RESULTADOS DE MONOTONÍA PARA PROBLEMAS DE TIPO STEFAN A DOS FASES CON RESPECTO A COEFICIENTES TÉRMICOS

Mariela C. Olguin*, María C.Sanziel*^ y Domingo A. Tarzia#

** Dpto.de Matemática - Fac. de Cs.Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina. mcolguin@fceia.unr.edu.ar , sanziel@fceia.unr.edu.ar*
^ Consejo de Investigaciones, Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
 # CONICET - Dpto. de Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se estudian diversos problemas de tipo Stefan unidimensionales a 2 fases en un dominio acotado, con diferentes datos sobre los bordes fijos del dominio. Para este tipo de problemas no se cuenta con la solución en forma explícita. Se determina la monotonía de las temperaturas de las fases líquida y sólida y de la frontera libre de cambio de fase respecto de la mayoría de los coeficientes térmicos. Para los casos en los que no es posible establecer analíticamente la monotonía, se propone un método numérico para aproximar los valores de las soluciones y de esta manera, a través del análisis de casos particulares, se demuestra la no-monotonía correspondiente.

Palabras claves: M*ateriales de cambio de fase, problema de Stefan, fusión, monotonía respecto de coeficientes térmicos*
2000 AMS Subjects Classification: 35R35 - 80A22 - 35B30

1. INTRODUCCIÓN

Basado en una aplicación tecnológica [4] (la utilización de sustancias de cambio de fase para el transporte de sustancias biológicas), en [5] se consideró un problema de Stefan unidimensional a una fase para el caso de la fusión de un material semi-infinito y se demostró que tanto la temperatura de la sustancia como la frontera libre presentan un comportamiento monótono respecto del calor latente, el calor específico y la densidad de masa, no así respecto de la conductividad térmica del material considerado. El objetivo del presente trabajo es continuar esta línea de investigación estudiando diversos problemas unidimensionales de Stefan a dos fases para un cuerpo finito. Se establece la monotonía de la solución del problema con respecto a coeficientes térmicos.

2. FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS

Se considera un material finito, representado por el intervalo [0, 1] cuya temperatura de cambio de fase es 0 ºC. Inicialmente, una parte de él se encuentra en estado sólido y otra en estado líquido. Si se designa con $x = s(t)$ a la posición del frente de cambio de fase en cada instante de tiempo, y con *u(x,t)* y *v(x,t)* la temperatura de las fases líquida y sólida respectivamente, el problema *(P)* consiste en determinar estas funciones y además el tiempo maximal *T* de existencia de solución, de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$\alpha_l u_{xx} = u_t \qquad 0 < x < s(t) \qquad 0 < t < T \tag{1.1}$$

$$\alpha_s v_{xx} = v_t \qquad s(t) < x < 1 \qquad 0 < t < T \tag{1.2}$$

$$A\, u(0,t) + B\, u_x(0,t) = f(t) \qquad 0 < t < T \tag{1.3}$$

$$C\, u(1,t) + D\, u_x(1,t) = g(t) \qquad 0 < t < T \tag{1.4}$$

$$u(s(t), t) = v(s(t),t) = 0 \qquad 0 < t < T \tag{1.5}$$

$$k_s v_x(s(t),t) - k_l u_x(s(t),t) = \rho\, \ell\, s'(t) \qquad 0 < t < T \tag{1.6}$$

$$s(0) = b \qquad 0 < b < 1 \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad 0 < x < b \tag{1.8}$$

$$v(x,0) = \psi(x) \qquad b < x < 1 \tag{1.9}$$

donde $\alpha_i = \dfrac{k_i}{\rho c_i}$ es el coeficiente de difusividad, k_i es la conductividad térmica, c_i es el calor específico con el subíndice $i = l$, s indicando la fase líquida y sólida respectivamente, ρ es la densidad de masa común a ambas fases y ℓ es el calor latente de fusión por unidad de masa.

Según sean los valores de las constantes *A, B, C, D* en las condiciones (1.3) y (1.4) se tendrá:

- un problema con dato de temperatura en ambos bordes,
- un problema con dato de flujo en ambos bordes
- un problema con dato de temperatura en un borde y flujo en el otro.

Bajo adecuadas hipótesis sobre los datos iniciales y de borde, que se asumen en el presente trabajo, en [2, 3, 7] se muestra que existe solución del problema *(P)* para todo tiempo $T > 0$.

