MACI Vol. 5 (2015) 137 - 140

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO GOBERNADO POR UNA INECUACIÓN VARIACIONAL ELÍPTICA

Mariela C. Olguín[†] y Domingo A. Tarzia[‡]

[†]*Departamento de Matemática, EFB-FCEIA, Univ. Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, S2000BPT Rosario, Argentina,* mcolguin@fceia.unr.edu.ar

[‡]*Departamento de Matemática-CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina. Tel: +54-341-5223093, Fax: +54-341-5223001,* DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: En Boukrouche-Tarzia, Comput. Optim. Appl., 53(2012), 375-392, se consideró un problema de control óptimo continuo gobernado por una inecuación variacional elíptica. La variable de control fue la energía interna g. Los autores probaron existencia y unicidad del control óptimo y de su estado asociado. El objetivo de este trabajo es realizar el análisis numérico del problema de control óptimo antes mencionado a partir de la utilización del método de elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1. Se discretiza la inecuación variacional que define el sistema y el correspondiente funcional costo para una dada energía interna. Se prueba la existencia de un control óptimo discreto y de su estado asociado discreto para cada h positivo (parámetro de la discretización). Finalmente, se muestra que si para cada $h > 0$, se elige un control óptimo y el estado asociado discretos entonces, la familia obtenida resulta convergente al control óptimo y su estado asociado continuos, respectivamente, cuando el parámetro h tiende a 0.

Palabras clave: *Inecuación variacional elíptica, problemas de control óptimo distribuido, análisis numérico, convergencia de controles optimales, problemas de frontera libre.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35 - 35J86 - 49J20 - 49J40 - 49M25 - 65K15 - 65N30

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuya frontera $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ consta de la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 tal que med $(\Gamma_1) > 0$. Se define el siguiente problema elíptico (S):

$$u \geq 0; \quad u(-\Delta u - g) = 0; \quad -\Delta u - g \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega; \tag{1}$$

$$u = b \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre} \quad \Gamma_2; \tag{2}$$

donde g representa la energía interna en Ω, b la temperatura sobre Γ_1 y q el flujo de calor sobre Γ_2. En [6] se consideró el siguiente problema de control óptimo distribuido continuo (P) asociado con (S):
Hallar el control óptimo distribuido continuo $g_{op} \in H = L^2(\Omega)$ tal que

$$J(g_{op}) = \min_{g \in H} J(g) = \frac{1}{2}\|u_g\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 \tag{3}$$

con $M > 0$ una constante y $u_g \in K$ la correspondiente solución del problema (S) asociado al control g cuya inecuación variacional elíptica esta dada por:

$$a(u, v-u) \geq (g, v-u) - \int_{\Gamma_2} q(v-u)\, ds, \qquad \forall v \in K; \quad u_g \in K \tag{4}$$

con

$$V = H^1(\Omega), \quad K = \{v \in V : v \geq 0 \text{ en } \Omega, v/\Gamma_1 = b\}, \quad V_0 = \{v \in V : v/\Gamma_1 = 0\},$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx \quad \forall\, u, v \in V, \quad (u,v) = \int_\Omega u\, v\, dx \quad \forall\, u, v \in H,$$

donde a es una aplicación bilineal, continua, simétrica y coerciva sobre V [21] , es decir: existe una constante $\lambda > 0$ tal que:

$$a(v,v) \geq \lambda \, \|v\|_V^2 \quad \forall \, v \in V_0. \tag{5}$$

El objetivo de este trabajo es hacer el análisis numérico del problema (S) que esta gobernado por la inecuación variacional elíptica descripta en (4), y su problema de control óptimo asociado (3). Para ello, se considera el método de elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituidos por elementos finitos afín equivalentes de clase C^0 siendo h el parámetro de la aproximación que tiende a cero [7],[10]. Entonces, se discretizan el funcional costo (3) y la inecuación variacional elíptica (4) y se demuestra la convergencia de una familia de problemas de control óptimo discretos al problema continuo gobernado por una inecuación variacional elíptica. Numerosos problemas continuos y discretos de control óptimo gobernados por ecuaciones e inecuaciones variacionales se presentan en [1]-[5], [8], [9], [11]-[20], [22], [24]-[31].

