UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis del
Doctorado en Matemática

Soluciones explícitas a problemas de frontera libre para la ecuación del calor con fuentes internas o coeficientes térmicos no lineales

por

MARÍA FERNANDA NATALE

Director: DR. DOMINGO A. TARZIA

2004

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer, en primer lugar a mi director Dr. Domingo Alberto Tarzia, por su constante apoyo humano y su dedicación durante estos años de trabajo conjunto.

Agradezco también a la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral de Rosario, a sus autoridades, personal docente y administrativo, institución en la cual trabajo desde 1991.

Deseo agradecer muy especialmente a Adriana, Eduardo y Graciela, mis compañeros de trabajo en el Departamento de Matemática, por su amistad y por ayudarme en todo momento. En particular a Adriana porque compartió desde un principio muchas horas de estudio y de trabajo, siendo coautora del último capítulo de esta tesis.

Principalmente, agradezco a mi mamá Isabel, a mi esposo Vicente y al padrino de mis hijos José Luis porque me han dado todo su amor, su comprensión y han permitido con su ayuda incondicional llegar hasta esta instancia de mi vida. Y, a lo más importante de mi vida, mis hijos Jimena, Julieta, Martín y Camila, por brindarme día a día el amor y la alegría que me colman de felicidad.

Indice General

RESUMEN.

El objetivo de la presente tesis es la de resolver diversos problemas de frontera libre para la ecuación del calor-difusión, en particular para el problema de Stefan. El problema de Stefan (o problema de cambio de fase) estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida. Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. Sobre la superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, se impone una condición adicional que surge del principio de conservación de la energía. El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha frontera libre, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Se resuelven cuatro problemas de tipo Stefan distribuidos en cuatro capítulos, en los cuales se obtienen soluciones explícitas de tipo similaridad.

En el **capítulo 1** se considera un problema de Stefan a dos fases para una región semi-infinita $x > 0$ con temperatura de cambio de fase T_f. Se debe determinar la evolución de la frontera libre $x = X(t)$ y la temperaturas en ambas fases. Se considera un proceso con cambio de fase (problema de Stefan) para una ecuación de conducción del calor no lineal que generaliza la clase de soluciones exactas análogas a la clásica solución de tipo Neumann [G. Lamé - B. P. Clapeyron, *"Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide Annales chimie Physique",* 47 (1831) 250-256]. Se usará el método de similaridad para encontrar una solución exacta al problema de frontera libre.

En [C. Rogers, "*Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*", J. Phys. A: Math. Gen, 18 (1985) 105-109] se considera el siguiente problema de frontera libre (proceso de fusión)

$$\rho c_{p_1}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right) \ , \ X(t) < x < \infty \ , \ t > 0 \tag{1}$$

$$k_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x} - k_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x} = L\rho \dot{X} \ , \ x = X(t) \tag{2}$$

$$T_1 = T_2 = T_f \quad , \ x = X(t) \tag{3}$$

$$\rho c_{p_2}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right) \ , \ 0 < x < X(t) \ , \ t > 0 \tag{4}$$

$$T_1(x,0) = T_0 < T_f \tag{5}$$

$$X(0) = 0 \tag{6}$$

$$k_2\left(T_2(0,t)\right)\frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}\ ,\ q_0 > 0\ ,\ t > 0 \tag{7}$$

donde $T_i(x,t), i = 1,2$: distribución de la temperatura en ambas fases, sólida y líquida respectivamente en el material semi-infinito $x > 0$ en el tiempo t, x : variable espacial, t : variable temporal, $X(t)$: frontera libre, ρ : densidad constante del medio, T_f : temperatura de cambio de fase, T_0 : temperatura inicial constante, $c_{p_i}(T_i), i = 1,2$: calor específico en las dos fases, sólida y líquida respectivamente, $k_i(T_i)$, $i = 1,2$: conductividad térmica en las dos fases, sólida y líquida respectivamente, L : al calor latente de fusión del medio, $-q_0/\sqrt{t}$: flujo de calor sobre el borde fijo $x = 0$, T_0 : temperatura inicial del medio.

En [D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math., 39 (1981) 491-497] se probó que la condición de flujo de calor (7) sobre el borde fijo $x = 0$ es equivalente a la condición de temperatura constante en el borde fijo $x = 0$ para el problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito con coeficientes térmicos constantes en ambas fases.