3. Resultados analíticos de monotonía

Teorema 1 *La solución del problema (P) a dos fases, bajo ciertas hipótesis sobre los datos f, g, φ y ψ , es monótona respecto del calor latente, la densidad de masa, el calor específico de cada fase y la conductividad térmica de la fase líquida.*

Prueba. Se considera variable al calor latente. Sean $\ell_1 < \ell_2$; se designa con $\{u_1, v_1, s_1\}$ y $\{u_2, v_2, s_2\}$ a las soluciones del problema (P) correspondientes a ℓ_1 y ℓ_2. Si se supone que la solución no es monótona, es decir que las fronteras s_1 y s_2 se cruzan en un instante $t_0 > 0$, se llega, aplicando el principio de máximo y el Lema de Hopf [6], a un absurdo, a partir del cual se deduce que, para todo tiempo, $u_1 \geq u_2$, $v_1 \geq v_2$ y $s_1 \geq s_2$.

De manera análoga se demuestra la monotonía para los restantes coeficientes c_l, c_s, ρ y k_l .□

Observación 2 *Con los recursos utilizados en la demostración del Teorema 1, no fue posible establecer la monotonía de la solución del problema (P) respecto de la conductividad térmica* k_s .

4. Resultados numéricos

Para aproximar la solución del problema se utiliza un esquema en diferencias finitas. Por la naturaleza del problema, el dominio de definición para la solución es variable en el tiempo. Es necesario entonces establecer un esquema en el que la grilla vaya ajustándose para cada instante de tiempo. Se propone para ello un paso temporal fijo y, manteniendo constante la cantidad de pasos espaciales, va adaptándose su longitud de manera que la frontera libre se ubique siempre sobre nodos del mallado [8].

A fin de investigar el comportamiento de la solución del problema *(P)* cuando varía la conductividad térmica k_s , se analizaron las soluciones numéricas en los siguientes casos:

i) **datos de temperatura en el borde *x = 0* y de flujo en el borde *x = 1***

Se consideraron las ecuaciones del problema *(P)* con los siguientes valores para los datos [1]:

$A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ y $D = k_s = 2.24\, W/mK$

$\rho = 1000\, kg/m^3$, $\ell = 334000\, J/kg$, $k_l = 0.58\, W/mK$, $k_s = 2.24\, W/mK$

$c_l = 4185.5\, J/kg^{\circ}C$, $c_s = 2090\, J/kg^{\circ}C$

$f(t) = 70^{\circ}C$, $g(t) = -4$, $\varphi(x) = -140x+70$, $\psi(x) = -8x+4$, $s(0) = 0{,}5\ m$

En la Figura 1 se observa el comportamiento de las fronteras libres. En la Figura 2 se observa las distribuciones de temperatura, para un tiempo *t=266.7 hs.* Se aprecia la no-monotonía con respecto a k_s .

ii) **datos de flujo en ambos bordes fijos**

Se consideraron las ecuaciones del problema *(P)* con los siguientes valores para los datos [1]:

$A = 0$, $B = k_l = 0.58\, W/mK$, $C = 0$ y $D = k_s = 2.24\, W/mK$

$\rho = 1000\, kg/m^3$, $\ell = 334000\, J/kg$, $k_l = 0.58\, W/mK$, $k_s = 2.24\, W/mK$

$c_l = 4185.5\, J/kg^{o}C$, $c_s = 2090\, J/kg^{o}C$

$f(t) = -10$, $g(t) = -8$, $\varphi(x) = -76\,x + 38$, $\psi(x) = -8\,x + 4$, $s(0) = 0{,}5\ m$

En la Figura 3 puede verse el comportamiento de las fronteras libres. En la Figura 4 se observa las distribuciones de temperatura, para un tiempo $t = 600\ hs$. Se aprecia la no-monotonía con respecto a k_s.

iii) **datos de temperatura en ambos bordes fijos**

Para este caso se consideraron diferentes juegos de datos, pero no fue posible establecer la no-monotonía de la solución.