2. Discretización del problema (P) y sus propiedades

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio poligonal acotado y τ_h una triangulación regular de Ω con triángulos de Lagrange tipo 1 ([7], [10]), se considera h como la mayor medida de los lados de los triángulos $T \in \tau_h$ y se aproxima a los espacios V y K por:

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h/_T \in \mathbb{P}_1(T), \ \forall T \in \tau_h\};$$

$$V_{h0} = \{v_h \in V_h : v_h/_{\Gamma_1} = 0\} \quad y \quad K_h = \{v_h \in V_h : v_h \geq 0, \ v_{h/_{\Gamma_1}} = b\}$$

donde $\mathbb{P}_1(T)$ es el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 1 sobre el triángulo T. Sea $\Pi_h : V \to V_h$ el operador de interpolación lineal y $c_0 > 0$ una constante (independiente del parámetro h) tal que [7]:

$$\|v - \Pi_h(v)\|_H \leq \ c_0 \, h^r \, \|v\|_r \quad \forall \, v \in H^r(\Omega), \ \ 1 < r \leq 2 \tag{6}$$

$$\|v - \Pi_h(v)\|_V \leq \ c_0 \, h^{r-1} \, \|v\|_r \quad \forall \, v \in H^r(\Omega), \ \ 1 < r \leq 2. \tag{7}$$

Sea (S_h) la formulación variacional discreta del sistema (S) definida como : Hallar $u_{hg} \in K_h$ tal que

$$a(u_{hg}, v_h - u_{hg}) \geq (g, v_h - u_{hg})_H - \int_{\Gamma_2} q(v_h - u_{hg}) d\gamma, \qquad \forall v_h \in K_h. \tag{8}$$

Teorema 1 *Dados $g \in H$, $b > 0$ y $q \in Q$, existe única solución de la inecuación variacional elíptica (8).*

Prueba. Sigue de la aplicación del Teorema de Lax-Milgram [21], [23]. □

Lema 1 *Sean $g_1, \, g_2 \ \in \ H$, y $u_{hg_1}, \, u_{hg_2} \ \in \ K_h$ las soluciones de (S_h) para g_1 y g_2 respectivamente. Entonces:*

a) Existe $C > 0$ (constante independiente de h) tal que: $\|u_{hg}\|_V \leq C, \forall \, h > 0$;

b) $\|u_{hg_2} - u_{hg_1}\|_V \leq \ \frac{1}{\lambda} \|g_2 - g_1\|_H, \ \ \forall \ h > 0$;

c) Si $g_n \rightharpoonup g$ en H débil cuando $n \to \infty$, entonces $u_{hg_n} \to u_{hg}$ en V fuerte cuando $n \to \infty$ para cada $h > 0$ fijo.

Lema 2 *Dados $g_1, g_2 \in H$ y $\mu \in [0,1]$, se tiene que:*

a)
$$\|u_{h3}\|_H^2 = \mu \, \|u_{hg_1}\|_H^2 + (1-\mu) \, \|u_{hg_2}\|_H^2 - \mu \, (1-\mu) \|u_{hg_2} - u_{hg1}\|_H^2 \tag{9}$$

b)
$$\|g_3(\mu)\|_H^2 = \mu \, \|g_1\|_H^2 + (1-\mu) \, \|g_2\|_H^2 - \mu \, (1-\mu) \|g_2 - g_1\|_H^2 \tag{10}$$

donde $g_3(\mu) = \mu g_1 + (1-\mu) g_2$ y $u_{h3} = \mu u_{hg_1} + (1-\mu) u_{hg_2}$.

