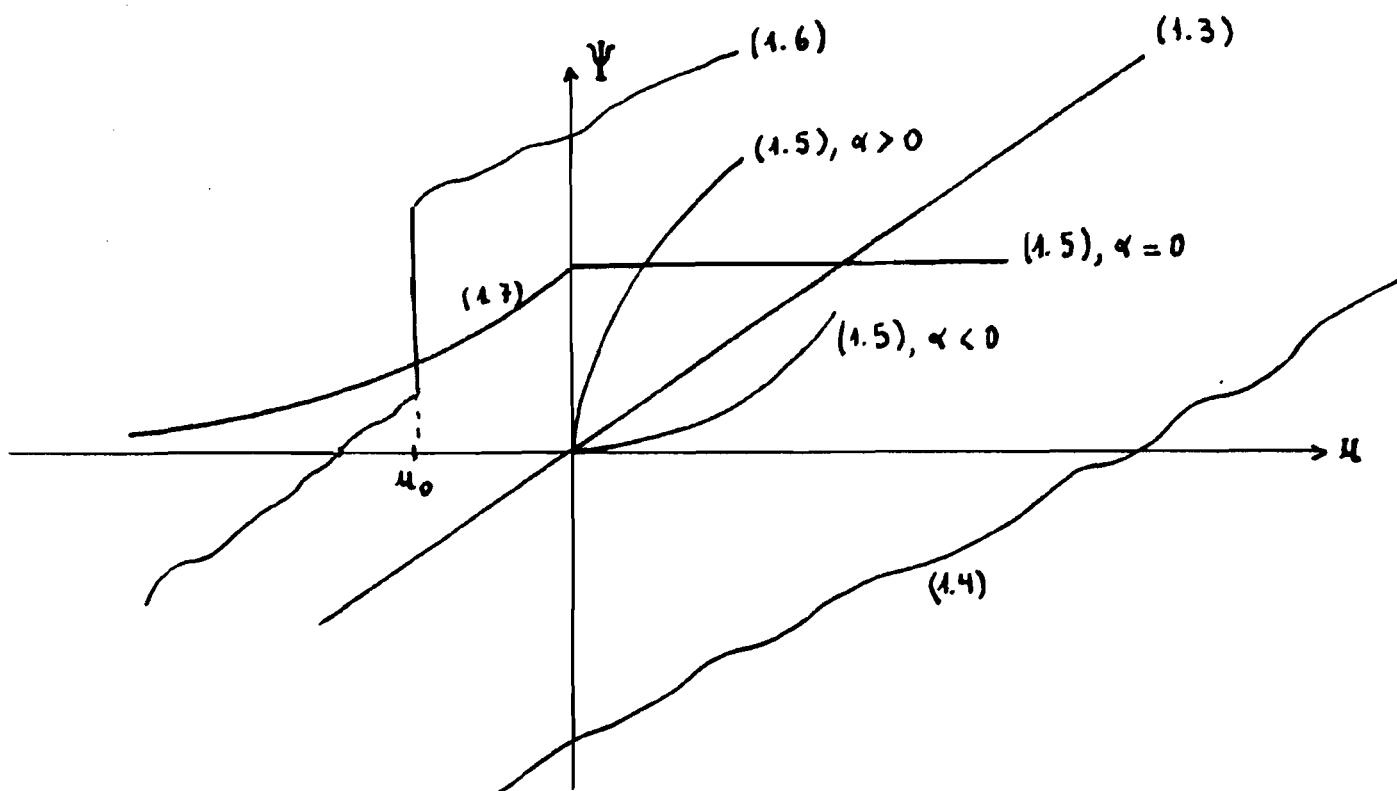
Cuando

$$(1.6) \quad \Psi(u) = f(u) + LH(u-u_0)$$

con $f(u) \in C^1$, $a_0 \leq f'(u) \leq a_1$, $L > 0$ y u_0 son constantes y H es el grafo de Heaviside, tenemos un problema de conducción del calor con cambio de fase a temperatura u_0 y calor latente L .

En el caso del modelo que hemos descrito en la parte precedente se tiene

$$(1.7) \quad \begin{cases} \Psi(u) = \epsilon, & u \geq 0, \\ \epsilon \geq \Psi(u) \geq 0, \quad \Psi'(u) \geq 0, & u \leq 0. \end{cases}$$



En las partes II y III nos referiremos a este último caso, con o sin la presencia del término extra $-[\gamma(u)]_z$ debido a la influencia de la gravedad (ver la ecuación (4.12) de la Parte I). En esta parte II discutiremos la resolución en sentido clásico y en la III consideraremos soluciones débiles.

En los problemas que consideraremos la "patología" está presente si u se hace cero (si θ se hace igual a ϵ), en práctica si se tiene la presencia simultánea de regiones saturadas y no saturadas. Problemas distintos surgen cuando θ puede anularse; de éstos nos ocuparemos brevemente en la parte IV, donde nos referiremos también a algunas cuestiones de carácter modelístico.

2. Un problema en la banda

Para que una aproximación clásica al problema sea posible es necesario introducir algunas ulteriores restricciones en (1.7).

Suponemos que para cada $U > 0$ existen δ y Δ tales que

$$(2.1) \quad \Delta \geq \Psi'(u) \geq \delta > 0, \quad u \in (-U, 0).$$

En base a lo antedicho y refiriéndonos inicialmente a un caso en el cual se desprecia la gravedad, consideramos un problema de filtración en una banda $z \in (0, 1)$.

Sea inicialmente

$$(2.2) \quad \theta(z, 0) = \theta_0(z) < \epsilon, \quad 0 < z < b < 1,$$

$$(2.3) \quad \theta(z, 0) = \epsilon, \quad b < z < 1.$$

Sobre el plano $z=0$ sea dado, en función del tiempo, el flujo saliente de líquido, a saber

$$(2.4) \quad u_z(0,t) = f(t) > 0 .$$

Consideremos ahora las condiciones sobre el plano $z=1$. Si está dado

$$(2.5) \quad u(1,t) = 0 ,$$

o bien

$$(2.6) \quad u_z(1,t) = 0 ,$$

entonces el problema (1.1)-(1.2') admitirá una solución $u(z,t)$ negativa en $(0,1) \times (0,T)$, para un T oportuno; es decir una solución en la cual toda la banda es no saturada y que se obtiene resolviendo simplemente una ecuación parabólica no lineal. Veremos más adelante que ésta es la única solución en el sentido clásico; en la parte III encontraremos que la unicidad subsiste aún para una clase más vasta de funciones.

Todo lo antedicho vale también en el caso en que las condiciones sean

$$u(1,t) = u_1(t) \leq 0 ,$$

o bien

$$u_z(1,t) = \phi_1(t) \leq 0 .$$

Supongamos entonces que se tenga

$$(2.7) \quad u(1,t) = U(t) > 0 ,$$

o bien

$$(2.8) \quad u_z(1,t) = g(t) > 0 .$$

En tal caso buscaremos en un oportuno intervalo de tiempo $(0,T)$ soluciones tales que exista un plano móvil (de ecuación $z=s(t)$ con $s(0)=b$) que en cada instante separa la zona no saturada $z \in (0,s(t))$ de la saturada $z \in (s(t),1)$; obviamente $s(t)$ es una incógnita del problema.

Si una tal solución existe, se tendrá

$$(2.9) \quad u_{zz} = 0, \quad s(t) < z < 1, \quad 0 < t < T,$$

en la parte saturada ($u > 0$), y

$$(2.10) \quad a(u) u_{zz} - u_t = 0, \quad 0 < z < s(t), \quad 0 < t < T,$$

en la parte no saturada; en la (2.10) hemos puesto

$$(2.11) \quad a(u) = 1/\Psi'(u) .$$

Por otra parte sobre el plano de separación entre las dos zonas la presión será continua y nula, mientras que el flujo de líquido será continuo.

De (2.9) sigue inmediatamente

$$(2.12) \quad u_z(s(t)+,t) = U(t) [1-s(t)]^{-1},$$

si la condición sobre $z=1$ es (2.7); en el caso (2.8) se tiene en cambio

$$(2.13) \quad u_z(s(t)+,t) = g(t) .$$

Ya que de (2.2), con la hipótesis (2.1), se llega de manera única a un solo dato inicial $h(z)$, para $\dot{u}(z,t)$ tenemos que resolver el siguiente problema de frontera libre:

Problema π Encontrar $\{T, s, u\}$ tales que

(i) $T > 0$, $s \in C[0, T]$, $s \in (0, 1)$;

(ii) $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\bar{D}_T)$, donde

$$D_T \equiv \{(z, t) : 0 < z < s(t) ; 0 < t < T\} ;$$

(iii) se satisfacen las siguientes condiciones

(2.14) $a(u) u_{zz} - u_t = 0$, en D_T ,

(2.15) $s(0) = b$, $u(z, 0) = h(z) < 0$, $0 < z < b$,

(2.16) $u_z(0, t) = f(t) > 0$, $0 < t < T$,

(2.17) $u(s(t), t) = 0$, $0 < t < T$,

(2.18) $u_z(s(t), t) = F(s(t), t) > 0$, $0 < t < T$,

donde $F(s(t), t)$ tiene una de las dos expresiones del segundo miembro de (2.12) o (2.13).

Buscaremos soluciones de (π) que posean ulteriores propiedades de regularidad ($s \in C^1(0, T)$, u_t continua hasta $z=s(t)$), de modo que derivando (2.17) y usando (2.14) y (2.18) se obtenga

(2.19) $F(s(t), t)\dot{s}(t) + a(u(s(t), t))u_{zz}(s(t), t) = 0$, $0 < t < T$.

Llamaremos problema (π') aquel en el cual (2.17) se sustituye por (2.19). Notemos que una solución de (π') resuelve obviamente (π) ya que (2.18) y (2.19) implican $\dot{u}(s(t), t) = 0$ y por tanto $u(s(t), t) = 0$ si $h(b) = 0$, condición esta última que por otro lado es necesaria para la existencia de soluciones de (π) en el sentido recién especificado, ya que $u(z, t)$ es continua en \bar{D}_T .

Por lo tanto escribiremos la ecuación (2.19) en la forma más simple

$$(2.20) \quad \alpha u_{zz}(s(t), t) = -F(s(t), t) \dot{s}(t) , \quad 0 < t < T ,$$

con

$$\alpha \equiv a(0) .$$

Observación 2.1 Si hubiéramos considerado (2.17) y (2.19) - en lugar de (2.18) y (2.19) - como condiciones sobre la frontera libre, habríamos ciertamente perdido la unicidad ya que $s(t)=b$ y u solución de (2.14)-(2.17) habría sido solución del nuevo problema, pero no de (π) . \square

Con la transformación

$$y = z/s(t) , \quad v(y, t) = u(s(t)y, t) ,$$

el problema a resolver se escribe, con obvio significado de los símbolos

$$(2.21) \quad s^{-2}a(v)v_{yy} + ys^{-1}\dot{s}v_y - v_t = 0 , \quad \text{en } R_T \equiv (0, 1) \times (0, T)$$

$$(2.22) \quad v(y, 0) = h_1(y) , \quad y \in (0, 1) ,$$

$$(2.23) \quad v_y(0, t) = s(t) f(t) , \quad t \in (0, T) ,$$

$$(2.24) \quad v_y(1, t) = F_1(s(t), t) , \quad t \in (0, T) ,$$

$$(2.25) \quad \dot{s}(t) = -G(s(t), t) v_{yy}(s(t), t) , \quad t \in (0, T) .$$

Observación 2.2 Para escribir (2.25) se utilizó el hecho que $U(t)$ y $g(t)$ son estrictamente positivas. Si se anulan para algún \bar{t} , la demostración que daremos es válida solamente para $T < \bar{t}$; por otra parte todo nuestro razonamiento es local. Ésta es también la razón por la cual el signo de $f(t)$ no jugará ningún rol en la demostración: si f fuera negativo podría existir un instante \hat{t} a partir del cual nace otra banda saturada en

proximidades del plano $z=0$. Nuestros teoremas siguen siendo válidos para $T < \hat{t}$. Notemos también que mientras la existencia de una banda no saturada comprendida entre dos bandas saturadas es compatible con nuestro esquema, ésto resulta incompatible con las dos situaciones siguientes:

- (i) banda saturada comprendida entre dos bandas no saturadas: en tal caso se tiene necesariamente $u \equiv 0$ en la zona saturada, pero esto significaría que la ecuación (por hipótesis uniformemente parabólica) que vale en la zona no saturada $u \leq 0$, tendría un máximo $u=0$ sobre la interfase con una derivada $u_z=0$, por continuidad; y esto contradice el principio del punto frontera (versión parabólica del lema de Hopf).
- (ii) una zona no saturada que, en el plano (x,t) , tuviera intersección vacía con el segmento $t=0$ y con los segmentos $\{x=0, t \in (0,a)\}$ y $\{x=1, t \in (0,a)\}$ para algún $a > 0$. También esta situación estaría en contradicción con el principio fuerte del máximo. \square

3. Estimaciones a priori y solución de un problema auxiliar

Hagamos las siguientes hipótesis

- (A) $a(u) \in C^2(\mathbb{R}^-)$,
 $0 \leq \nu_1(|u|) \leq a(u) \leq \nu_2(|u|)$, con ν_1^{-1} y ν_2 funciones crecientes.
- (B) $h \in H^{1+\alpha}(0,b)$, $f \in H^\alpha(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$,
 $h < 0$ en $(0,b)$, $f > 0$ en $(0,T)$, $h'(0)=f(0)$, $h(b)=0$, $h'(b)=F(0,b)$.
- (C) $F(z,t) \in H^{1+\alpha}(\mu,1-\mu) \times (0,T)$ para algún $\mu > 0$,
 $0 < F < F_0$ en $(\mu,1-\mu) \times (0,T)$.
 $\|F_z\|_\alpha + \|F_t\|_\alpha < F_0$ en $(\mu,1-\mu) \times (0,T)$.

Consideremos el problema

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & a(U) U_{zz} - U_t < 0, && \text{en } (0,1) \times (0,T), \\
 & U(z,0) = \begin{cases} h(z), & 0 < z < b, \\ 0, & b < z < 1, \end{cases} \\
 & U_z(0,t) = f(t)^3, && 0 < t < T, \\
 & U(1,t) = 0, && 0 < t < T.
 \end{aligned}$$

U admite una estimación a priori

$$(3.2) \quad -K(1-z) \leq U(z,t) \leq 0,$$

donde K depende de h y de f . Entonces resulta $a(U) \in [\nu_1(K), \nu_2(K)]$ y el problema (3.1) admite solución con T arbitrario. Se tiene entonces

Proposición 3.1 Sea $\{T, s, u\}$ una solución del problema (π) . Se tiene

$$(3.3) \quad U(z,t) \leq u(z,t) < 0, \quad \text{en } D_T.$$

Demostración Es una inmediata consecuencia del principio de máximo. \square

Por lo tanto toda solución de (π) está acotada a priori. Si entonces definimos $a^*(u)$ coincidente con $a(u)$ para $u \in [-K, 0]$ y acotada para $u < -K$, haciendo una prolongación de regularidad arbitraria, sigue inmediatamente que las soluciones de (π) correspondientes a la ecuación (2.14) y a la que se obtiene sustituyendo $a(u)$ por $a^*(u)$ coinciden. Por lo tanto tenemos el

³ $|f|$, si no se supone $f > 0$, ver Observación 2.2.