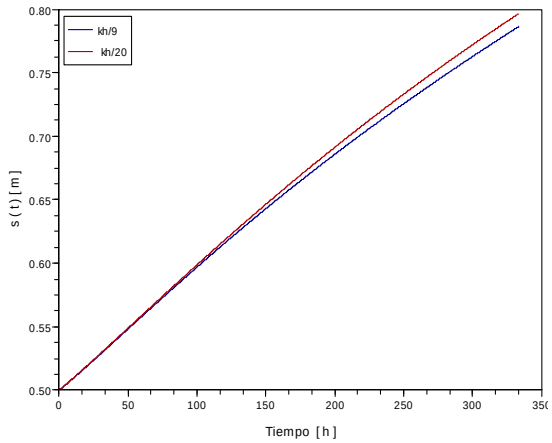

Figura 1: Fronteras libres para el caso temperatura-flujo

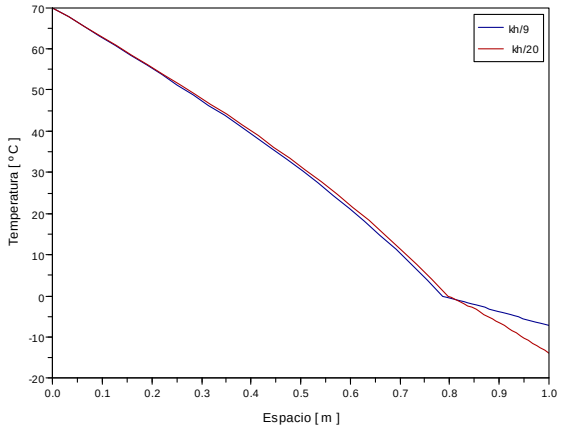

Figura 2: Distribución de temperatura para el caso temperatura-flujo en un tiempo *t=266.7 hs*

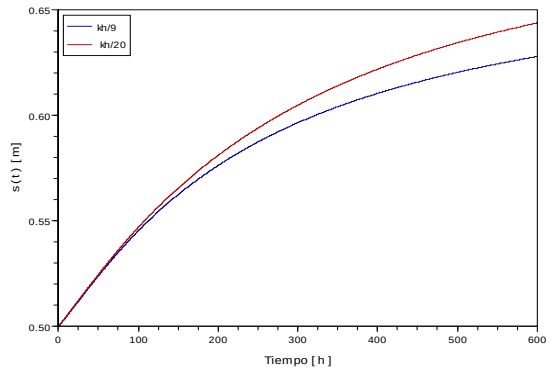

Figura 3: Fronteras libres para el caso flujo-flujo

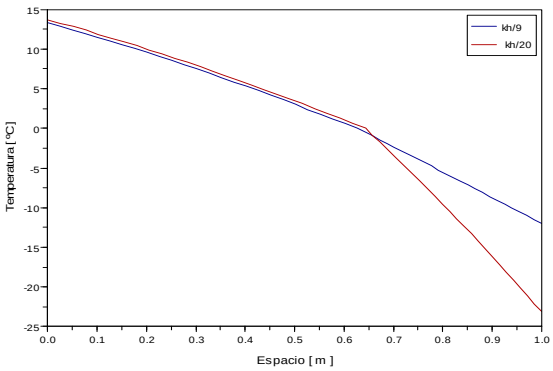

Figura 4: Distribución de temperatura para el caso flujo-flujo en un tiempo *t = 600 hs*

5. CONCLUSIONES

Se demostró que las soluciones de problemas de Stefan unidimensionales a dos fases, planteados en dominios finitos, son monótonas respecto de la variación del calor latente de fusión, la densidad de masa, el calor específico de cada una de las fases y la conductividad térmica de la fase líquida, tanto en el caso de: datos de temperatura en ambos bordes fijos, datos de flujo en ambos bordes fijos como para datos de temperatura en un borde y flujo en el otro.

Respecto de la conductividad térmica de la fase sólida, se comprobó a través de resultados numéricos, que la distribución de temperaturas no es monótona, para el caso de: datos de temperatura en un borde y flujo en el otro, y datos de flujo en ambos bordes fijos. En tanto que, para el caso de dato de temperatura en ambos bordes, hasta el momento, no fue posible establecer si la solución es o no monótona.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por proyectos PIP Nº 0460 de CONICET-UA y Nº 19/I218 de UNR, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

[1] V. ALEXAIDES, AND A.D. SOLOMON, *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere-Taylor & Francis, Washington, 1996.

[2] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.

[3] J.R. CANNON, AND M. PRIMICERIO, *A two-phase Stefan problem with temperature boundary conditions*, Annali Mat. Pura Appl., 88 (1971), pp. 177-191.

[4] M. MEDINA, A. BOUCIGUEZ, AND M. LARA, *Diseño de un embalaje para productos biológicos con absorción del calor de respiración a través de un material con cambio de fase*, ERMA-Energías Renovables y Medio Ambiente, 14 (2004), pp. 39-44.

[5] M.C. OLGUIN, M.A. MEDINA, M.C. SANZIEL, AND D.A. TARZIA, *Behavior of the solution of the Stefan problem by changing thermal coefficients of the substance,* Appl. Math. Comput., 190 (2007), pp. 765-780.

[6] M.H. PROTTER, AND H.F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[7] D.A. TARZIA, *Estudios teóricos básicos en el Problema de Stefan unidimensional a dos fases,* Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, 14 (1987), pp. 45-75.

[8] M. ZERROUKAT, AND C.R. CHATWIN, *Computational moving boundary problems,* John Wiley & Sons, New York, 1994.