Teorema 2 *Si u_g y u_{hg} son las soluciones, respectivamente, de las inecuaciones variacionales elípticas (4) y (8) para el control $g \in H$, entonces $u_{hg} \to u_g$ en V fuerte cuando $h \to 0^+$.*

3. Discretización del problema de control óptimo y sus propiedades

Teniendo en cuenta el problema de control óptimo continuo establecido en (3), se define el problema de control óptimo discreto correspondiente como: Hallar $g_{op_h} \in H$ tal que

$$J_h(g_{op_h}) = \min_{g \in H} J_h(g) = \frac{1}{2}\|u_{hg}\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 \qquad (11)$$

donde u_{hg} es el estado asociado solución de (S_h), descripto en (8), para el control $g \in H$.

Teorema 3 *Dado $g \in H$, se tiene:*

a) $\lim_{\|g\|_H \to \infty} J_h(g) = \infty$;

b) $J_h(g) \geq M\|g\|_H^2 - C\,\|g\|_H$ para alguna constante C independiente de h;

c) El funcional J_h es una aplicación semicontinua inferiormente débil en H;

d) Existe una solución del problema de control óptimo discreto (11) para todo $h > 0$.

Lema 3 *Si $u_g \in H^r(\Omega)$ $(1 < r \leq 2)$, entonces se tienen las siguientes estimaciones $\forall g \in H$:*

a)

$$\|u_{hg} - u_g\|_V \leq C h^{\frac{r-1}{2}}, \qquad (12)$$

b)

$$|J_h(g) - J(g)| \leq C h^{\frac{r-1}{2}}. \qquad (13)$$

donde C es una constante independiente de h en cada caso.

Teorema 4 *Sea $u_{g_{op}} \in K$ el estado continuo asociado al control óptimo $g_{op} \in H$, solución del problema (4). Para cada $h > 0$, se elige un control óptimo discreto $g_{op_h} \in H$ solución de (11) y su correspondiente estado discreto asociado $u_{h\,g_{op_h}} \in K_h$ solución de (8). Entonces se tiene que:*

$$u_{h\,g_{op_h}} \to u_{g_{op}} \quad \text{en} \quad V \text{ fuerte} \quad \text{y} \quad g_{op_h} \to g_{op} \text{ en } H \text{ fuerte cuando } h \to 0^+.$$

Observación: Una condición suficiente en los Teoremas 3 y 4 para obtener la unicidad del control óptimo discreto del problema (11) está dada por ($\forall\ g_1, g_2 \in H, \forall\ \mu \in [0,1], \forall\, h > 0$):

$$\| u_{h3}(\mu) \|_H \geq \| u_{h4}(\mu) \|_H,$$

o por las siguientes inecuaciones

$$0 \leq u_{h4}(\mu) \leq u_{h3}(\mu) \text{ en } \Omega,$$

donde $u_{h4}(\mu)$ es la solución de la inecuación variacional elíptica discreta (8) para $g_3(\mu)$, que resultan ser problemas abiertos. Se resalta que ambas condiciones son verdaderas para el problema de control óptimo continuo (3) y su correspondiente inecuación variacional asociada (4).

4. Conclusión

Se probó la convergencia de una familia de problemas de control óptimo discretos al problema continuo gobernado por una inecuación variacional elíptica utilizando el método de elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente patrocinado por los Proyectos PIP # 0534 de CONICET-UA, Rosario, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122.

REFERENCIAS

[1] V. BARBU, *Optimal control of Variational Inequalities*, Research Notes in Mathematics No 1000, Pitman, London (1984).

[2] F. BEN BELGACEM, H. EL FEKIH, AND METOUI , *Singular perturbations for the Dirichlet boundary control of elliptic problems*, ESAIM:M2AN, 37, (2003), pp.833-850.

[3] M. BERGOUNIOUX , *Use of augmented Lagrangian methods for the optimal control of obstacle problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 95, (1997), pp.101-126.

[4] M. BERGOUNIOUX , AND K. KUNISCH , *Augmented Lagrangian techniques for elliptic state constrained optimal control problems*, SIAM Journal of Control and Optimization, 35, (1997), pp.1524-1543.

[5] M. BERGOUNIOUX, AND F. MIGNOT, *Optimal control of obstacle problems: existence of lagrange multipliers*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 5, (2000), pp.45-70.