Este problema se plantea para materiales para los cuales existen constantes positivas K_i, $i = 1,2$ tales que

$$K_i\frac{\Phi_i'}{\Phi_i^2} = k_i(T_i) \qquad , \qquad i = 1,2 \qquad , \qquad K_i > 0 \tag{8}$$

donde

$$\Phi_i(T_i) = \int_{T_{0i}}^{T_i} S_i(\sigma)\ d\sigma \qquad , \qquad S_i(T_i) = \rho c_{p_i}(T_i) \qquad i = 1,2\ . \tag{9}$$

Se demuestra que si se cumple la condición (8) entonces $k_i(T_i)$ y $S_i(T_i)$ verifican la siguiente relación de Storm

$$\frac{1}{\sqrt{k_i(T_i)S_i(T_i)}}\frac{d}{dT_i}\left(log\sqrt{\frac{S_i(T_i)}{k_i(T_i)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{K_i}} \qquad , \qquad i = 1,2\ . \tag{10}$$

Dicha condición fue originalmente obtenida por [M. L. Storm, *"Heat conduction in simple metals"*, J. Appl. Physics 22 (1951) 940-951] en una investigación de conducción del calor en metales monoatómicos simples. Así, la validez de la aproximación (10) fue examinada para aluminio, plata, sodio, zinc, cobre y plomo.

El objetivo de este trabajo es complementar el de C. Rogers citado anteriormente y demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema $(1)-(7)$ si y sólo si la constante positiva q_0 es suficientemente grande, es decir,

$$q_0 > \sqrt{K_2}G^{-1}\left(\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\frac{1}{\left(\frac{\Phi_1(T_f)}{\Phi_1(T_0)}-1\right)}\right) \tag{11}$$

donde $G^{-1} : (1,+\infty) \longmapsto (0,+\infty)$ es la función inversa de G con

$$G(x) = \text{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp(-x^2)}{x} \qquad , \qquad x > 0. \tag{12}$$

Luego se considera el problema $(1)-(6)$ y la condición de flujo (7) se reemplaza por la siguiente condición de temperatura

$$T_2(0,t) = T_m > T_f \ \ . \tag{13}$$

sobre el borde fijo.

Se prueba la existencia y unicidad de solución del problema $(1)-(6)$ y (13) para cualquier valor de los datos iniciales del problema.

Estos resultados fueron publicados en Journal of Phsysics A: Mathematical and General, 33 (2000) 395-404.

En el **Capítulo 2** se considera un problema de Stefan para una región semi-infinita $x > 0$. Se debe determinar la evolución de la frontera libre $x = s(t)$ y la distribución de la temperatura $\theta(x,t)$. Se considera un proceso a una fase para una ecuación de conducción de calor no lineal con término convectivo.

Se continúa el trabajo [C. Rogers - P. Broadbridge, *"On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of reciprocal transformation"*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 39 (1988) 122-129] para lo cual se considera el siguiente problema de frontera libre (proceso de solidificación)

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta,x)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) - v(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\ ,\ 0 < x < s(t)\ ,\ t > 0 \tag{14}$$

$$k(\theta(0,t),0)\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}\ ,\ q_0 > 0\ ,\ t > 0 \tag{15}$$

$$k\left(\theta\left(s(t),t\right),s(t)\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(s(t),t\right) = \rho l\ \dot{s}(t)\ ,\ t > 0 \tag{16}$$

$$\theta\left(s(t),t\right) = 0\ ,\ t > 0\quad ,\quad s(0) = 0 \tag{17}$$

donde la conductividad térmica $k(\theta, x)$ y la velocidad $v(\theta)$ están dadas por

$$v(\theta) = \rho c\frac{d}{2\left(a+b\theta\right)^2}\quad ,\quad k(\theta,x) = \rho c\frac{1+dx}{\left(a+b\theta\right)^2} \tag{18}$$

donde $\theta(x,t)$: distribución de temperatura en el material semi-infinito, q_0 : coeficiente que caracteriza el flujo de calor sobre el borde fijo, x : variable espacial, t : tiempo, $s(t)$: frontera libre (posición de la interfase), c : calor específico por unidad de masa , ρ : densidad de masa, k : conductividad térmica, l : calor latente de fusión por unidad de masa, v : velocidad, a, b, d : constantes positivas (parámetros) tales que $a + b\theta_f > 0$.