Corolario 3.2 En lo que sigue, podemos suponer sin pérdida de generalidad

$$(3.4) \quad \mu_2 \leq a(u) \leq \mu_1 .$$

Observación 3.2 Retomemos lo dicho en la Observación 2.2 acerca del carácter local (en el tiempo) de nuestro tratamiento: por lo tanto no nos preocuparemos en obtener el valor máximo de T . De todos modos se puede observar que la masa de líquido inicialmente presente es

$$M(0) = \int_0^b \Psi(h(z)) dz + \epsilon (1-b) ,$$

(recordar la (1.2)); y que la masa de fluido que entra desde el instante 0 hasta el instante t_0 es

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} u_z(1,t) dt - \int_0^{t_0} f(t) dt ;$$

con lo cual, limitándonos por simplicidad al caso de la (2.8) (de otro modo $Q(t_0)$ podrá ser estimada por exceso y/o por defecto, dependiendo de la incógnita $s(t)$) se tiene

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} [g(t) - f(t)] dt .$$

Sigue que si existe un \hat{t} para el cual $M(0)+Q(\hat{t})=\epsilon$, será ciertamente $T \leq \hat{t}$ ya que para $t=\hat{t}$ el medio estará completamente saturado (de (1.1) se tiene en efecto $M(t)=M(0)+Q(t)$). □

Sean ahora dados $T > 0$ y $s \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$, tales que $s(0) = b$ y

$$(3.5) \quad |\dot{s}(t)| \leq K_1, \quad t \in (0, T),$$

$$(3.6) \quad |\dot{s}(t_1) - \dot{s}(t_2)| \leq K_2 \tau^{-1/2} (t_2 - t_1)^\alpha, \quad 0 < \tau \leq t_1 \leq t_2 \leq T,$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ y τ es arbitrario en $(0, T)$; sea además

$$(3.7) \quad \mu \leq s(t) \leq 1 - \mu, \quad t \in (0, T), \quad \text{para algún } \mu > 0.$$

El problema (2.21)-(2.24) resulta uniformemente parabólico en base a (3.4). Supongamos que los datos h , f , F y la función $s(t)$ (además de satisfacer (A), (B), (C) y (3.5)-(3.7)) sean infinitamente derivables e indiquemos con M cada constante dependiente a lo sumo de $\|f\|_\alpha$, $\|h\|_{1+\alpha}$, F_0 , μ , $\|a\|_{C_2(-K, 0)}$, K_1 .

En base al Teorema 7.4 p. 491 de [52], podemos afirmar que (2.21)-(2.26) admite única solución en $C_{2+\beta}(\bar{R}_T)$ para un oportuno $\beta \in (0, 1)$. Además resulta

$$(3.8) \quad |v(y, t)| \leq M, \quad \text{en } R_T.$$

Si además definimos

$$(3.9) \quad Z(y, t) = v_y(y, t) - F_1(s(t), t), \quad \text{en } R_T,$$

tenemos que Z es solución del problema lineal

$$(3.10) \quad \begin{aligned} A Z_{yy} + B Z_y + C - Z_t &= 0 && \text{en } R_T, \\ Z(y, 0) &= h'_1(y) - F_1(b, 0), && \text{en } (0, 1), \\ Z(0, t) &= s(t) f(t) - F_1(s(t), t), && \text{en } (0, T), \\ Z(1, t) &= 0, && \text{en } (0, T), \end{aligned}$$

donde

$$A = a(v(y,t)) s^{-2}(t) ,$$

$$B = a'(v(y,t))v_y(y,t)s^{-2}(t) + y\dot{s}(t)s^{-1}(t) ,$$

$$C = v_y(y,t) \dot{s}(t) s^{-1}(t) - \dot{F}(s(t),t) ,$$

deben pensarse como funciones dadas de (y,t) en R_T una vez que el problema (2.21)-(2.24) haya sido resuelto.

Como Z (y por tanto v_y) se pueden acotar a priori en base al principio de máximo, el Teorema 10.1 pag. 204 de [52] nos proporciona una estimación de la constante de Hölder de Z

$$(3.11) \quad \|Z\|_{H^{\gamma, \gamma/2}(\bar{R}_T)} \leq M ,$$

para un oportuno $\gamma \in (0,1)$. Además es fácil deducir también

$$(3.12) \quad \|v\|_{H^{\gamma, \gamma/2}(\bar{R}_T)} \leq M ,$$

utilizando el mismo Teorema para una estimación interna de v ⁴ y después la (3.11).

Eliminaremos ahora la hipótesis de datos y s infinitamente derivables. Para esto aproximamos s , a , f , h_1 , F_1 con s_n , a_n , f_n , h_n , F_n de modo que (3.1)-(3.2) y (A), (B), (C) sean verificadas y que $\|s_n - s\|_{C^1(0,T)}$, $\|a_n - a\|_{C^2(-K,0)}$, $\|f_n - f\|_{H^\alpha(0,T)}$, $\|h_n - h\|_{H^{1+\alpha}(0,1)}$, $\|F_n - F\|_{C^\alpha(\mu, 1-\mu) \times (0,T)}$ tiendan a cero.

Las correspondientes soluciones de (2.21)-(2.24) y de (3.10), que indicaremos con v_n y z_n convergen entonces a dos funciones $v, z \in H^{\gamma, \gamma/2}(R_T)$

⁴Este paso no es necesario si sobre $y=0$ se asigna v en lugar de v_y .

(en realidad convergen dos subsucesiones que indicaremos aún con $\{v_n\}$, $\{z_n\}$).

Se tiene además que los coeficientes A_n , B_n , C_n de los problemas resueltos por z_n tienen normas $\|A_n\|$, $\|t^{1/2}B_n\|$, $\|tC_n\|$ en $H^{\gamma, \gamma/2}(R_T)$, acotadas independientemente de n , para un $\gamma \in (0,1)$ también independiente de n . Por lo tanto la función $Z(x,t)$ resuelve el problema límite (estimaciones de Schauder [25]) y lo mismo para v . De este modo hemos demostrado el

Teorema 3.3 *En las hipótesis (A), (B), (C), para cada s que satisface (3.5)-(3.7), el problema (2.21)-(2.24) es resoluble en $C_{1,0}(\bar{R}_T) \cap H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(R_T)$. \square*

Sustituimos ahora la hipótesis (B) con la más fuerte

$$(B') \quad h \in C^2(0,b), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^+), \quad h < 0 \text{ en } (0,b), \quad f > 0 \text{ en } (0,T) \\ h'(0)=f(0), \quad h(b)=0, \quad h'(b)=F(0,b).$$

Indicaremos con N constantes que dependen, además de las cantidades de las que dependen las constantes M , de $\|h\|_2$ y de $\|f\|_1$. Se tiene

$$(3.13) \quad |v_{yy}| \leq V_0 \|h\|_2 + N t^{\gamma/2}$$

donde V_0 depende de K , μ y a , pero no de K_1 .

En efecto, en el problema (3.10) $\|A_n\|_{H^{\gamma, \gamma/2}}$, $\|B_n\|_\infty$, $\|C_n\|_\infty \leq M$. Además B_n y C_n son hölderianas (uniformemente con respecto a n) en cada rectángulo $(0,1) \times (\tau, T)$ con $0 < \tau < T$. Restando a Z la cantidad $[s(t)f(t) - F_1(s(t), t)](1-y)$ se obtiene un problema con las mismas características pero con dato nulo sobre el borde. De todo lo anterior sigue (3.13).

Se tiene luego, para cada $\epsilon \in (0,1)$

$$(3.14) \quad \|v\|_{H^{2+\epsilon, 1+\epsilon/2}(\tau, T) \times (0,1)} \leq N_\epsilon \tau^{-1/2}$$

donde N_ϵ depende también de ϵ . v_{yy} es continua sobre $y=1 \forall t > 0$ (para la demostración ver [21], [22]).

Finalmente

$$(3.15) \quad |v_{yyy}| \leq \bar{N} t^{-1/2} \quad \text{en } R_T$$

donde \bar{N} depende también de K_2 . (para la demostración ver [21], [22]).

Como consecuencia de las estimaciones recién obtenidas, resulta

Teorema 3.4 *En las hipótesis (A), (B'), (C) el problema (2.21)-(2.24) admite una sola solución.*

En efecto, la diferencia entre dos eventuales soluciones, $w(y,t)$, satisface un problema con datos nulos y con un término de fuente acotado por $N \sup_{\eta \in (0,1)} |v_{yy}(y,t)| \sup_{\eta \in (0,1)} |W(y,t)|$. □

4. Teorema de existencia para el problema (π').

Sea $\mathfrak{B}(K_1, K_2, \mu, \alpha, T)$ la clase de las funciones $s \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$ que satisfacen (3.5)-(3.6) con $s(0)=b$. Como ya vimos, $\forall s \in \mathfrak{B}$ es posible resolver (2.21)-(2.24), entonces se puede definir $r(t)$ mediante

$$(4.1) \quad \dot{r}(t) = -G(s(t), t) v_{yy}(1, t), \quad r(0) = b.$$

De este modo hemos definido una transformación $r=\mathfrak{F}(s)$ cuyas propiedades son las siguientes (se supone que aún se verifican las

hipótesis (A), (B'), (C)):

Propiedad a) Existen dos valores \bar{K}_1, \bar{K}_2 dependientes de los datos y de μ tales que para $K_1 \geq \bar{K}_1, K_2 \geq \bar{K}_2$ existe T_0 tal que \mathcal{T} transforma \mathfrak{B} en sí mismo.

Notemos que

$$(4.2) \quad G(s(t), t) = \frac{a(v(1, t))}{F(t, s(t)) s^2(t)} .$$

Por lo tanto, de la (3.13)

$$(4.3) \quad |\dot{r}| \leq R (1 + N t^{\gamma/2}) .$$

Como R no depende de K_1 , se puede elegir $K_1 > R$ y determinar un $T_1 \leq T$ tal que r satisfaga (3.5) y (3.7).

Respecto a la (3.6), ésta se verifica siempre que K_2 se elija bastante "grande" dependiendo de K_1 y de los datos.

Propiedad b) Existe $\bar{T} \leq T_1$ tal que \mathcal{T} es una transformación contractiva respecto a la norma C_1 .

Dados $s_1, s_2 \in \mathfrak{B}$ sean v_1, v_2 las soluciones correspondientes de (2.21)-(2.24), Z_1, Z_2 las de (3.10) y r_1, r_2 las funciones definidas en base a la (4.1). Consideremos

$$\Delta(t) = s_1(t) - s_2(t) ,$$

$$V(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t) ,$$

$$W(y, t) = Z_1(y, t) - Z_2(y, t) .$$

El problema que satisface V es un problema lineal en el cual los

datos y la fuente son mayorables para cada t en $(0, T_0)$, en términos de $\|\dot{\Delta}\|_t \equiv \max_{r \in [0, t]} |\dot{\Delta}(r)|$. Se recuerden las hipótesis sobre los datos y (3.11), (3.13). Además resulta

$$(4.4) \quad \|\Delta\|_t \leq t \|\dot{\Delta}\|_t$$

siendo $\Delta(0)=0$.

Descomponiendo el problema en dos (uno con fuente nula, el otro con los datos nulos) la solución del primero se mayorará con el principio de máximo, la del segundo lleva a una desigualdad del tipo [21]

$$(4.5) \quad |\hat{V}(y, t)| \leq N \left(t \|\dot{\Delta}\|_t + \int_0^t \max_{y \in (0, 1)} |\hat{V}(y, \tau)| d\tau \right).$$

Usando el lema de Gronwall se llega finalmente a

$$(4.6) \quad |V(y, t)| \leq N t \|\dot{\Delta}\|_t, \quad \text{en } R_{T_2}.$$

En cuanto a W , un procedimiento análogo lleva a

$$(4.7) \quad |W(y, t)| \leq N t \|\dot{\Delta}\|_t, \quad \text{en } R_{T_1};$$

(nótese que aquí se usa (3.15) junto con (4.4) en la mayoración del término fuente).

Para estimar W_y nos reducimos a un problema con dato inicial nulo restando $W(0, t)(1-y)$ que tiene una derivada respecto a y acotada en términos de $\Delta(t)$. Después se expresa la solución $W_0(y, t)$ de este problema en términos de la función de Green para el operador $A \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial t}$ en $(0, 1) \times (0, T_1)$. Esto significa desplazar formalmente en el término "fuente" tanto el término en W_0 como el término en W_{0y} . Los términos que no

contienen W_{0y} se estiman usando también (4.6) y (4.7), llegando en definitiva a una desigualdad de la forma

$$\max_{y \in (0,1)} |W_{0y}(y,t)| \leq N \left[t^{1/2} \|\dot{\Delta}\|_t + \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \max_{x \in (0,1)} |W_y(x,\tau)| d\tau \right];$$

mediante una desigualdad de Gronwall generalizada se obtiene en suma

$$|W_y(y,t)| \leq N t^{1/2} \|\dot{\Delta}\|_t .$$

Por lo tanto

$$\|r_1 - r_2\|_{C^1[0,t]} \leq N t^{1/2} \|s_1 - s_2\|_{C^1[0,t]} ,$$

y si es necesario, se puede reducir T_0 para que \mathcal{T} resulte localmente una contracción.

Luego el teorema de Banach y (3.5), (3.6), (3.7) permiten afirmar

Teorema 4.1 *En las hipótesis (A), (B'), (C) el problema (π') tiene una única solución para un oportuno intervalo de tiempo $(0, \bar{T})$. Además $s \in H_{1+\alpha}(0, \bar{T})$.*

Sigue también que el problema (π) es resoluble unívocamente.

5. Otros problemas de contorno

Nos limitaremos a considerar problemas en el intervalo $(0,1)$ ya que el examen de problemas en el semiespacio nos llevaría a la cuestión (delicada desde el punto de vista modelístico, más que matemático) de la filtración en condiciones de saturación próxima a cero: este argumento será brevemente tratado en el párrafo 4 de la parte IV.

Observación 5.1. Todo lo dicho en el párrafo precedente para el problema con la ecuación de filtración en la forma (2.14) (ausencia de gravedad), se puede repetir sin dificultad cuando la ecuación que se considera es la (4.12) de la Parte I: en efecto, la introducción del término debido a la gravedad modifica la ecuación (2.21), a la cual nos hemos referido en las demostraciones, por la adición de un término $\gamma'(v_y)$ $v_y/s(t)$. Esta adición no modifica las demostraciones ya que un término v_y (y además conteniendo \dot{s}) estaba ya presente.

Lo que cambia es que la condición (2.14) ya no corresponde a asignar el flujo de líquido y entonces el problema π' con la adición de un término de gravedad en la ecuación diferencial está bien planteado, pero corresponde a un problema de interés puramente matemático. \square

Como ya hemos visto, para las demostraciones hechas en los párrafos precedentes no hay diferencias sustanciales entre el caso en el cual sobre la cara saturada se asigna la presión o el flujo.

La presencia de gravedad permite tomar en consideración también una condición de "ponding" (ver §5c de la Parte I): obviamente en este caso supondremos que la cara saturada es la superficie del suelo $z=0$.

El problema fue examinado en detalle en [31]; aquí nos limitaremos a mostrar cómo se modifica en este caso la condición (2.18) sobre la frontera libre (la (2.17) queda obviamente invariante).

De (5.1) y (5.2) de la Parte I se tiene

$$(5.1) \quad p(0, t) = \rho g \left\{ L_0 + \int_0^t [R(\tau) + \frac{K}{\rho g} (p_z(0, z) - \rho g)] d\tau \right\} ,$$

hasta el momento en que la zona superficial queda saturada (ver la Observación 2.2 sobre el carácter local de nuestra investigación).

Como $p_{zz}=0$ en $(0, s(t))$ escribiremos

$$(5.2) \quad p_z(0, t) = p_z(s(t), t) = -p(0, t)/s(t) .$$

Poniendo

$$(5.3) \quad Y(t) = \int_0^t p_z(0, \tau) d\tau ,$$

se obtiene, de (5.1) y (5.2) la siguiente ecuación diferencial para $Y(t)$:

$$(5.4) \quad s(t)\dot{Y}(t) + KY(t) = \rho g \left[Kt - \int_0^t R(\tau) d\tau - L_0 \right] , \quad Y(0) = 0.$$

Si se define

$$(5.5) \quad G(t) = \rho g \left[Kt - \int_0^t R(\tau) d\tau - L_0 \right] ,$$

y

$$(5.6) \quad \eta(t) = K \int_0^t [s(\tau)]^{-1} d\tau ,$$

se obtiene

$$(5.7) \quad Y(t) = \int_0^t \frac{G(\tau)}{s(\tau)} \exp[\eta(\tau) - \eta(t)] d\tau ,$$

y entonces, siendo

$$u_z(s(t)^-, t) = \frac{K}{\rho g} p_z(s(t), t) = \frac{K}{\rho g} \dot{Y}(t) ,$$

se obtiene con simples pasos

$$(5.8) \quad u_z(s(t)^-, t) = -K \exp[-\eta(t)] \left\{ L_0 + \int_0^t [K - R(\tau)] \exp(\eta(\tau)) d\tau \right\}.$$

Por lo tanto, en lugar de (2.18) se obtiene sobre la frontera libre una condición en la cual u_z se expresa no como una función de $s(t)$ y del tiempo sino como un funcional dependiente de los valores de $s(\tau)$ entre 0 y t . Por eso escribiremos

$$(5.9) \quad u_z(s(t), t) = \mathfrak{F}_t\{s(t); t\} .$$

Revisando las demostraciones de los párrafos precedentes, se puede notar que todos los resultados siguen siendo válidos ya que $\mathfrak{F}_0(b, 0) < 0$ (el cambio de signo está ligado al hecho de que ahora la parte saturada es la que está a la izquierda de la frontera libre) y que la regularidad de \mathfrak{F} está asegurada cuando $s \in (\mu, 1 - \mu)$ y hasta cuando hay ponding y entonces el segundo miembro se mantiene negativo.