[6] M. BOUKROUCHE, AND D. TARZIA, *Convergence of distributed optimal control problems governed by elliptic variational inequalities*, Computational Optimization and Applications 53, (2012), pp.375-393.

[7] S. BRENNER, L. SCOTT, *The mathematical theory of finite elements*, Springer, Berlin, (1994).

[8] E.CASAS, AND M. MATEOS, *Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 21, (2002), pp.67-100.

[9] E.CASAS, AND J.P. RAYMOND, *Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equations*, SIAM Journal of Control and Optimization, 45, (2006), pp.1596-1611.

[10] P. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, Philadelphia, (2002).

[11] J. DE LOS REYES, *Optimal control of a class of variational inequalities of the second kind*, SIAM Journal of Control and Optimization, 49, (2011), pp.1629-1658.

[12] C.M. GARIBOLDI, AND D.A. TARZIA , *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Applied Mathematics and Optimization, 47, (2003), pp.213-230.

[13] R. HALLER-DINTELMANN, C. MEYER, J. REHBERG, AND A. SCHIELA, (2009) *Holder continuity and optimal control for nonsmooth elliptic problems*, Applied Mathematics and Optimization, 60, (2009), pp.397-428.

[14] J. HASLINGER, AND T. ROUBICEK, *Optimal control of variational inequalities. Approximation theory and numerical realization*, Applied Mathematics and Optimization, 14, (1986), pp.187-201.

[15] M. HINTERMÜLLER, *Inverse coefficient problems for variational inequalities: optimality conditions and numerical realization*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 35, (2001), pp.129-152.

[16] M. HINTERMÜLLER, *A variational discretization concept in control constrained optimization: The linear-quadratic case*, Computional Optimization and Applications, 30, (2005), pp.45-61.

[17] M. HINTERMÜLLER, *An active-set equality constrained Newton solver with feasibility restoration for inverse coefficient problems in elliptic variational inequalities*, Inverse Problems, 24 (2008),pp.034017 (23pp).

[18] M. HINTERMÜLLER, AND I. KOPACKA, *Mathematical programs with complementarity constraints in function space: C- and strong stationarity and a path-following algorithm*, SIAM Journal on Optimization, 20, (2009), pp.868-902.

[19] M. HINTERMÜLLER, AND C. LOEBHARD, *Solvability and stationarity for the optimnal of variational inequalities with point evaluations in the objective functional*, PAMM, 13, (2013), pp.459-460.

[20] K. ITO, AND K. KUNISCH, *Optimal control of elliptic variational inequalities*, Applied Mathematics and Optimization, 41, (2000), pp.343-364.

[21] D. KINDERHLERER, AND G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Acdemic Press, New York, (1980).

[22] K. KUNISCH, AND D. WACHSMUTH, *Path-following for optimal control of stationary variational inequalities*, Computational Optimization and Applications, 41, (2012), pp.1345-1373.

[23] J.L LIONS, AND G.STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 20, (1967), pp.493-519.

[24] J.L. LIONS, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, (1968).

[25] F. MIGNOT *Control dans les inequations variationelles elliptiques*, Journal of Functional Analysis, 22, (1976), pp.130–185.

[26] F. MIGNOT, AND P. PUEL *Optimal control in some variational inequalities*, SIAM Journal of Control and Optimization, 22, (1984), pp.466-476.

[27] D.A. TARZIA, *Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem to obtain a discrete steady-state two-phase Stefan problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 34, (1996), pp.1257-1265.

[28] D.A. TARZIA, *A commutative diagram among discrete and continuous Neumann boundary optimal control problems*, Advances in Differential equations and Control Processes, 14, (2014), pp.23-54.

[29] F. TRÖLTZSCH, *Optimal control of partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, (2010).

[30] M. YAN, L. CHANG, AND N. YAN, *Finite element method for constrained optimal control problems governed by nonlinear elliptic PDEs*, Math. Control Related Fields, 2, (2012), pp.183-194.

[31] Y. YE, AND Q. CHEN *Optimal control of the obstacle in a quasilinear elliptic variational inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 294, (2004), pp.258-272.