Si se toma $d = 0$ y $b = 0$ en el problema de frontera libre $(14) - (17)$ entonces se obtiene el clásico problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a una fase que posee la solución explícita dada en [G. Lamé - B. P. Clapeyron 1831]. Se nota con $q_0/\sqrt{t}$ al flujo de calor en el borde fijo $x = 0$.

El objetivo del trabajo es determinar que condiciones deben cumplir los parámetros del problema (en particular q_0) para obtener un proceso de cambio de fase instantáneo. También se continúa y complementa el trabajo de C. Rogers y P. Broadbridge citado anteriormente, probando la existencia de una solución explícita al problema $(14) - (17)$ con coeficientes no lineales (18) cualesquiera sean los datos q_0, ρ, c, l, a, b, d . Más aún, esta solución está dada como una función que depende de un parámetro γ^*, el cual es la única solución de una ecuación trascendental. Además, si se reemplaza la condición de flujo por una nueva condición de temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$ también se obtiene la existencia de solución cualesquiera sean los datos. En ambos casos la solución explícita está dada en forma paramétrica y tiene una representación del tipo similaridad.

Estos resultados fueron publicados en International Journal of Engineering Science, 41 (2003) 1685-1698.

En el **Capítulo 3** se considera un problema de cambio de fase (problema de Stefan) para una ecuación del calor no lineal para una región semi-infinita

$x > 0$ con conductividad térmica no lineal $k(\theta)$ dada por

$$k(\theta) = \frac{\rho c}{(a + b\theta)^2} \tag{19}$$

y temperatura de cambio de fase θ_f.

La formulación matemática de este problema de frontera libre (proceso de fusión) consiste en determinar la evolución de la frontera libre $x = s(t)$ y la distribución de la temperatura $\theta = \theta(x, t)$ satisfaciendo las condiciones

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \tag{20}$$

$$k(\theta(0,t))\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} \ , \ q_0 > 0 \ , \ t > 0 \tag{21}$$

$$k\left(\theta\left(s(t),t\right)\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\left(s(t),t\right) = -\rho l \ \dot{s}(t) \ , \ t > 0 \tag{22}$$

$$\theta\left(s(t),t\right) = \theta_f \ , \ t > 0 \ \ s(0) = 0 \tag{23}$$

donde $\theta(x,t)$: distribución de temperatura en el material semi-infinito, q_0 : coeficiente que caracteriza el flujo de calor sobre el borde fijo, x : variable espacial, t : tiempo, $s(t)$: frontera libre (posición de la interfase), c : calor específico por unidad de masa, ρ : densidad de masa, k : conductividad térmica, l : calor latente de fusión por unidad de masa, θ_f : temperatura de cambio de fase, a, b, d : constantes positivas (parámetros) tales que $a + b\theta_f > 0$. Como en los capítulos previos, se considera un flujo de calor del tipo $-q_0/\sqrt{t}$ sobre el borde $x = 0$; luego se considerará temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$ del tipo $\theta(0,t) = \theta_0$.

El problema de frontera libre $(20) - (23)$ con $k(\theta)$ definido por (19) es un caso particular del presentado en el capítulo 2 tomando el parámetro $d = 0$ para la ecuación diferencial (14) donde la conductividad térmica $k(\theta)$ y el término de velocidad $v(\theta)$ están dados por (18).

En dicho capítulo 2 se encuentran condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución explícita. Aquí se estudia el caso sin término de velocidad, i.e. $d = 0$ en la ecuación diferencial (14), el cual no puede obtenerse del caso estudiado previamente en para el caso $d \neq 0$. En aquel problema se definió la transformación

$$y = \frac{2}{d}\left[(1 + dx)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \tag{24}$$

la cual es la identidad si se toma $d \to 0$ pues

$$\lim_{d\to 0} \frac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = x \ , \ \forall\, x > 0.$$

Por lo tanto, el caso $d = 0$ debe resolverse usando otras técnicas, lo cual será realizado en este capítulo.

Se prueba la existencia y unicidad de una solución explícita del tipo similaridad para el problema de frontera libre $(20) - (23)$ para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f > bl/c$. También se obtiene una solución explícita para el caso $a + b\theta_f = bl/c$. Dichas soluciones se obtienen a través de la única solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro.

Además, para el caso $a + b\theta_f < bl/c$ no existe solución al problema de frontera libre $(20) - (23)$.