6. Condiciones de presión sobre la pared no saturada

Supongamos que la condición sobre la cara $z=0$ (que volvemos a considerar como la cara no saturada) sea ahora $p(0, t) = \phi(t)$ o, equivalentemente, $u(0, t) = f(t)$ y mostremos que los resultados de buen

planteo local siguen valiendo; para más detalles ver [32].

Reescribamos directamente el problema en una forma análoga a (2.21)-(2.25) habiendo ya hecho la transformación $y=z/s(t)$:

$$(6.1) \quad v_{\tau} = a(v)s^{-2}v_{yy} + b(v)s^{-1}v_y + yv_y s^{-1}\dot{s} \quad \text{en } (0,1) \times (0,T) \equiv R_T,$$

$$(6.2) \quad v(y,0) = h(y) \quad \text{en } (0,1),$$

$$(6.3) \quad v(0,t) = f(t) \quad \text{en } (0,T),$$

$$(6.4) \quad v_y(1,t) = \mathfrak{F}(s(t),t) \quad \text{en } (0,T),$$

$$(6.5) \quad \dot{s} = \frac{-1}{\mathfrak{F}(s(t),t)} (a(v)s^{-2}v_{yy}(1,t) + b(v)s^{-1}v_y(1,t)) \quad \text{en } (0,T)$$

$$(6.6) \quad s(0) = b$$

(donde el término $b(v)$ proviene de haber introducido la fuerza de gravedad).

Análogamente a lo hecho en el párrafo 3, demostraremos que si los coeficientes y los datos se suponen C^∞ , el problema (6.1)-(6.4) con $s(t) \in C^\infty$ dada de manera que satisfaga (3.5)-(3.7) admite única solución, después de lo cual buscaremos estimaciones que valgan bajo las más débiles hipótesis de regularidad supuestas para s y para los datos en los precedentes párrafos.

Para demostrar la existencia y unicidad de una solución de (6.1)-(6.4) consideremos la función $w = v - y\mathfrak{F}(s(t),t)$; ésta satisface un sistema de ecuaciones del todo similar al (6.1)-(6.4), pero se tiene $w_y(1,t) = 0$. Si entonces se considera \bar{w} como la función obtenida reflejando w respecto al eje $y=1$ se ve que \bar{w} satisface un problema de Dirichlet casi-lineal para el cual en base al teorema 6.4 pag. 16 de [52] existe una solución

$\bar{w} \in H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T) \cap W_2^{2,1}(Q')$ ⁵, $\bar{w}_y \in H^{\gamma, \gamma/2}(Q_T)$, donde $Q_T \equiv (0,2) \times (0,T)$ y Q' está estrictamente contenido en Q_T .

Se tiene además

$$(6.7) \quad \|\bar{w}\|_{\alpha, \bar{Q}_T} \leq M$$

(donde con M se indica cualquier constante como en el parágrafo 3).

El Teorema 9.1 pag 341 de [52] provee una estimación para \bar{w}_y y $\bar{w}_{yy} \bar{w}_t$ y se tiene

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \|\bar{w}_y\|_{\alpha, Q_T} &\leq M \\ \|\bar{w}\|_{2,q, Q_T} &\leq M \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in (0,1), \forall q > 2$.

Además la solución \bar{w} es única como se ve escribiendo el sistema satisfecho por \bar{w}_1, \bar{w}_2 y aplicando el Teorema 3.3 pag. 149 de [52] (teniendo en cuenta las estimaciones válidas para \bar{w}_1 y \bar{w}_2).

Este teorema de unicidad permite concluir que \bar{w} es par con respecto al eje $y=1$ y como $w_y \in H^{\gamma, \gamma/2}(\bar{Q}_T)$ se tiene $\bar{w}_y(1,t)=0$: o sea \bar{w} restringido a R_T es solución del sistema de ecuaciones verificadas por w ; en conclusión se tiene que existe y es única la solución de (6.1)-(6.4); además se satisfacen las mismas estimaciones verificadas por \bar{w} .

⁵ $W_q^{m,n}(D)$ indica el espacio de las funciones que tienen derivadas generalizadas (hasta el orden m con respecto a x y hasta el orden n con respecto a t) en $L^q(D)$. Cuando el índice sea q , de aquí en más será omitido.

Entonces, procediendo como en el parágrafo 3, se demuestra que bajo las hipótesis (A), (B), (C) el problema (6.1)-(6.4) admite única solución $v \in H^{\beta, \beta/2}(\bar{R}_T) \cap H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(R_T)$ $v_y \in H^{\beta, \beta/2}(\bar{R}_T)$ $\forall \beta \in (0, 1)$.

Ahora queremos obtener una estimación análoga a la (3.13). Para esto consideramos $a(v)s^{-2}$, $b(v)s^{-1}$, $yv_y s^{-1}$ como datos y escribimos v como suma de tres funciones $v = v_1 + v_2 + v_3$.

La función v_1 es tal que

$$\begin{aligned} v_{1t} &= a(v)s^{-2}v_{1yy} + b(v)s^{-1}v_{1y}, & \text{en } R_T, \\ v_1(y, 0) &= h(y), & \text{en } (0, 1), \\ v_{1y}(0, t) &= h(0), & \text{en } (0, T), \\ v_{1y}(1, t) &= \mathcal{F}(s(t), t), & \text{en } (0, T); \end{aligned}$$

la función v_2 es tal que

$$\begin{aligned} v_{2t} &= a(v)s^{-2}v_{2yy} + b(v)s^{-1}v_{2y} + y\dot{s}s^{-1}v_{2y}, & \text{en } R_T, \\ v_2(y, 0) &= 0, & \text{en } (0, 1), \\ v_{2y}(0, t) &= 0, & \text{en } (0, T), \\ v_{2y}(1, t) &= 0, & \text{en } (0, T); \end{aligned}$$

y la función v_3 es tal que

$$\begin{aligned} v_{3t} &= a(v)s^{-2}v_{3yy} + b(v)s^{-1}v_{3y}, & \text{en } R_T, \\ v_3(y, 0) &= 0, & \text{en } (0, 1), \\ v_3(0, t) &= f(t) - v_1(0, t) - v_2(0, t), & \text{en } (0, T), \\ v_{3y}(1, t) &= 0, & \text{en } (0, T). \end{aligned}$$

Para ${}_1v$, estimaciones como (3.13), (3.14) se obtienen en un modo del todo análogo a lo hecho en el párrafo 3 (teniendo en cuenta las estimaciones sobre v y aplicando el teorema 9.1 pag 341 de [52]).

En lo que se refiere a ${}_2v$, poniendo $z_2 = {}_2v_y$ y escribiendo el sistema satisfecho por z_2 , teniendo en cuenta (6.8) y aplicando el Teorema 9.1 pag. 341 de [52] se tiene

$$\|z_{2y}\|_{1+\gamma_1, \bar{D}_T} \leq M(K) T^r, \quad r \in (0,1)$$

(6.8)₁

$$\|z_2\|_{2;q, \bar{D}_T} \leq M(K) T^r, \quad \forall q.$$

Para ${}_3v$ en cambio se procede en otro modo: en efecto no es difícil convencerse, expresando eventualmente la solución ${}_3v$ del tercer sistema por medio de la solución fundamental Γ , que ${}_3v_{xt}(\frac{1}{2}, t) \leq M(K)$, de donde procediendo como en el caso precedente se obtienen estimaciones para ${}_3v$ análogas a las de ${}_2v$, pero en el dominio $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, T]$.

De todo esto sigue que (3.13) y (3.14) valen también para nuestro problema y entonces es posible seleccionar una clase de funciones \mathfrak{B} , como en el párrafo 4, que la aplicación \mathfrak{T} transforma en sí misma. Falta demostrar que \mathfrak{T} es una contracción. Para esto sean, como en el párrafo 4,

$$\Delta t = s_1(t) - s_2(t)$$

$$V(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t)$$

$$W(y, t) = v_{1y}(y, t) - v_{2y}(y, t).$$

Escribamos ahora el problema satisfecho por V observando que $a_1(v_1) - a_2(v_2)$ se puede expresar como $\frac{a_1(v_1) - a_2(v_2)}{v_1 - v_2} V$. Teniendo presente la

estimación (6.8) y el hecho que $\frac{a_1(v_1) - a_2(v_2)}{v_1 - v_2}$ está en L^∞ y procediendo en modo análogo a lo que nos condujo a (6.8) se obtiene

$$(6.9) \quad \|V(y, t)\|_{1+\alpha, R_T} \leq M(K) T^s,$$

$$\|V(y, t)\|_{2, q, R_T} \leq M(K) T^s,$$

con $\gamma \in (0, 1)$, q arbitrario y s oportuno.

Ahora definimos

$$V_1 = {}_1v_1 - {}_1v_2, \quad W_1 \text{ consecuentemente;}$$

$$V_2 = {}_2v_1 - {}_2v_2, \quad W_2 \text{ consecuentemente;}$$

$$V_3 = {}_3v_1 - {}_3v_2, \quad W_3 \text{ consecuentemente.}$$

Para V_1 se tiene

$$(6.10) \quad |V_{1yy}| \leq N(K_1, K_2) t \|\dot{\Delta}\|_t$$

en modo del todo análogo a como se demostró en el párrafo 4. A tal fin recordemos que para ${}_i v_i$, $i=1, 2$ la estimación (3.15) se obtiene análogamente al párrafo 3.

Además para obtener (6.10) se debe también tener en cuenta (6.9) y (6.8).

Para V_2 , una vez escrito el problema para V_{2y} y considerando (6.9), (6.8) y (6.8)₁ se tiene, por el Teorema 9.1 pag. 341 de [52], una estimación análoga a (6.10)

$$|V_{2yy}| \leq N(K_1) t^s \|\dot{\Delta}\|_t, \quad s \in (0, 1) \text{ oportuna.}$$

Con referencia a V_3 se tiene que V_3 satisface una ecuación del tipo

$$(6.12) \quad v_{3t} = a(v)s^{-2}v_{3yy} + b(v)s^{-1}v_{3y} + Q$$

donde $|Q|$, $\|\frac{\partial Q}{\partial y}\|_{q, D_T^*} \leq M(K_1) \|\dot{\Delta}\|_t t^s$, $s \in (0, 1)$ oportuno, $D_T^* = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, t]$, $q \geq 2$.

Ahora se escribe $v_3 = v_{3A} + v_{3B}$, donde v_{3A} verifica (6.12) y $v_{3Ay}(\frac{1}{2}, t) = v_{3Ay}(1, t) = v_{3A}(y, 0) = 0$, y v_{3B} verifica (6.12) sin el término Q y es tal que $v_{3By}(1, t) = v_{3B}(y, 0) = 0$, $v_{3B}(\frac{1}{2}, t) = v_3(\frac{1}{2}, t) - v_{3A}(\frac{1}{2}, t)$; luego se procede análogamente a lo hecho para encontrar las estimaciones para v_3 y se obtiene (considerando todas las desigualdades obtenidas hasta el momento) una estimación

$$|v_{3yy}| \leq M(K_1) \|\dot{\Delta}\|_t t^s, \quad s \in (0, 1) \text{ oportuno.}$$

Teniendo en cuenta las estimaciones obtenidas para v_1 , v_2 , v_3 se obtiene una estimación para $|v_{yy}|_{[\frac{1}{2}, 1] \times [0, T]}$ de la cual, como en el párrafo 4, se deduce la contractibilidad de \mathcal{T} . Así concluye la demostración. \square

7. Condiciones de flujo sobre la pared no saturada

Como adelantamos en la Observación 5.1, cuando se está en presencia de gravedad, asignar el flujo sobre la cara no saturada $z=0$ ya no equivale a una condición del tipo (2.16), sino que, habiendo escrito la ecuación en la forma (4.12) de la Parte I, debemos considerar la condición

$$(7.1) \quad u_z(0, t) - \gamma(u(0, t)) = f(t) .$$

Veamos entonces rápidamente cómo se puede estudiar el problema con flujo asignado que, con la misma transformación utilizada anteriormente podemos reescribir en la forma (6.1), (6.2), (6.4), (6.5), (6.6) y

$$(7.2) \quad v_y(0,t) = s(t) l(t,v) ,$$

donde $l(t,v) = \gamma(v(0,t)) + f(t)$.

Razonando como en la Observación 5.1, el problema se reduce a un problema uniformemente parabólico; como en el párrafo 3 se obtienen fácilmente las estimaciones a priori

$$(7.3) \quad |v(y,t)| \leq M , \quad \text{en } R_T ,$$

$$(7.4) \quad |v_y(y,t)| \leq M , \quad \text{en } R_T .$$

Consideremos ahora un rectángulo genérico $[\alpha, \beta] \times [t_1, t_2] \subset R_T$. Se tendrá, integrando la ecuación (6.1) en $[\alpha, \beta] \times [t_1, t_2]$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} [v(y, t_1) - v(y, t_2)] dy \right| \leq M |t_1 - t_2|$$

siendo $|v_y(y,t)| < M$.

Definiendo luego $F(y) = v(y, t_2) - v(y, t_1)$ se tiene

$$|F'| \leq 2M , \quad \int_{\alpha}^{\beta} |F(y)| dy \leq M |t_2 - t_1| ;$$

de donde

$$(7.5) \quad |F| \leq \max(2M |t_2 - t_1| ; 2\sqrt{M |t_2 - t_1|})$$

y entonces $v \in H^{1,1/2}$ y su norma está mayorada por M , constante que depende sólo de las cantidades especificadas en el párrafo 3.

Ahora $s(t)l(t,u)$ puede ser considerada como una función dada de t , perteneciente a $H^{1/2}([0, T])$ con norma acotada por una constante M oportuna, y entonces aplicando el Teorema 9.1 pag. 341 de [52] a (6.1)-(6.4) se

demuestra que $\|v_y\|_{\alpha, R_T} \leq CT^\gamma$.

De ahora en más se procede como en el párrafo 3, considerando la ecuación (6.1) como una ecuación a coeficientes dados y expresando v como la suma de dos funciones v_1 y v_2 que satisfacen (6.1) con condiciones iniciales y de borde dadas respectivamente por

$$(7.6) \quad \begin{cases} v_1(y,0) = h(y) , \\ v_{1y}(0,t) = h'(0) , \\ v_{1y}(1,t) = \mathcal{F}(s(t),t); \end{cases}$$

y

$$(7.7) \quad \begin{cases} v_2(y,0) = 0 , \\ v_{2y}(0,t) = s(t)l(t,v) - h'(0) , \\ v_{2y}(1,t) = 0 . \end{cases}$$

Para v_1 se tienen todas las estimaciones que en el párrafo 3 se obtuvieron para v (en particular recordar la (3.15))

En lo que se refiere a v_2 , se define $v_{2y}=z$ y se aplica el Teorema 9.1 pag.341 de [52] para mostrar que z es hölderiana de orden oportuno $\alpha \in (0,1)$ en R_T . De aquí - con razonamiento análogo al que nos llevó de (7.4) a (7.5) - se obtiene que v_2 es hölderiana de orden mayor que $\frac{1}{2}$.

En definitiva, aplicando una vez más el Teorema 9.1 ya citado, se obtiene para z la estimación

$$(7.8) \quad \|z\|_{1+\beta, R} \leq C(K) T^{\gamma/2}$$

para algún $\gamma \in (0,1)$. La (7.8) a su vez implica la estimación

$$(7.9) \quad \|s.l(t,v(0,t))\|_{C^1(0,T)} \leq C(K) ,$$

y

$$(7.10) \quad \|z\|^q + \|z_y\|^q + \|z_{yy}\|^q + \|z_t\|^q \leq CT^\gamma .$$

Ahora una estimación análoga a (3.13) se obtiene combinando las estimaciones sobre v_1 y v_2 .

Se puede en consecuencia elegir un conjunto de funciones \mathfrak{B} , como en el párrafo 4, tal que cada $s \in \mathfrak{B}$ se transforma a través de \mathcal{T} (definida de manera análoga al caso anterior) en una $\tilde{s} \in \mathfrak{B}$.

Demostremos que \mathcal{T} es contractiva. Se define aún

$$\Delta v = {}_1v - {}_2v ,$$

se aplica el Teorema 9.1 de [52] para obtener

$$(7.11) \quad \|\Delta v\|_{1+\alpha, R_T} \leq CT^\gamma \left\{ \|{}_1v(0, \cdot) - {}_2v(0, \cdot)\|_{C^1(0,T)} + \|\Delta s\|_{C^1(0,T)} \right\}$$

Poniendo ahora:

$$\Delta w = {}_1v_y - {}_2v_y$$

y escribiendo el sistema de ecuaciones satisfecho por Δw se puede todavía aplicar el mismo teorema obteniendo:

$$\|\Delta w\|_{1+\alpha, R_T} \leq CT^\gamma \left(\|{}_1v(0, \cdot) - {}_2v(0, \cdot)\|_{C^1(0,T)} + \|\Delta s\|_{C^1(0,T)} \right)$$

y consecuentemente se tiene la contractibilidad de \mathcal{T} . □

PARTE III . SOLUCIONES DÉBILES

1. Generalidades y notación

Como en la parte precedente comenzaremos, por claridad de exposición, por el tratamiento del problema más simple indicando después las modificaciones necesarias para tratar casos más generales.

Nos ocuparemos entonces de un caso sin gravedad con condiciones de contorno de tipo Dirichlet en la banda $z \in (0,1)$. Sea entonces el problema

$$(1.1) \quad (\theta(u))_t = u_{zz} , \quad \text{en } (0,1) \times (0,T) \equiv Q_T ,$$

$$(1.2) \quad \theta(u(z,0)) = \theta_0(z) , \quad \text{en } (0,1) ,$$

$$(1.3) \quad u(0,t) = \phi(t) , \quad \text{en } (0,T) ,$$

$$(1.4) \quad u(1,t) = U(t) , \quad \text{en } (0,T) .$$

En (1.1) θ y u están vinculados por una ley experimental sobre la cual hacemos la siguiente hipótesis

$$(A1) \quad \theta \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$$

$$M(A) > \theta'(u) > 0 , \quad \text{para } u \in [-A,0) , \quad \forall A > 0$$

$$\theta'(u) = 0 , \quad \text{para } u > 0 \text{ }^6.$$

⁶Como se verá claramente en lo que sigue la (A1) podrá ser sustituida por la hipótesis más débil de lipschitzianidad. La hipótesis incluye sea el caso de uniforme parabolicidad de la ecuación en la zona no saturada (necesariamente θ' será discontinua para $u=0$) que el caso de ecuación degenerada ($\theta'(0)=0$).

La regularidad de $u(x,t)$ y el sentido en el cual se debe considerar el problema se especifican en la

Definición 1.1 Una función $u \in W^{1,0}(Q_T)$ se dice una solución (débil) del problema (1.1)-(1.4) si

- (a) $\theta(u) \in C(\bar{Q}_T)$,
- (b) se satisfacen las condiciones (1.3)-(1.4),
- (c) para cada función test $\eta \in C^1(\bar{Q}_T)$ que se anula para $z=0$, para $z=1$ y para $t=T$ se tiene

$$(1.5) \quad \int \int_{Q_T} (\eta_z u_z - \eta_t \theta(u)) \, dz \, dt = \int_0^1 \eta(z,0) \theta_0(z) \, dz . \quad \square$$

Sobre los datos del problema haremos las siguientes posteriores hipótesis

(A2) $\theta_0 \in (0, \epsilon]$, θ_0 es lipschitziana en $[0,1]$. Existe además una función h lipschitziana en $[0,1]$ tal que $\theta(h(z)) = \theta_0(z)$

(A3) ϕ y U son lipschitzianas en $[0,T]$ y además

$$(1.6) \quad \theta(\phi(0)) = \theta_0(0) , \quad \theta(U(0)) = \theta_0(1) .$$

Para fijar ideas supongamos que $\phi < 0$, $U > 0$ y que existe $b \in (0,1)$ tal que

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \theta_0(z) &< \epsilon && \text{en } [0,b) , \\ \theta_0(z) &= \epsilon && \text{en } (b,1] . \end{aligned}$$

Observación 1.2 Naturalmente $h(z)$ es arbitraria en $(b,1]$. Supondremos que

$$h(1) = U(0) ,$$

además de la necesaria hipótesis

$$h(0) = \phi(0) .$$

□

2. Existencia y unicidad

Aquí seguiremos esencialmente los trabajos [18], [45].

Se considera una sucesión $\{\theta_n\}$ de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$(i) \quad 1/n \leq \theta'_n(s) \leq 2M , \quad s \in \mathbb{R} ,$$

$$(ii) \quad \theta'_n(s) \geq \theta'(s) , \quad s < 0 ,$$

$$(iii) \quad \theta_n(0) = 1 , \quad \theta_n \rightarrow \theta \text{ uniformemente sobre compactos.}$$

Sean además $\{\phi_n\}$, $\{U_n\}$ sucesiones de funciones $C^\infty[0,T]$ tales que

$$(iv) \quad \|\phi_n - \phi\|_{C[0,T]} \rightarrow 0 , \quad \|U_n - U\|_{C[0,T]} \rightarrow 0 ,$$

$$|\phi'_n| + |U'_n| < L \text{ en } (0,T) .$$

Sea $\{h_n\}$ una sucesión de funciones $C^\infty(0,1)$ de manera que

$$(v) \quad \|h_n - h\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 ,$$

$$|h'_n| < L \text{ en } [0,1] .$$

Supongamos en fin que valgan las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$(2.1) \quad \phi_n(0) = h_n(0) , \quad U_n(0) = h_n(1) ,$$

y

$$(2.2) \quad \theta'_n(\phi_n(0))\phi'_n(0) = h'_n(0) , \quad \theta'_n(U_n(0))U'_n(0) = h'_n(1) .$$

Ahora podemos, para cada n , considerar los problemas (uniformemente

parabólicos)

$$(2.3) \quad \theta'_n(u_n) u_{nt} = u_{nzz} , \quad \text{en } Q_T ,$$

$$(2.4) \quad u_n(z,0) = h_n(z) , \quad z \in (0,1) ,$$

$$(2.5) \quad u_n(0,t) = \phi_n(t) , \quad t \in (0,T) ,$$

$$(2.6) \quad u_n(1,t) = U_n(t) , \quad t \in (0,T) .$$

Cada uno de tales problemas admite una única solución clásica $u_n \in C^\infty(Q_T) \cap C^{2,1}(\bar{Q}_T)$. Además resulta

$$(2.7) \quad |u_n(z,t)| \leq U , \quad \text{en } Q_T ,$$

donde U depende de L y T pero no de n . Este resultado se obtiene inmediatamente del principio de máximo, notando que el valor de u_n sobre el contorno parabólico de Q_T es uniformemente acotado en valor absoluto en base a (iv) y (v) y a (1.7).

Se tiene además el siguiente

Lema 2.1 *Las soluciones del problema (2.3)-(2.6) son tales que existe una constante C , independiente de n , de manera que*

$$(2.8) \quad |u_{nz}(z,t)| \leq C , \quad \text{en } Q_T .$$

Demostración Probemos, en primer lugar que

$$(2.9) \quad |u_{nz}(0,t)| \leq C , \quad \text{para } t \in (0,T) ,$$

para algún C independiente de n . A tal fin consideremos la función

$$(2.10) \quad w(z,t) = \phi_n(t) + a z - b z^2$$

y elijamos a y b de modo que

$$(2.11) \quad \left(\theta'_n(u_n) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (w \pm u_n) \geq 0$$

$$(2.12) \quad (w \pm u_n) = 0, \quad \text{para } z=0, \quad t \in [0, T)$$

$$(2.13) \quad (w \pm u_n) \geq 0, \quad \text{para } z=1, \quad t \in [0, T)$$

$$(2.14) \quad (w \pm u_n) \geq 0, \quad \text{para } t=0, \quad x \in (0, 1).$$

La (2.11) se satisface eligiendo $b=ML$; en consecuencia la constante a puede ser determinada para satisfacer (2.13) y (2.14), por ejemplo $a=(2M+T)L$. En base al principio del máximo se tiene

$$(2.15) \quad w \pm u_n > 0 \quad \text{en } Q_T,$$

y la (2.9) se verifica con $C=a$.

Análogamente se prueba, para alguna constante C independiente de n :

$$(2.16) \quad |u_{nz}(1, t)| \leq C, \quad \text{para } t \in (0, T),$$

mientras, en base a la condición (v) y a la regularidad de las soluciones de (2.3)-(2.6), resulta

$$(2.17) \quad |u_{nz}(x, 0)| \leq L, \quad \text{para } z \in (0, 1).$$

Ahora podemos derivar (2.3) respecto a z ; poniendo

$$X_n(z, t) = u_{nz}(z, t)$$

y omitiendo los índices por brevedad de escritura, obtenemos

$$(2.18) \quad \theta'(u) X_t + \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} X X_z = X_{zz}, \quad \text{en } Q_T.$$

El principio del máximo (véase por ejemplo el Teorema 2.9 de [50]) aplicado a la ecuación (2.18), en base a las acotaciones (2.9), (2.16), (2.17) completa la estimación deseada (2.8). \square

Definamos ahora

$$(2.19) \quad v_n(z, t) = \theta_n(u_n(z, t)) ,$$

y demostremos el

Lema 2.2 *Las funciones v_n son equicontinuas; más precisamente son equi-lipschitzianas respecto a la variable z , y equi-hölderianas (de orden $\frac{1}{2}$) respecto a la variable t .*

Demostración

A partir de

$$(2.20) \quad |v_{nz}| \leq 2MC , \quad \text{en } Q_T ,$$

(recordar (2.19), (i) y (2.8)), la equi-lipschitzianidad respecto a z es inmediata.

Eligiendo luego $(z, t) \in Q_T$ tomemos $\Delta t > 0$ de modo que el rectángulo $D \equiv (z, z + \sqrt{\Delta t}) \times (t, t + \Delta t)$ sea interno a Q_T ; integrando la ecuación $v_{nt} = u_{nzz}$ sobre D se tiene

$$(2.21) \quad \int_z^{z + \sqrt{\Delta t}} |v_n(\zeta, t + \Delta t) - v_n(\zeta, t)| d\zeta \leq 4MC \Delta t .$$

Si, por brevedad, indicamos el integrando con $\Delta v_n(\zeta)$, se tiene ciertamente

$$\Delta v_n(\zeta) \geq \Delta v_n(z) - 4MC (\zeta - z) , \quad \zeta \in (z, z + \sqrt{\Delta t})$$

y entonces

$$\Delta v_n(z) \sqrt{\Delta t} - C \Delta t \leq 4MC \Delta t ,$$

de donde se deduce la hölderianidad respecto a t .

□

Por lo tanto, ya que del Lema 2.2 resulta la equiacotación de $\|u_n\|_{W^{1,0}(Q_T)}$, podemos encontrar una subsucesión (que seguiremos indicando con $\{u_n\}$), una función $u \in W^{1,0}(Q_T)$ y una $v(z,t)$ lipschitziana respecto a z y hõlderiana respecto a t tales que

$$(2.22) \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } W^{1,0},$$

$$(2.23) \quad \theta_n(u_n) \rightarrow v \quad \text{fuertemente en } C_0, \text{ con } v \in C^{\beta, \beta/2}(\bar{Q}_T).$$

El paso siguiente consiste en demostrar

Lema 2.3 *Para casi todo punto en Q_T se tiene*

$$(2.24) \quad \theta(u) = v$$

Demostración Sean

$$(2.25) \quad S \equiv \{(z,t) \in Q_T : v = \epsilon\},$$

$$(2.26) \quad I \equiv \{(z,t) \in Q_T : v < \epsilon\}.$$

Sean $P_0 \equiv (z_0, t_0) \in I$ y $B_r(P_0)$ una bola de radio r y centro P_0 , con r tal que $B_r \subset I$. Sea $\delta = \epsilon - v(z_0, t_0)$; se pueden elegir n_0 y r_0 tales que, para $r < r_0$ y $n > n_0$

$$(2.27) \quad \epsilon - 2\delta \leq v_n(z,t) \leq \epsilon - \delta/2, \quad \text{en } B_r(P_0).$$

De (2.19), indicando con p_n la función inversa de θ_n , podemos escribir

$$u_n = p_n(v_n)$$

y afirmar que

$$p'_n < K(\delta), \quad \text{en } \bar{B}_r(P_0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &\leq K(\delta) |v_n - v_m| + \|P_n - P_m\|_{C[1-2\delta, 1-\delta/2]} \leq \\ &\leq K(\delta) \{ |v_n - v_m| + \|\theta_n - \theta_m\|_{C[-U, 0]} \} . \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy respecto a la norma uniforme en $\bar{B}_r(P_0)$. Sigue que

$$(2.28) \quad u_n \rightarrow u^* \in C(\bar{B}_r(P_0)) \quad \text{uniformemente}$$

y entonces

$$v = \theta(u^*) \quad \text{en } \bar{B}_r(P_0) .$$

Si (\cdot, \cdot) denota el producto escalar en L_2 y si ϕ es una función C^∞ a soporte compacto en $B_r(P_0)$ se tiene que

$$(u_n, \phi) \rightarrow (u, \phi)$$

por (2.22), y

$$(u_n, \phi) \rightarrow (u^*, \phi)$$

por (2.28); en consecuencia $u^* = u$ para casi todo punto en $B_r(P_0)$ y por lo tanto en I . Es decir

$$(2.29) \quad v = \theta(u) , \text{ p.c.t.p. en } I .$$

Para la región "saturada" S , se tiene

$$S \subset S_\delta \equiv \{(z, t) : v(z, t) > \epsilon - \delta\} .$$

Se puede elegir n_0 tal que para $n > n_0$

$$v_n > \epsilon - 2\delta \quad \text{en } S_\delta .$$

Tomemos una arbitraria $\psi \in C^\infty$ a soporte compacto en S_δ y no negativa.

Indicando aún $u_n = p_n(v_n) > p_n(\epsilon - 2\delta)$

$$0 \leq (\Psi, u_n - p_n(\epsilon - 2\delta))$$

y pasando al límite, se obtiene

$$(2.30) \quad u(x, t) \geq \theta^{-1}(\epsilon - 2\delta), \quad \text{en } S_\delta.$$

Eligiendo $(z_0, t_0) \in S$, la (2.30) es válida para cualquier δ , luego

$$u(z, t) \geq 0, \quad \text{en } S$$

y entonces

$$(2.31) \quad c(u) = \epsilon, \quad \text{en } S.$$

Las fórmulas (2.29) y (2.31) prueban entonces (2.24). □

Podemos ahora probar el

Teorema 2.4 *Bajo las hipótesis (A1)-(A3) el problema (1.1)-(1.4) admite una solución en el sentido de la definición 1.1.*

Demostración Multiplicando la ecuación (2.3) por una función test e integrando por partes, se obtiene que cada u_n satisface

$$(2.32) \quad \iint_{Q_T} \{\eta_z u_{nz} - \eta_t \theta_n(u_n)\} dz dt = \int_0^1 \eta(z, 0) \theta_n(h_n(z)) dz.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ y usando (2.22), (2.23) se obtiene

$$(2.33) \quad \iint (\eta_z u_z - \eta_t v) dz dt = \int_0^1 \eta(z, 0) \theta_n(h_n(z)) dz.$$

Usando el Lema 2.3 se demuestran las propiedades (a) y (c), mientras

que la (b) es una consecuencia inmediata de (2.5) y (2.6). □

Teorema 2.5 *Si θ satisface la hipótesis (A1) el problema tiene a lo sumo una solución.*

Demostración

Sean u_1 y u_2 dos soluciones; poniendo $\Delta u = u_1 - u_2$ y $\Delta \theta = \theta(u_1) - \theta(u_2)$, se tiene

$$(2.34) \quad \iint_{Q_T} (\eta_z \Delta u_z - \eta_t \Delta \theta) dz dt = 0$$

para cualquier función test η .

Fijando arbitrariamente $t_0 \in (0, T)$, sea

$$\eta(z, t) = \begin{cases} \int_t^{t_0} \Delta u(z, \tau) d\tau, & z \in [0, 1], t \in [0, t_0] \\ 0, & z \in [0, 1], t \in (t_0, T] \end{cases}$$

de modo que (2.34) se transforma en

$$\int_0^{t_0} \int_0^1 (-\eta_z \eta_{zt} + \Delta u \Delta \theta) dz dt = 0$$

y entonces

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \eta_z^2(x, 0) dx + \int_0^{t_0} \int_0^1 \Delta u \Delta \theta dz dt = 0 .$$

Por lo tanto

$$\int_0^{t_0} \Delta u_z(x, \tau) = 0 \quad \text{p.c.t. } z \in [0, 1] .$$

Por la arbitrariedad de t_0 , $\Delta u_z = 0$ p.c.t.p. en Q_T , y como $\Delta u \in W^{1,0}$, resulta $\Delta u = 0$ p.c.t.p. □

Notemos que la unicidad recién probada permite afirmar que las convergencias (2.22), (2.23) valen para toda la sucesión de las funciones aproximantes y no solo para una subsucesión; en consecuencia el procedimiento utilizado es constructivo. Destacamos finalmente que de la unicidad de u se deduce la unicidad de la saturación $\theta(u)$.

3. Algunas propiedades de las soluciones débiles

Del Lema 2.1 resulta inmediatamente que $u \in W_{\infty}^{1,0}(Q_T)$. Podemos además demostrar el siguiente teorema

Teorema 3.1 *Bajo las hipótesis (A1)-(A3)*

$$(3.1) \quad u \in W^{2,0}(Q_T) .$$

Demostración Multipliquemos (2.3) por u_{nt} e integremos sobre Q_T .

Integrando por partes se tendrá

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \theta'_n u_{nt}^2 \, dx \, dt &= \int_0^T [u_{nz}(1, t) U'_n(t) - u_{nz}(0, t) \phi'_n(t)] \, dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 [u_{nz}^2(z, T) - h_n'^2(z)] \, dz . \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades (iv) y (v) de las aproximantes y el Lema 2.1 se tiene que el segundo miembro está acotado independientemente de n. Luego, usando (i) resulta

$$(3.2) \quad \|u_{nzz}\|_{L^2(Q_T)} \leq 2M \int\int_{Q_T} \theta'_n u_{nt}^2 dx dt \leq C ,$$

de donde se deduce (3.1). □

Tenemos además el siguiente Teorema de dependencia continua de los datos. Si $\Delta\theta_0$, $\Delta\phi$, ΔU indican las diferencias entre los correspondientes datos de dos problemas (1.1)-(1.4) y si se indica con Δu la diferencia entre las dos soluciones y con $\Delta\theta$ la diferencia entre las correspondientes $\theta(u)$, vale el siguiente resultado:

Teorema 3.2 *Bajo las hipótesis (A1)-(A3) se tiene*

$$(3.3) \quad \int\int_{Q_T} \Delta u \cdot \Delta\theta dz dt \leq CT \left\{ \int_0^1 |\Delta\theta_0| dz + \int_0^T |\Delta\phi| dt + \int_0^T |\Delta U| dt \right\} .$$

Demostración Tomemos los problemas (2.3)-(2.6) para cada uno de los dos grupos de datos y multipliquémoslos por la función

$$(3.4) \quad \eta(z, t) = \int_t^T \Delta u_n(z, \tau) d\tau .$$

Restando se tiene

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \eta_z^2(z, 0) dz + \int\int_{Q_T} \Delta u \Delta\theta dz dt =$$

$$= \int_0^1 \eta(z,0) \Delta\theta_0(z) dz + \int_0^T [\Delta u_z(1,t) \eta(1,t) - \Delta u_z(0,t) \eta(0,t)] dt,$$

donde el subíndice n fue omitido por brevedad.

Ahora resulta $|\eta(z,0)| \leq CT$ por (2.7) y (3.4), $|\Delta u_z| \leq C$ por (2.8) y $\int_0^T |\eta(1,t)| dt$, $\int_0^T |\eta(0,t)| dt$ están mayoradas por $T \int_0^T |\Delta U| dt$, $T \int_0^T |\Delta\phi| dt$ respectivamente. De donde se concluye (3.3). \square

Sigue el siguiente teorema de dependencia monótona

Teorema 3.3 *Con las mismas hipótesis*

$$(3.5) \quad \Delta\theta_0 \geq 0, \Delta\phi \geq 0, \Delta U \geq 0 \Rightarrow \Delta\theta \geq 0.$$

Demostración

Si $\Delta\theta_0$, $\Delta\phi$, ΔU son estrictamente positivas, el principio de comparación entre las correspondientes soluciones provee el resultado. Para probar (3.5) en el caso de desigualdad no estricta basta recurrir al caso precedente incrementando en una cantidad positiva δ los datos mayores y utilizando luego (3.3). \square

Para tener una idea más precisa de las propiedades cualitativas de la solución que encontramos, queremos ahora estudiar la regularidad de los conjuntos S e I definidos en (2.25), (2.26). Probamos primeramente el

Teorema 3.4 *El conjunto I es conexo.*

Demostración Para demostrar el teorema con T arbitrario probaremos que si $\theta(x_1, t_0)$ y $\theta(x_2, t_0) < 1$, entonces $\forall z \in (x_1, x_2)$ se tiene $\theta(z, t_0) < 1$.

En efecto, por la continuidad de $\theta(u)$ se puede elegir $\delta < t_0$ de manera que $u(x_1, t)$ y $u(x_2, t)$ sean negativas en $[t_0 - \delta, t_0]$. Aplicando un principio de máximo fuerte (ver [59]) al problema $\theta'_t = u_{zz}$ en $(x_1, x_2) \times (t_0 - \delta, t_0)$ con datos negativos sobre el contorno lateral y $\theta(u(z, t_0 - \delta)) = 1$ (que es una sobresolución del problema verificado por u) se encuentra que $u(z, t_0)$ es negativo $\forall z \in [x_1, x_2]$. \square

Podemos ahora definir $\forall t \in [0, \tau)$ la función

$$(3.6) \quad s(t) = \sup\{z \in (0, 1) : (z, t) \in I\} .$$

De nuestras hipótesis $\phi(t) < 0$, $U(t) > 0$ sigue que $s \in (0, 1)$.

Se tiene

Teorema 3.5 Sean las hipótesis (A1)-(A3) verificadas. Entonces

$$(3.7) \quad u_{zz} = 0 \quad \text{p.c.t.p. interno de } S.$$

Demostración Se elige una función test η infinitamente derivable a soporte compacto en $\overset{\circ}{S}$. Entonces $\iint_{Q_T} (\eta_z u_z - \epsilon \eta_t) dz dt = 0$; por lo tanto

$$(3.8) \quad \iint_{Q_T} \eta_z u_z dz dt = 0 , \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\overset{\circ}{S}) .$$

De la (3.1) sigue

$$\iint_{Q_T} \eta u_{zz} dz dt = 0 , \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\overset{\circ}{S}) ,$$

es decir (3.2). \square

4. La interfase

El problema de la regularidad de $s(t)$ fue ampliamente estudiado, comenzando por el trabajo [18]. En [17] se probó que, si $\theta'(0) > 0$ - o sea en la hipótesis de parabolicidad uniforme en la zona no saturada - entonces $s(t)$ es continua. En la Parte IV daremos una descripción más exhaustiva de los resultados obtenidos por distintos autores en este campo; aquí nos limitaremos a citar el resultado de [10] que estudia un problema en el cual los datos sobre el contorno fijo son del tipo de Neumann. Más precisamente (1.3) y (1.4) se reemplazan por

$$(1.3') \quad u_z(0,t) = 0, \quad \text{en } (0,T),$$

$$(1.4') \quad u_z(1,t) = g(t) > 0, \quad \text{en } [0,T].$$

(Obviamente la definición de solución se modifica, en el sentido que las condiciones (1.3') y (1.4') aparecen en la relación integral (1.5), en la cual aparecerá en el segundo miembro el término $-\int_0^T \eta(1,t)g(t)dt$).

Las demostraciones de los teoremas de existencia, unicidad y dependencia continua son esencialmente las mismas siempre que nos limitemos a intervalos de tiempo tales que

$$\int_0^t g(\tau) d\tau \leq \epsilon - M(0).$$

(ver la Observación 3.2 de la Parte II).

En [10] se suponen las siguientes hipótesis además de las (A1)-(A3)

(A1') $\theta \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^-)$ para algún $\alpha \in (0,1)$
 $\theta''(u) \leq 0$ en un entorno a la izquierda de $u=0$.

(A2') Existe $a \in [0,b)$ tal que
 $h \in C^{2+\alpha}([a,b]) \cap C^1([a,b])$
 $|h''| \leq M \theta'(h)$ en $[a,b)$ para algún $M > 0$
 h es seccionalmente monótona y $h'(b)=f(0)$.

Bajo estas hipótesis suplementarias se demuestra que $s(t)$ es lipschitziana en $[0,T]$.

Si además vale

(A2'') $h \in C^{3+\alpha}([a,b])$ y $h''/\theta'(h)$ es uniformemente lipschitziana en $[a,b)$,
se demuestra que $s(t)$ es C^1 para cada instante en que $s(t) < 1$.

Aquí demostraremos un resultado de lipschitzianidad que en ciertos aspectos es más restrictivo (las hipótesis sobre el dato inicial se suponen válidas en el entero intervalo $(0,b)$, para evitar el uso del teorema de Matano [57] sobre el número de cambios de signo) pero cuya demostración es más simple.

Hablando de regularidad de la interfase, se deben citar los resultados generales válidos también en más dimensiones espaciales (véase [16] y la bibliografía allí contenida).

Consideremos los problemas aproximantes

$$(4.1) \quad \theta'_n(u_n) u_{nt} = u_{nzz} \quad , \quad \text{en } Q_T \quad ,$$

$$(4.2) \quad u_n(z,0) = h_n(z) \quad , \quad z \in (0,1) \quad ,$$

$$(4.3) \quad u_{nz}(0,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

$$(4.4) \quad u_{nz}(1,t) = g_n(t), \quad t \in (0,T),$$

donde la sucesión $\{\theta_n\}$ se toma como en el párrafo 2.

Para especificar las propiedades de h_n , g_n enumeremos las hipótesis sobre los datos que usaremos en lo que sigue:

(A2) Existe $b \in (0,1)$ tal que

$$(4.5) \quad h(z) \leq 0 \text{ en } [0,b], \quad h \in C^2[0,b]$$

$$(4.6) \quad |h''(z)| \leq M\theta'(h(z)) \text{ en } [0,b], \text{ para algún } M > 0;$$

$$(4.7) \quad h'(z) \geq \delta > 0 \text{ en } [0,b] \text{ para algún } \delta > 0.$$

Sea además $\theta_0(z) = \epsilon$ para $z \in (b,1]$, por lo cual, sin pérdida de generalidad podemos definir

$$(4.8) \quad h(z) = g_0(z-b) > 0, \quad \text{en } (b,1].$$

Sea también

(A3) $g(t) > 0$ y lipschitziana en $[0,T]$.

Supongamos entonces que $h_n \in C^2[0,1]$ aproximen h uniformemente y que satisfagan las correspondientes de (4.5), (4.6), (4.7) para oportunas constantes (que seguiremos llamando M y δ) independientemente de n .⁷

Fijamos $\alpha_0 \in (\theta(h(0)), 1)$ y sea T_1 el extremo superior de los t para los

⁷Se puede observar que si $\theta'(0) \neq 0$ el problema tiene solución clásica en las hipótesis que haremos y entonces la regularidad de la interfase está asegurada; si $\theta'(0) = 0$, la (4.6) implica $h''(b) = 0$ y por lo tanto $h \in C^2[0,1]$ haciendo superfluas las aproximaciones h_n .

cuales $\theta(u(0,t)) \leq \alpha_0 < 1$ para n suficientemente grande. Se tiene

Proposición 4.1 Existe x_0 tal que, para $n > n_0$ oportuno

$$(4.9) \quad |u_{nt}(x_0, t)| \leq M, \quad \text{en } (0, T_1);$$

$$(4.10) \quad u_{nz}(z, t) \geq \bar{\delta} > 0, \quad \text{en } (x_0, 1) \times (0, T_1).$$

Demostración Sea x_0 tal que $\theta(u(x,t)) \leq \alpha_0/2$ en $(0, 2x_0) \times (0, T_1)$.

Para n suficientemente grande (4.1) es uniformemente parabólica con constante de parabolicidad independiente de n en tal rectángulo y entonces satisface una estimación interna (que por la regularidad de h vale desde $t=0$) del tipo (4.9).

Además notemos que $u_{nz} \geq 0$ localmente en Q_T por el principio del máximo aplicado a u_{nz} . Entonces en la región de uniforme parabolicidad podemos aplicar el principio del máximo fuerte para probar (4.10) sobre el segmento $z=x_0$ y por lo tanto en el dominio inmediatamente a la derecha de tal segmento. □

Sea ahora

$$T_2^{(n)} = \sup\{t : u_n(1, t) > 0\}$$

y demostremos

Lema 4.2 Existe $T_2 > 0$ tal que, cualquiera sea n

$$(4.10) \quad T_2^{(n)} > T_2.$$

Demostración Sea

$$(4.11) \quad \bar{u}(z, t) = c(z-1) + d$$

con

$$c = \min_{[0,T]} g(t) > 0$$

Para cualquier $\delta \in (0, b)$ se tiene

$$u_n(b-\delta) \geq -L\delta - Ht^{1/2}$$

donde H es la constante de Hölder de las u_n .

Por lo tanto se puede elegir δ suficientemente pequeño y $D > 0$ tales que la \tilde{u} definida por (4.11) resulte una subsolución en un intervalo $(0, T_2)$ para cualquier n . Entonces (4.10) está probada ya que $u_n(1, t)$ resulta estrictamente positiva en $(0, T_2)$.

Sea

$$T_0 = \min(T_1, T_2)$$

y

$$(4.12) \quad \eta_n(z, t) = -\frac{u_{nt}}{u_{nz}} \quad \text{en } Q_{T_0}.$$

Suprimiendo por simplicidad el subíndice n tenemos

Lema 4.2 Para cada punto de $(x_0, 1) \times (0, T_0)$, $\eta(z, t)$ satisface la siguiente ecuación

$$(4.13) \quad \eta_t = \frac{1}{\theta(u)} \eta_{zz} - (\eta^2)_{zz}.$$

Además

$$(4.14) \quad \eta(z, 0) = -h''(z)/\theta'(h)h'(z), \quad z \in (0, 1),$$

$$(4.15) \quad \eta_z(1, t) = -g'(t)/g(t) + \theta'(u(1, t)) \eta^2(1, t), \quad t \in (0, T).$$

$$(4.16) \quad |\eta(x_0, t)| \leq M, \quad t \in (0, T) \text{ independiente de } n.$$

Demostración Se trata de verificaciones no difíciles; se puede notar que de (4.14) se deduce la acotación de η en base a la hipótesis $(\bar{A}2)$ y que

(4.16) sigue de la Proposición 4.1. □

Demostramos ahora el

Lema 4.3 *Las funciones $\eta_n(x, t)$ son equiacotadas.*

Demostración Consideremos la función

$$(4.17) \quad w(z, t) = -Az - e^{2A(t+1)}, \quad \text{en } Q_0,$$

Con simples cálculos se ve, recordando (4.13)-(4.16) y el principio del máximo, que

$$(4.18) \quad \eta(z, t) \geq w(z, t) \quad \text{en } [x_0, 1] \times [0, T_0].$$

Sea ahora

$$\gamma(z, t) = B(z+1).$$

Es fácil ver que, para B suficientemente grande, se tiene $\gamma_t - \frac{1}{\theta'} \gamma_{zz} + (\gamma^2)_{zz} \geq 0$, $\gamma(z, 0) \geq \eta(z, 0)$, $\gamma(a, t) \geq \eta(a, t)$. Además

$$(4.19) \quad \gamma_z(1, t) - \theta'(u) \gamma^2 = B - \theta'(u) B^2 (z+1)^2.$$

Recordando que en $(0, T_0)$, $u_n(1, t) > 0$ se tiene que $\theta'_n(u_n(1, t))$ tende a zero con n , por lo cual la cantidad en el primer miembro de (4.19), para $n > n_0$, se puede hacer mayor que el máximo de $|g'_n/g|$.

Entonces

$$(4.20) \quad \eta(z, t) \leq \gamma(z, t).$$

Por lo tanto de (4.18) y (4.20) se llega al resultado deseado. □

Podemos ahora probar el

Teorema 4.4 *Bajo las hipótesis $(\overline{A2})$, (4.5)-(4.7) la función $s(t)$, que representa la interfase entre las zonas saturada y no saturada, es lipschitziana en $[0, T_0]$.*

Demostración Como en la demostración del teorema de existencia extraemos de la sucesión $\{u_n\}$ una subsucesión u_n convergente débilmente en $W^{1,0}$ con $\theta_n(u_n)$ convergentes uniformemente a $\theta(u) \in C^{\beta, \beta/2}$ para algún β en $(0, 1)$.

Sigue que los conjuntos de nivel $\{u_k=0\}$ son curvas regulares $z=s_k(t)$ equilipschitzianas, por el Lema 4.3.

Entonces, limitándose si es necesario a una subsucesión, se tiene que las $s_n(t)$ convergen uniformemente a una función $s(t)$ lipschitziana.

Demostramos ahora que la curva $z=s(t)$ es la interfase para la solución del problema.

Es evidente que para $z \geq s(t)$ es $u \geq 0$ p.c.t.p. y $u(z, t) = g(t)(z - s(t))$.

Si ahora se considera el conjunto

$$D_T \equiv \{(z, t) : 0 < z < s(t), 0 < t < T\},$$

y en el mismo la función

$$Y(z, t) = - \frac{(z - s(t))^{2m}}{C}.$$

Se verifica fácilmente que se pueden elegir C y m suficientemente grandes para que Y sea una sobresolución del problema (recuérdese en particular la definición de T_1). En consecuencia $u < 0$ en D_T y entonces $z=s(t)$ es efectivamente la frontera libre.

Queremos ahora discutir brevemente si y en qué sentido este resultado local se puede hacer válido en todo el intervalo $(0, T)$.

Sea

$$\bar{T}_1 = \sup \{t \in (0, T) : \theta(u(0, t)) < 1\} ,$$

$$\bar{T}_2 = \sup \{t \in (0, T) : u(1, t) > 0\} ,$$

y sea

$$\bar{T}_0 = \min(\bar{T}_1, \bar{T}_2).$$

Si $\bar{T}_0 = \bar{T}_1$, si existe $\lim_{t \rightarrow \bar{T}_0} s(t)$, el problema está concluido porque todo el medio se ha saturado, véase también lo dicho al inicio del párrafo y la Observación 3.2 de la Parte II.

Si $\lim_{t \rightarrow \bar{T}_0} \inf s(t) > 0$ o si $s(t)$ no tiene límite y la interfase "oscila", estamos en un caso particularmente delicado que puede excluirse si se ha previamente demostrado la continuidad (ver por ejemplo [44]).

Ocupémosnos ahora del caso $\bar{T}_0 = \bar{T}_2$.

Repitiendo la demostración, se concluye fácilmente que $s(t)$ tiene límite para $T \rightarrow \bar{T}_0^-$. En efecto, la constante de Lipschitz de $s(t)$ está equiestimada en cada intervalo $(0, \bar{T}_0 - \epsilon)$, independientemente de ϵ .

El caso $\lim_{t \rightarrow \bar{T}_0} s(t) < 1$ contradice la hipótesis $g(t) \geq \delta > 0$; por tanto, nos queda por examinar solamente el caso $\lim s(t) = 1$.

Para tratar este caso se debe suponer (como en (A1')) que θ sea una función cóncava de u en un entorno a la izquierda de $u=0$. Supongamos que exista $\delta > 0$ tal que

$$(4.21) \quad \theta'' \leq 0, \quad \text{en } (-6\delta, 0)$$

y que entonces, para n suficientemente grande sea

$$(4.22) \quad \theta_n'' \leq 0, \quad \text{en } (-5\delta, +\infty).$$

Por simplicidad, supongamos que

$$(4.23) \quad u_n(0, t) \leq -8\delta \quad \text{en } (\bar{T}_0 - \hat{\delta}, T).$$

Además, se tenga en cuenta que todas las desigualdades que verifican u se deducen fácilmente de la Hölderianidad de $\theta(u)$, pero nosotros por simplicidad razonaremos como si la misma u fuera Hölderiana.

Ahora, por la Hölderianidad de $\theta(u)$, es posible encontrar un conjunto finito de intervalos (t_k, t_{k+1}) tales que $t_1 = \bar{T}_0 - \delta$, $t_N = T$ y que para k impar sea

$$(4.24) \quad u(1, t) > -2\delta \quad \text{en } (t_k, t_{k+1}), \quad k \text{ impar}$$

y para k par sea

$$(4.25) \quad u(1, t) < -\delta \quad \text{en } (t_k, t_{k+1}), \quad k \text{ par.}$$

Entonces si k es par, en (t_k, t_{k+1}) todas las u_n con $n > n_0$ oportuno resuelven una ecuación uniformemente parabólica y por tanto resulta una estimación del tipo

$$(4.26) \quad \max_{[t_k, t_{k+1}]} |u_{nt}| \leq M, \quad k \text{ par.}$$

Buscamos ahora una estimación inferior para u_{nt} en el primer caso, k impar:

Sea z_0 el punto más próximo a $z=1$ tal que

$$(4.27) \quad u(z_0, t_k) = -3\delta.$$

Esto es posible por (4.23), (4.24) y la continuidad de $\theta(u)$. Sea

$$\hat{t} = \sup\{t \in (t_k, t_{k+1}) : -4\delta < u(z_0, t) < -2\delta\}.$$

Si $\hat{t} < t_{k+1}$ se tendrá

$$(4.28) \quad u(z_0, \hat{t}) = -4\delta$$

o

$$(4.28) \quad u(z_0, \hat{t}) = -2\delta$$

(recuérdese la advertencia hecha precedentemente: por comodidad se trabaja como si u fuera continua, mientras el razonamiento riguroso pero mucho más complejo debería hacerse sobre $\theta(u)$ y aplicar después la función inversa).

En el caso (4.28) se puede elegir un nuevo punto (z_1, \hat{t}) con $z_1 < z_0$ tal que $u(z_1, \hat{t}) = -3\delta$; en el caso (4.29) z_1 se encontrará a la derecha de z_0 .

Procediendo así hasta alcanzar t_{k+1} y observando que esto es posible con un número finito de pasos por la hõlderianidad de θ , se puede construir una curva regular $z = \gamma(t)$ sobre la cual se tiene que el valor de u está comprendido entre -5δ y $-\delta$.

Si se elije n suficientemente grande para que la misma propiedad sea verificada por las u_n , entonces en $R_k \equiv \{(z, t) : \gamma(t) < z < 1, t_k < t < t_{k+1}\}$ resulta que, definiendo $w_n(z, t) = u_{nt}(z, t)$ y derivando (4.1) respecto al tiempo

$$(4.30) \quad \theta'_n(u_n) w_{nt} - \theta''_n(u_n) w_n^2 \geq w_{nzz}, \quad \text{en } R_k.$$

Una estimación de $w_n(z, t_k)$ proviene de la estimación en el intervalo precedente (o, si $k=1$, del Lema 4.3); w_n sobre la curva se estima porque allí la ecuación es uniformemente parabólica. Ya que en fin $w_{nz}(1, t) = g'(t)$, el principio de máximo garantiza que u_{nt} se estima inferiormente por una constante M independiente de n , proveyendo una estimación superior para

$\eta_n(z, t)$.

Notando que la estimación inferior obtenida con la función de comparación definida por (4.17) sigue valiendo, podemos proceder como en el Teorema 4.4 y concluir que todas las curvas de nivel, y en particular la $u=0$ en los intervalos de tiempo en los cuales existe zona saturada, son regulares.

PARTE IV . NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Introducción

Sin ninguna pretención de abarcar todo, queremos aquí dar algunas informaciones sobre los trabajos de carácter analítico relativos a los problemas discutidos en las partes precedentes. Esto significa que no citaremos los trabajos de tipo más experimental o numérico, y, para los trabajos matemáticos, a menudo no nos referiremos a toda la producción de un autor o de un grupo de investigación, ilustrando solo los artículos más recientes (según nuestro conocimiento) o aquellos en los cuales se puede fácilmente encontrar una bibliografía más completa.

En el párrafo 2 nos referiremos brevemente a los trabajos en los cuales se desprecia la capilaridad; en el párrafo 3 trataremos con más detalle la clase de problemas de los cuales nos hemos ocupado en las Partes II y III; en el párrafo 4, en fin, citaremos brevemente los modelos que se han propuesto para tratar el caso en el cual puede presentarse una zona "seca".

2. Modelos sin capilaridad

Consideramos la (4.12) de la Parte I que reescribimos, para un problema no necesariamente unidimensional, en la forma

$$(2.1) \quad [\theta(u)]_t = \Delta u - [\gamma(u)]_z .$$

Si se prescinde de la capilaridad y la densidad del líquido se supone

constante, se tiene

$$(2.2) \quad \begin{cases} \sigma \in H(p) , \\ K \in K_0 H(p) , \\ u = (K_0/\rho g) p^+ , \end{cases}$$

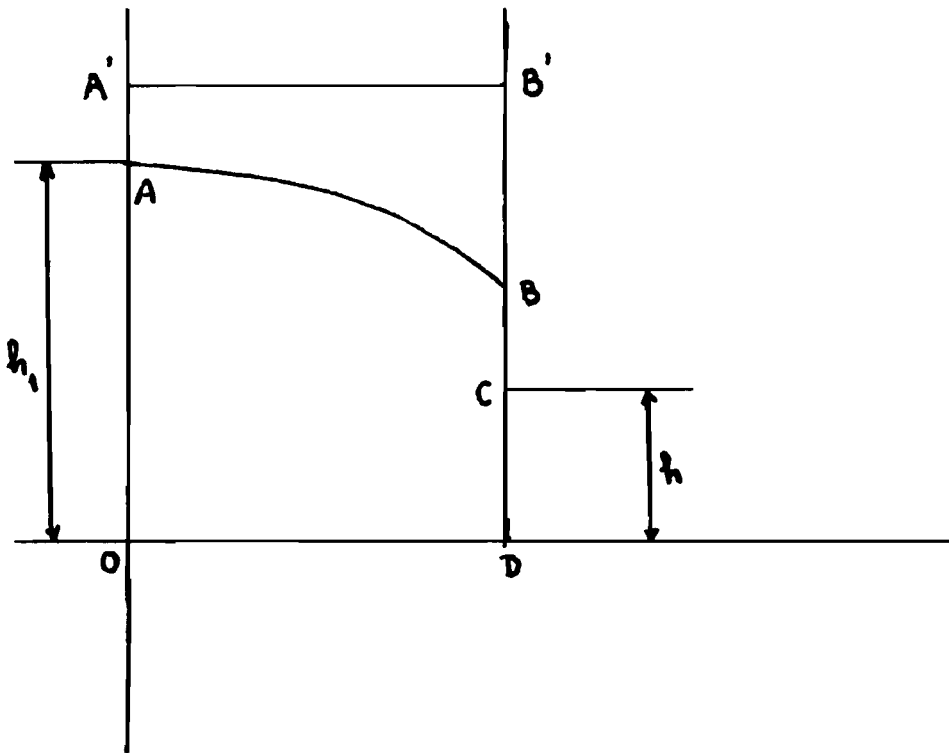
donde $H(p)$ es la función de Heaviside y $p^+ = \max(0, p)$. Si se supone además que el medio poroso sea indeformable, resulta $\epsilon = \text{constante}$ y entonces

$$(2.3) \quad \begin{cases} \theta(u) \in \epsilon H(u) \\ \gamma(u) \in K_0 H(u) \end{cases}$$

Se puede entonces buscar una solución de (2.1) en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\Omega = S \cup D$ donde en S es $u > 0$, $\sigma = 1$ y en D es $\sigma = 0$, $u \leq 0$.

El problema es el clásico "problema del dique", que en su versión más simple tiene la forma siguiente: asignadas dos constantes h_1 y h_2 , $h_2 > h_1$, encontrar una función, una curva AB y una función $u(x, z)$ definida en $OABD$ tales que (sin pérdida de generalidad ponemos $K_0 = 1$):

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , && \text{en } OABD , \\ u &= h_2 + z , && \text{sobre } OA , \\ u_z &= 1 , && \text{sobre } OD , \\ u &= h_1 + z , && \text{sobre } DC , \\ u &= 0 , && \text{sobre } BC , \\ u &= \frac{\partial}{\partial n}(u - z) = 0 , && \text{sobre } AB . \end{aligned}$$



Definiendo $u=0$ fuera de OABD y

$$W(x,z) = \int_{-\infty}^z u(x,z') dz' \quad (\text{transformada de Baiocchi}),$$

el problema se puede replantear como una inecuación variacional en un rectángulo OA'B'D. Para un tratamiento general de problemas de este tipo y una bibliografía de base ver [6]; para distintas formulaciones y resultados sucesivos se puede consultar [7], [55].

Retomemos en examen el problema (2.1)-(2.3) y consideremos un problema de filtración en la dirección z. Supongamos también que sobre $z=0$ sea dada una presión $P > 0$. Se ve inmediatamente que será $\theta=1$ (o sea $p > 0$) en una zona de espesor variable $z \in (0, s(t))$, mientras fuera de tal zona será $\theta=0$. Claramente

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & p_{zz} = 0 , & 0 < z < s(t) , & t > 0 , \\
 & p(0, t) = P > 0 , & & t > 0 , \\
 & p(s(t), t) = 0 , & & t > 0 , \\
 & \dot{s}(t) = -\frac{K}{\rho g \epsilon} (p_z(s(t), t) - \rho g) , & & t > 0 ;
 \end{aligned}$$

de donde sigue inmediatamente

$$(2.5) \quad p(z, t) = P \left(1 - \frac{z}{s(t)} \right)$$

y

$$(2.6) \quad \dot{s} = a \left(\frac{b}{s} + 1 \right) ,$$

donde $a=K/\epsilon$, $b=P/\rho g$.

Si la condición inicial para el punto de separación entre las partes seca y bañada es $s(0)=0$, de (2.6) se obtiene

$$(2.7) \quad s(t) - b \ln(1+s(t)/b) = at$$

La solución (2.7) es la llamada solución de Green-Ampt [35], que para tiempos breves (o sea mientras sea $t \ll b/a$) tiene un comportamiento

$$s(t) \sim \sqrt{2abt} ,$$

y para tiempos grandes ($t \gg b/a$)

$$s(t) \sim at .$$

Podemos también observar que este problema, en más dimensiones espaciales es el clásico problema de Hele-Shaw, sobre el cual se puede obtener mayor información en [20].

Otra clase de problemas en ausencia de capilaridad se estudia en

[27], [28]. La ecuación diferencial estudiada en la región bañada no es la ecuación de Laplace, sino una ecuación del calor; esto corresponde, por ejemplo, a considerar válidas las (2.2) pero suponiendo que la porosidad ϵ no sea constante sino una función lineal de la presión en el líquido (ecuación de piezoconductividad); a la misma conclusión se llega considerando compresible el líquido y constante la porosidad en (4.2) de la Parte I y suponiendo K constante con la presión y despreciando el término $\frac{\partial \rho \partial p}{\partial p \partial z}$ en el segundo miembro.

En [27] se estudia el siguiente problema de frontera libre (todas las variables están normalizadas a 1)

$$\begin{aligned} u_t - u_{zz} &= 0, & -s(t) < z < 0, & t \in (0, T), \\ u_z(0, t) &= f(t), & & t \in (0, T), \\ s(0) &= -b < 0, \quad u(z, 0) = h(z) > 0, & & z \in (-b, 0), \\ u(s(t), t) &= 0, & & t \in (0, T), \\ \dot{s} &= -(u_z(s(t), t) - 1), & & t \in (0, T), \end{aligned}$$

de donde, considerando la variable $v = z - u$ las condiciones sobre la frontera libre se transforman en

$$v = s$$

$$v_z = \dot{s}$$

y entonces, para soluciones suficientemente regulares

$$v_z^2 + v_t = v_z.$$

El problema se conduce a una inecuación variacional para el par

(W,p) con $W = \int p \, dz$ y se demuestra, suponiendo $f(t) > 1$, la existencia y la unicidad de una solución con s continua en $(0,T)$, $W \in C(\bar{Q}) \cap W^{2,1}(Q)$, donde $Q \equiv (-R,0) \times (0,T)$ y R y T son tales que $s(t) > -R$ en $(0,T)$.

En [28] se considera un problema en varias dimensiones espaciales.

3. Filtración en presencia de capilaridad

En lo que se refiere a la aproximación clásica, además de todo lo dicho en la Parte II, nos limitaremos a citar las soluciones de similaridad (autosemejantes) deducidas en [58]; por lo demás nos ocuparemos sólo de la aproximación débil.

En [18] se trata un problema en una banda, sin gravedad, y con datos de Dirichlet constantes. Los resultados son la existencia de solución débil (en el sentido especificado en la Parte II), la unicidad, la dependencia monótona de la solución de los datos iniciales; se estudia después la regularidad de la solución (ver los Teoremas 3.1, 3.4, 3.5 de la Parte II) y el comportamiento asintótico.

En [17] se estudia el mismo problema obteniendo la continuidad de la interfase en la hipótesis muy restrictiva que la función $\theta(u)$ en (1.1) de la Parte III tenga la forma

$$\theta(u) = \begin{cases} 1+u, & -1 \leq u < 0, \\ 1, & u \geq 0; \end{cases}$$

(además, para este caso existe solución clásica).

En [11] se indica cómo extender los resultados al problema en presencia de gravedad.

En [45], se estudia el problema en una banda en ausencia de gravedad con datos en el contorno dependientes del tiempo considerando problemas del tipo de Dirichlet, de Neumann y mixtos.

En [44] se considera aún el problema sin gravedad con las condiciones $u_z(0,t)=0$, $u_z(0,t)=g(t) > 0$ y se demuestra que si además de las hipótesis (A1) y (A2) se supone que $\theta \in C^2(-\infty,0]$, $g(t)$ es lipschitziana y el dato inicial es seccionalmente monótono, entonces la interfase entre las zonas saturada y no saturada está dada por una función continua $x=s(t)$.

En [10] se estudia el mismo problema y se dan las condiciones para la lipschitzianidad y la derivabilidad de la frontera.

Estos resultados, y otros que contemplan también una condición de borde no local y algunos problemas con más dimensiones, se exponen en [43].

Un tratamiento para problemas multidimensionales basado en la teoría de los operadores monótonos se encuentra en [36] para el caso del problema de Dirichlet y en [37] para un problema en el cual sobre una parte del borde está dado el valor de u , sobre otra parte el flujo y la parte restante del borde se considera como una superficie de desborde (seepage face).

En [1], [2], [3] el problema se afronta en un contexto muy general, que en particular incluye también la presencia de la gravedad.

El problema estudiado en [50] (en presencia de gravedad y unidimensional) contiene una ulterior degeneración, se supone que para $u \leq k_0 < 0$, $\theta(u)=\theta_0$. La constante θ_0 es el contenido irreducible de agua; en

este caso una parte de la región $(0,L) \times (0,T)$ donde se estudia el problema puede estar "seca", es decir caracterizada por $\theta = \theta_0$, $u < k_0$.

Volveremos sobre estos problemas en el párrafo sucesivo; aquí nos limitaremos a suponer (por comparación con los resultados de los demás autores) que los datos de borde sean tales de garantizar que $\theta > \theta_0$ en $(0,L) \times (0,T)$.

Las condiciones son

$$u_z(0,t) = 1, \quad (\text{pared impermeable})$$

$$u(L,t) = c,$$

$$u(z,0) = h(z).$$

El problema está resuelto, como en [18] a través de la regularización parabólica del problema y se demuestra la existencia de una solución $W^{1,0}$. Las hipótesis sobre el dato inicial son más bien fuertes ($h \in C^5$, $h(L)=c$, $h'(0)=1$, $h' > 0$, $h''(L)=0$) pero el teorema de existencia vale también en presencia de zonas secas (y de conductividad hidráulica nula). Además en las mismas hipótesis se encuentra que las fronteras libres que separan la zona seca de la no saturada y esta última de la zona saturada se expresan por funciones de variación acotada. Un problema del mismo tipo pero en n dimensiones (en el cual es posible además tener en cuenta una posible anisotropía del medio poroso) se estudia en [51] con condiciones de borde que asignan el flujo sobre una parte del borde y la presión sobre el resto, ambas funciones de la posición y del tiempo. La aproximación es de tipo variacional y el trabajo contiene el análisis del comportamiento asintótico de la solución.

El problema de la filtración en medios parcialmente saturados fue ampliamente estudiado por el grupo de la Universidad Tsinghua de Pekín.

En [60] se estudia el problema en la banda en presencia de gravedad. Se consideran condiciones de Dirichlet y de Neumann (con datos constantes). Las hipótesis y el método de demostración del teorema de existencia son esencialmente los mismos del trabajo [18]; para la unicidad se impone la ulterior condición

$$|K(u_1) - K(u_2)|^2 \leq M (u_1 - u_2) (\theta(u_1) - \theta(u_2)).$$

Se demuestra que la interfase es continua si $|u_x|$ se mantiene estrictamente positivo.

El mismo problema se estudia en [64] con condiciones de Neumann.

En [53] se estudia el problema en el semiespacio $z > 0$ en presencia de gravedad y con condiciones de "ponding" sobre $z=0$, que los autores escriben en la forma

$$u_z - K(u) = -R + \frac{H(u - u_s)}{K(u)} u_t$$

ya que definen la transformada de Kirchoff como

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{p(z, t)} K(s) ds ,$$

y escriben

$$u_s = \int_{-\infty}^0 K(s) ds .$$

En efecto, en el trabajo se considera también la presencia de una zona seca donde $u=0$. Además de este aspecto sobre el cual volveremos en el párrafo siguiente, se puede recordar que la relación integral que define la solución débil es ahora, en lugar de la (1.5) de la Parte III:

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times (0,T)} \{ \eta_z(u_z - K(u)) - \eta_t \theta(u) \} dz dt = \int_0^T [R\eta(0,t) + J(u(0,t))\eta_t(0,t)] dt + \\ + J(u_0(0))\eta(0,0),$$

donde

$$J(s) = \int_0^s \frac{H(\tau - u_s)}{K(\tau)} d\tau = \begin{cases} 0, & s \leq u_s, \\ \frac{s - u_s}{K_s}, & s > u_s. \end{cases}$$

y las funciones test se suponen a soporte compacto respecto a z y se anulan para $t=T$.

Los resultados son análogos a los enunciados precedentemente (salvo alguna nueva hipótesis sobre el comportamiento de θ y K para pequeños valores de u , es decir en proximidad de la zona seca, que no era considerada en el artículo precedente).

El trabajo [4] es en ausencia de gravedad en una banda con condiciones de Neumann sobre el borde (flujo entrante por las dos partes).

Con el método de la regularización parabólica se prueba la existencia y unicidad de la solución débil, suponiendo que $\theta \in C^2$, $\theta'' \leq 0$ en un entorno de $u=0$; los datos se suponen C^1 . El tiempo de existencia es finito y puede ser estimado en base a la cantidad de líquido presente y a los flujos

máximos entrantes. Se demuestra en fin que si el flujo es nulo para $x=0$ y constante para $x=1$ y $u''(z,0) \geq 0$ la interfase es continua y decreciente.

En [38] se considera un problema en una banda con gravedad y con fondo impermeable. Inicialmente la solución está estrictamente comprendida entre 0 y 1. Sobre el borde superior $z=0$ se prescribe un flujo

$$(3.1) \quad K(u) (u_z - 1) = \delta ;$$

si $\delta > 0$ el líquido deja la banda y el medio estará no saturado hasta un instante T en el cual $\theta(0,T)=0$ y aparece entonces la zona seca.

Si en cambio $\delta = -K(\lambda)$ para algún $\lambda \in (0,1)$ entonces el medio permanece no saturado hasta un instante T en el cual $\theta(1,t)=1$ y aparece la zona saturada.

En [39], (3.1) se sustituye por una condición de Dirichlet

$$u(0,t) = C < u_s$$

y se usan funciones de comparación tipo ondas viajantes para mostrar que la solución converge casi-uniformemente a la solución estacionaria $\bar{U}(x)$ definida por

$$x = \int_c^{\bar{U}(x)} \frac{1}{K(s)} ds ,$$

de donde se puede ver si la solución converge a una situación totalmente no saturada o parcialmente saturada.

En [5] se considera aún el semiespacio y la condición de flujo, pero se supone que δ es mayor que $K(1)$, o sea que la conductividad hidráulica

del medio saturado. En tal caso aparece también una zona saturada (también aquí se supone la existencia de una zona seca). Se demuestra que las dos interfases seca-no saturada y no saturada-saturada son lipschitzianas.

4. La modelización de la zona seca

Nos ocuparemos brevemente en este parágrafo de los modelos matemáticos que fueron propuestos para describir el movimiento de líquido en un medio poroso en el cual, además de las situaciones de saturación y no saturación de las que nos hemos ocupado, puede encontrarse una región "seca".

Matemáticamente esto corresponde a $\theta=0$, pero no está claro si y cómo (en correspondencia con esta situación) tenga sentido hablar de presión de capilaridad y de ley de Darcy.

Una ulterior complicación la constituye el hecho que, para bajos contenidos de agua, los efectos de histéresis se vuelven relevantes: un medio poroso se comporta en modo distinto cuando es irrigado respecto a cuando es secado.[49], [8], [9].

Se puede dejar de lado esta última cuestión si nos limitamos a un proceso en el cual al menos la frontera entre parte mojada y parte seca se mueve monótonamente respecto al tiempo.

En los trabajos de los autores chinos que hemos ya citado (y en otros que consideran medios que no alcanzan nunca la saturación total, ver [62], [63]), la ecuación de balance se escribe en la forma (4.9) de la Parte I, que aquí transcribimos por comodidad

$$(4.1) \quad \theta_t = (D(\theta) \theta_z)_z - \frac{\partial K}{\partial \theta} \theta_z ,$$

donde la conductividad hidráulica se supone una función dada del contenido de agua y la difusividad hidráulica θ se define como

$$(4.2) \quad D(\theta) = \frac{K(\theta)}{\rho g} \frac{dp}{d\theta} .$$

Si ahora se identifica la zona seca como aquella para la cual $\theta=0$ y se supone que la ecuación (4.1) valga para cada $\theta \in (0, \epsilon)$, entonces en las vecindades de $\theta=0$ tenemos una degeneración del tipo de la de la filtración de gases en medios porosos, siempre que sea

$$(4.3) \quad \int_0^{\epsilon} \frac{D(\theta)}{\theta} d\theta < \infty ,$$

que es también la condición que permite, por ejemplo en un problema a valores iniciales, afirmar que si el dato inicial tiene soporte compacto, la solución tiene también soporte compacto.

El modelo (4.1) sigue siendo válido si se piensa al medio seco como un medio poroso en el cual el contenido de líquido ha alcanzado su valor "residuo" o "irreducible" θ^* [ver [8], Sec. 9.4). En tal caso, si se quiere que (4.3) se verifique, se deberá suponer que $K(\theta)$ tiende a cero cuando θ tiende a θ^* más rápidamente que $\frac{d\theta}{dp} \Big|_{\theta=\theta^*}$.

En consecuencia los trabajos que describen con la ecuación (4.1) situaciones en las que el medio está no saturado o seco, pueden ser contemplados bajo este aspecto.

En los trabajos en los cuales aparecen contemporáneamente las zonas seca, no saturada y saturada, se hace referencia explícitamente al comportamiento de θ y de K en función de la presión, de tal modo que los

autores chinos introducen la transformación de Kirchoff como

$$(4.4) \quad u = \int_{-\infty}^{p(z,t)} K(s) ds$$

de modo que la interfase no saturada-seca coincida con la línea de nivel $u=0$.

También en este caso la noción de "humedad residual" se puede introducir sin dificultad si se supone $\theta=\theta^*$ para $p < p_*$; bastará en efecto redefinir u como

$$(4.5) \quad u = \int_{p^*}^p K(s) ds$$

y obtener la ecuación (4.12) de la Parte I que reescribimos por comodidad

$$(4.6) \quad \theta_t = u_{zz} - K(p(u))_z .$$

El problema principal, desde el punto de vista modelístico, consiste en hacer hipótesis adecuadas sobre K . Es natural pensar (como en [50], [51]) que K se anule para $p < p_{**}$ y es justo preguntarse qué relación hay entre p_* y p_{**} .

Si $p_* < p_{**}$, para $p < p_{**}$ se tiene $\theta_t=0$, entonces la zona seca si no está presente inicialmente no puede aparecer y si está presente inicialmente, no se puede extinguir; y a su vez el soporte de $[\theta-\theta(p_{**})]^+$ no puede expandirse.

Si $p_{**} < p_*$, resulta difícil definir una conductividad hidráulica en una región en la cual la cantidad de líquido no puede variar.

Parece entonces razonable suponer $p_{**}=p_*$ como se hace en [51]. En [40] se estudia un problema unidimensional (con gravedad) en el cual el flujo es una función continua asignada del contenido en agua, que se anula cuando θ tiende a θ^* . En [41] se considera un problema con condición de Signorini con $u_x=H(\theta-\theta^*)$ estudiando en particular la situación en la cual el contenido de agua alcanza sobre la frontera el valor "residuo".

Un problema que en efecto se crea en este caso es el hecho que la "zona seca" no se puede extender.

Por otra parte en un problema a valores iniciales para una ecuación del tipo $(v^m)_{xx}=v_t$ el soporte de la solución no se contrae.

Para obtener una zona seca que se contrae, por ejemplo en [61], se hace la hipótesis de la presencia de una frontera libre $x=s(t)$ entre la parte seca ($x < s(t)$) y la parte no saturada $x > s(t)$ (además se admite la presencia de una zona saturada $x > \sigma(t)$, pero ésto no nos interesa ahora).

Para conseguir ésto se supone que sobre $x=s(t)$ esté asignado (eventualmente en función de la posición) un flujo saliente $g(s(t))$; esto significa que sobre el frente se tiene $u=0$ (u está definida por (4.4)) y $u_x(s(t),t)=g(s(t))$, asociando a la función g el rol de "velocidad de evaporación"; se debe tener presente que en tal caso la ecuación es válida solo en la región $x > s(t)$ y no es válida (en forma débil) en la entera región, en la cual no hay conservación de la masa de agua.

Un modelo que podríamos llamar intermedio entre aquellos con y sin capilaridad se encuentra en [14]. El modelo puede ser pensado en la forma (2.1) suponiendo que exista un \tilde{u} tal que θ y K se anulen para $u < \tilde{u}$ y

sean mayores que una constante positiva (y además sea $\theta(u)$ monótona). El modelo pareciera adaptarse más a los problema de irrigación que a los de drenaje y de secado.

Con este fin, resulta natural plantearse el problema más general del mecanismo de transporte de masa de líquido en un medio poroso a baja saturación: prescindir del movimiento del vapor, y luego de un eventual acoplamiento con un problema térmico, si es justificado en un problema a altas saturaciones, parece que ya no lo sea para una baja cantidad de líquido; en efecto el líquido ocupa un dominio no conexo para el cual resulta arduo postular (y más aún verificar experimentalmente) una ley del tipo de Darcy.

Debemos destacar que mientras los problemas de secado son ampliamente estudiados desde el punto de vista de las aplicaciones, no nos resulta que haya sido afrontado el problema desde un punto de vista más estrictamente matemático.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Comité Científico del Seminario y especialmente al Dr. Domingo A. Tarzia, cuyo trabajo hizo posible el suceso del Seminario y la realización de este Cuaderno.

Agradezco también al CONICET y al CNR por haber financiado mi visita a Rosario.

Y en fin expreso un particular agradecimiento a la Lic. Mirta Stampella que con empeño, paciencia y competencia se hizo cargo del texto en español.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H.W. ALT, *Nonsteady fluid flow through porous media*, en [12], 222-228.
- [2] H.W. ALT, S. LUCKHAUS, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, *Math. Z.* 183, 311-341 (1983).
- [3] H.W. ALT, S. LUCKHAUS, A. VISINTIN, *On nonstationary flow through porous media*, *Ann. Mat. Pura Appl. (IV)* 136, 303-316 (1984).
- [4] L. AN, *Some properties of the solution of filtration problem in partially saturated porous media*, *Acta Math. Appl. Sinica* 1, 44-56 (1984).
- [5] L. AN, *The infiltration problem with large constant surface flux in partially saturated porous media*, en [61], 66-89.
- [6] C. BAIOCCHI, *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, *Ann. Mat. Pura Appl. (IV)* 92, 107-127 (1972).
- [7] C. BAIOCCHI, A. CAPELO, *Disequazioni Variazionali e Quasivariazionali. Applicazioni a Problemi di Frontiera Libera*, Pitagora, Bologna, 1978.
- [8] J. BEAR, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, New York, 1972.
- [9] J. BEAR, A. VERRUIJT, *Modelling Groundwater Flow and Pollution*, Reidel, Dordrecht, 1987.
- [10] M. BERTSCH, J. HULSHOF, *Regularity results for an elliptic-parabolic free boundary problem*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 297, 337-350 (1986).
- [11] M. BERTSCH, L.A. PELETIER, *Porous media type equations: an overview*, *Rep. Leiden Univ.* n. 7 (1983).
- [12] A. BOSSAVIT, A. DAMLAMIAN, M. FREMOND (eds.), *Free Boundary Problems: Applications and Theory*, Pitman, London, 1985.
- [13] G.S. CAMPBELL, *A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data*, *Soil Sci.*, 117, 311-314 (1974).
- [14] J. CANNON, R.B. GUENTHER, F.A. MOHAMED, *On the rainfall infiltration through a soil medium*, preprint 1988.

- [15] E.C. CHILDS, N. COLLINS-GEORGE. *The permeability of porous materials*, Proc. Roy. Soc. A 201, 392-405 (1950).
- [16] E. DI BENEDETTO, R. GARIEPY. *Local behaviour of solutions of an elliptic-parabolic equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 97, 299-308 (1987).
- [17] C.J. VAN DUYN, *Nonstationary filtration in partially saturated media: continuity of the free boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. 79, 261-267 (1982).
- [18] C.J. VAN DUYN, L.A. PELETIER. *Nonstationary filtration in partially saturated porous media*, Arch. Rat. Mech. Anal. 78, 173-198 (1982).
- [19] C.J. VAN DUYN, J. HULSHOF. *An elliptic-parabolic problem with a nonlocal boundary condition*, Arch. Rat. Mech. Anal. 99, 61-73 (1987).
- [20] C.M. ELLIOT, J.R. OCKENDON. *Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems*, Pitman, London, 1982.
- [21] A. FASANO, M. PRIMICERIO, *Liquid flow in partially saturated porous media*, J. Inst. Maths Applies 23, 503-517 (1979).
- [22] A. FASANO, M. PRIMICERIO, *General free boundary problems for the heat equation I*, J. Math. Anal. Appl. 57, 694-723 (1977)
- [23] A. FASANO, M. PRIMICERIO (eds.), *Free Boundary Problems; Theory and Applications*, Pitman, London, 1983.
- [24] Y.S. FOK (ed.), *Infiltration Development and Applications*, Water Research Center, Honolulu, 1987.
- [25] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [26] A. FRIEDMAN, *Variational Principles and Free Boundary Problems*, J. Wiley, New York, 1982.
- [27] A. FRIEDMAN, R. JENSEN. *Elliptic quasi-variational inequalities and applications to a non-stationary problem in hydraulics*. Ann Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 3, 47-88 (1976).
- [28] A. FRIEDMAN, R. JENSEN. *A parabolic quasi-variational inequality arising in hydraulics*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 2, 421-468 (1975)

- [29] M.T. VAN GENUCHTEN, *A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated media*, Soil Sci. Am. J. 44, 882-898 (1980).
- [30] M.T. VAN GENUCHTEN, D.R. NIELSEN, *On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils*, Ann. Geophys. 3, 1-11 (1985).
- [31] R. GIANNI, *A filtration problem with ponding*, a aparecer en Boll. Un. Mat. Ital..
- [32] R. GIANNI, *Well posedness of some elliptic-parabolic problems*, a aparecer.
- [33] B.H. GILDING, *A nonlinear degenerate parabolic equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 4, 394-432 (1977).
- [34] B.H. GILDING, L.A. PELETIER, *The Cauchy problem for an equation in the theory of infiltration*, Arch. Rat. Mech. Anal. 61, 127-140 (1976).
- [35] W.H. GREEN, G.A. AMPT, *Studies on soil physics: the flow of air and water through soils*, J. Agric. Sci. 4, 1-24 (1911).
- [36] U. HORNUNG, W. MESSING, *Simulation of two-dimensional saturated/unsaturated flows with exact water balance*, en "Flow and Transport in Porous Media" (A. Venuijt, F.B.S. Barends eds.), Balkema, Rotterdam 1987.
- [37] U. HORNUNG, *A parabolic-elliptic variational inequality*, Manuscripta Mathematica 39, 155-172 (1982).
- [38] Z. HUANG, *Asimptotic behaviour of infiltration and evaporation in porous media*, en [61], 40-65.
- [39] Z. HUANG, *Large time stability of the solution in a filtration problem*, en [61], 90-106.
- [40] Z. HUANG, *A filtration problem with surface evaporation*, Boll. Un. Mat. Ital. 7, 4-A, 253-261 (1990).
- [41] Z. HUANG, M. PRIMICERIO, *The surface evaporation problem with Signorini boundary condition*, a aparecer.
- [42] M.K. HUBBERT, *Darcy law and the field equations of the flow of underground fluids*, Trans. Amer. Inst. Metal. Eng. 207, 222-239 (1956).
- [43] J. HULSHOF, *Elliptic-parabolic Problems, the Interface*, Doctoral Dissertation, Leiden University, 1985.

- [44] J. HULSHOF, *An elliptic-parabolic free boundary problem: continuity of the interface*, en [43], 57-75.
- [45] J. HULSHOF, L.A. PELETIER, *An elliptic-parabolic free boundary problem*, Nonlin. Anal. 10, 1327-1346 (1986).
- [46] S. IRMAY, *On the hydraulic conductivity of unsaturated soils*, Trans. Amer. Geophys. Un. 35, 463-468 (1954).
- [47] N. KENMOCHI, I. PAWLOW, *A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time-dependent constraints*, Nonlin. Anal. 10, 1181-1202 (1986).
- [48] N. KENMOCHI, I. PAWLOW, *Asymptotic behaviour of solutions to parabolic-elliptic variational inequalities*, Nonlin. Anal. 13, 1191-1213 (1989).
- [49] A. KLUTE, *A numerical method for solving the flow equation for water in unsaturated materials*, Soil Sci., 73, 105-116 (1952).
- [50] D. KRÖNER, *Parabolic regularization and behaviour of the free boundary for unsaturated flow in a porous medium*, Journal reine angew. Math. 348, 180-196 (1984).
- [51] D. KRÖNER, J.F. RODRIGUES, *Global behaviour for bounded solutions of a porous media equation of elliptic-parabolic type*, J. Math. Pures et Appl. 64, 105-120 (1985).
- [52] O.A. LADYZENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV, M.N. URALCEVA, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, A.M.S. Transl. 23, 1968.
- [53] J. LI, N. SU, *The solution of an infiltration problem with ponded surface flux condition*, Acta Math. Applic. Sinica 2, 54-65 (1985).
- [54] D.O. LOMEN, A.W. WARRICK, *Linearized moisture flow with loss at the soil surface*, Soil. Sci. Soc. Ann. J. 42, 396-400 (1978).
- [55] E. MAGENES, *Su alcuni problemi ellittici di frontiera libera connessi con il comportamento dei fluidi nei mezzi porosi*, Symp. Math. 10, 265-279 (1972).
- [56] J.A. Mc GEOUGH, *Free and moving boundary problems in electrochemical machining and flame fronts*, en [23], 472-482.
- [57] H. MATANO, *Nonincrease of the lapnumber of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation*, Pub. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A 29, 401-441 (1982).

- [58] Y. NAKANO. *Application of recent results in functional analysis to the problem of water tables*. Adv. Wat. Res. 2, 185-190 (1975).
- [59] E.S. SABENINA. *On a class of nonlinear degenerating problems*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 143, 794-797 (1962) Sov. Math. Dokl. 3, 495-498 (1962).
- [60] N. SU, J. LI. *The boundary value problems for the filtration equation in partially saturated porous media*. Acta Math. Appl. Sinica 1, 180-192 (1984).
- [61] H. YIN. *A singular degenerate free boundary problem arising from the moisture evaporation in a partially saturated porous medium*. preprint 1989.
- [62] S. XIAO (ed.), *The Filtration Problem*. Tsinghua University, Beijing 1984.
- [63] S. XIAO (ed.), *The Filtration Problem. Vol. 2*. Tsinghua University, Beijing 1986.
- [64] S. XIAO, Z. HUANG, C. ZHOU. *The infiltration problem with constant rate in partially saturated porous media*. Acta Math. Appl. Sinica 1, 108-126 (1984).
- [65] S. XIAO, C. ZHOU. *Numerical models for the infiltration into unsaturated-saturated porous media*, en [23], 178-190.

PLAN	pag.
PARTE I. MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS	
1. Introducción	1
2. La ley de Darcy	3
3. Medios no saturados	7
4. Balance de masa	10
5. Condiciones de contorno	12
a) Condiciones de contorno tipo Dirichlet	14
b) Condiciones de contorno tipo Neumann	15
c) Condiciones de "ponding"	16
PARTE II. SOLUCIONES CLÁSICAS	
1. Generalidades	17
2. Un problema en la banda	19
3. Estimaciones a priori y solución de un problema auxiliar	24
4. Teorema de existencia para el problema (π')	30
5. Otros problemas de contorno	33
6. Condiciones de presión sobre la pared no saturada	36
7. Condiciones de flujo sobre la pared no saturada	42
PARTE III. SOLUCIONES DÉBILES	
1. Generalidades y notación	46
2. Existencia y unicidad	48
3. Algunas propiedades de las soluciones débiles	56
4. La interfase	60
PARTE IV. NOTAS BIBLIOGRÁFICAS	
1. Introducción	71
2. Modelos sin capilaridad	71
3. Filtración en presencia de capilaridad	76
BIBLIOGRAFÍA	87

CONTENIDO DE NUMEROS ESPECIALES

6. "Encuentro Latinoamericano sobre Métodos Teóricos y Numéricos de la Física-Matemática", Rosario, 2-7 de julio de 1973:

U. D'AMBROSIO, "Superficies generalizadas no cálculo das variacoes", p. 5-24.

L.A. MEDEIROS, "Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales", p. 25-58.

E. ROFMAN, "Desigualdades variacionales. Existencia y aproximación numérica de soluciones", p. 59-86.

11. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 1:

D.A. TARZIA, "Introducción al Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", p. 5-32.

D.A. TARZIA, "Problemas unidimensionales de conducción del calor con frontera móvil", p. 33-61.

J.E. BOUILLET, "Algunos resultados sobre ecuaciones de tipo parabólico", p. 63-74.

J.E. BOUILLET, "Soluciones autosemejantes con cambio de fase", p. 75-104.

L.T. VILLA, "El problema inverso de Stefan", p. 105-131.

L.T. VILLA, "Problemas optimales en la conducción del calor con cambio de fase", p. 133-142.

R.H. NOCHETTO, "Una introducción general a la resolución numérica del problema de Stefan unidimensional", p. 143-166.

G.G. GARGUICHEVICH—M.C. SANZIEL, "Una introducción general a la resolución aproximada del problema de Stefan unidimensional", p. 167-177.

12. "Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 4-8 de julio de 1983, Volumen 2:

D.A. TARZIA, "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", p. 5-36.

D.A. TARZIA, "Estudios teóricos en el problema de Stefan unidimensional a una fase", p. 37-85.

P.R. MARANGUNIC, "Algunos conceptos básicos del análisis funcional", p. 87-118.

H.R. BERTORELLO, "Sobre la solidificación de aleaciones binarias", p. 119-142.

L. CRIVELLI—S. IDELSOHN—C. BAIGORRIA, "Análisis de la fusión en barras de combustible nuclear originada por sobrecargas térmicas accidentales", p. 143-170.

E.E. ALANIS, "Problemas de cambio de fase en la acumulación de calor a partir de energía solar", p. 171-177.

M.B. STAMPELLA, "Sobre la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material a través de un problema con cambio de fase", p. 179-193.

14. "II Seminario sobre el Problema de Stefan y sus Aplicaciones", Rosario, 13-17 de octubre de 1986, Volumen 2:

H. BERTORELLO, "Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido-líquido", p. 9-27.

J.E. BOUILLET, "Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas", p. 29-44.

D.A. TARZIA, "Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases", p. 45-75.

D.A. TARZIA, "El problema de Stefan multidimensional a una fase", p. 77-99.

L.T. VILLA, "La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre", p. 101-116.

N. AGUILERA, "El método de Alt para el problema del dique poroso", p. 117-128.

G.G. GARGUICHEVICH, "Las inecuaciones variacionales elípticas", p. 129-138.

P.R. MARANGUNIC, "Distribuciones y espacios de Sobolev", p.139-165.

E. ZARANTONELLO, "Teoría espectral cónica", p. 167-169.

17. "III Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones", Rosario, 11-15 de octubre de 1988, Volumen 1:

J.E. BOUILLET, "Comportamiento asintótico en ecuaciones de conducción-difusión degeneradas", p. 7-13.

C. CORTAZAR — M. ELGUETA, "Sobre localización de soluciones de la ecuación de medios porosos", p. 15-27.

G.G. GARGUICHEVICH — D.A. TARZIA, "Sobre un problema de Stefan a dos fases con fuente de energía interna", p. 29-44.

M. KORTEN, "Soluciones autosemejantes de ecuaciones de difusión-conducción generalizadas", p. 45-53.

R. MASCHERONI, "Métodos simplificados para la predicción de tiempos de congelación y descongelación de alimentos", p. 55-71.

D.A. TARZIA, "Comportamiento asintótico exponencial en la ecuación de medios porosos con absorción", p. 73-86.

C.V. TURNER, "Difusión de un solvente en un polímero no homogéneo", p. 87-104.

K. TWARDOWSKA, "A free boundary value problem in solidification of binary alloys. Deterministic and stochastic approach", p. 105-119.

L.T. VILLA, "Problemas de frontera libre y móvil en procesos de ingeniería química", p. 121-132.

D.A. TARZIA, "El caso estacionario del problema de Stefan a dos fases y problemas relacionados", p. 133-151.

Nota : Para intercambiar esta serie con publicaciones similares, dirigirse a:

CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas , Ingeniería y Agr.,
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.

Note : To exchange this serie with similar publications, please write to:

CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas , Ingeniería y Agr.,
Universidad Nacional de Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
2000 Rosario, Argentina.