Luego se reemplaza la condición de flujo (21) por una condición de temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$. Se prueba la existencia y unicidad de una solución explícita del tipo similaridad del problema $(20), (22) - (23)$ y $\theta(0,t) = \theta_0$ para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario y positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f \geq bl/c$. Dichas soluciones se obtienen a través de la única solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro. También se demuestra para el caso $a + b\theta_f < bl/c$ la existencia de al menos una solución.

Estos resultados fueron recientemente aceptados para su publicación en el Bollettino della Unione Matematica Italiana (2004).

El **Capítulo 4** surge del análisis de los siguientes trabajos:

J. E. Bouillet - D. A. Tarzia, "*An integral equation for a Stefan problem with many phases and a singular source*", Revista de la Unión Mat. Argentina, **41** #4 (2000) 1-8;

J. L. Menaldi - D. A. Tarzia, "*Generalized Lamé Clapeyron solution for a one-phase source Stefan problem*", Comp. Appl. Math, **12** #2 (1993) 123-142;

y como una generalización del segundo para el caso a dos fases.

Se considera el siguiente problema de Stefan a dos fases (proceso de fusión) para un material semi-infinito con fuentes de energía internas en ambas fases

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x,t) = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_2} g_2(x,t), \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0; \quad (25)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x,t) = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_1} g_1(x,t), \qquad x > s(t), \qquad t > 0; \tag{26}$$

$$T_1\left(s(t),t\right) = T_2\left(s(t),t\right) = 0, \qquad t > 0; \tag{27}$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\left(s(t),t\right) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\left(s(t),t\right) = \rho l \ \dot{s}\ (t), \qquad t > 0; \tag{28}$$

$$T_1(x,0) = T_1(+\infty,t) = -C < 0, \qquad x > 0, \qquad t > 0; \tag{29}$$

$$T_2\left(0,t\right) = B > 0, \qquad t > 0; \tag{30}$$

$$s(0) = 0. \tag{31}$$

para fuentes internas dadas por las expresiones

$$g_j = g_j(x,t) = \frac{\rho l}{t} \beta_j \left(\frac{x}{2a_j\sqrt{t}} \right) \qquad j = 1, 2, \tag{32}$$

donde se supone que $\beta_1(\eta) \geq 0$ y $\beta_2(\eta) \leq 0$ y además $\beta_j = \beta_j\left(\eta\right)$: funciones integrables en $(0,\epsilon)$ $\forall \epsilon > 0$, $\beta_j\left(\eta\right)\exp(\eta^2)$: funciones integrables en $(M, +\infty)$ $\forall M > 0$, $B > 0$: temperatura en el borde fijo $x = 0$, $-C < 0$: temperatura inicial y temperatura para $x \to \infty$, l : calor latente de fusión constante por unidad de masa, ρ : densidad de masa constante, c_j , $j = 1, 2$: calor específico constante en las dos fases, sólida y líquida respectivamente, k_j , $j = 1, 2$: conductividad térmica constante en las dos fases, sólida y líquida respectivamente y $a_j^2 = k_j/\rho c_j$, para $j = 1, 2$: cuadrado de la difusividad térmica en ambas fases.

Se obtienen soluciones explícitas para el problema (25)-(31), para fuentes de energía interna dadas por (32) y con condición de temperatura en $x = 0$; y se dan además propiedades de monotonicidad de dichas soluciones. Luego se resuelve el problema de frontera libre con condición de flujo del tipo $-q_0/\sqrt{t}\,(q_0 > 0)$ sobre el borde fijo $x = 0$, y se obtiene soluciones explícitas a este problema si el coeficiente q_0 satisface una desigualdad particular que depende de los datos del problema. También se dan propiedades de monotonicidad de la solución y se demuestra la equivalencia de los dos problemas de frontera libre.

En [E. P. Scott, "*An analytical solution and sensitivity study of sublimation-dehydration within a porous medium with volumetric heating*", Journal of Heat Transfer, 116 (1994) 686-693] se consideró un medio poroso semi-infinito congelado con propiedades térmicas constantes sujeto a un proceso de sublimación-deshidratación que involucra a una fuente volumétrica de calor del tipo (32) con

$$\beta_j(x) = \exp\left(-\left(x + d_j\right)^2\right) \ , \ j = 1, 2.$$

y también se llevó a cabo un estudio de sensibilidad en el cual fueron analizados los efectos de las propiedades inherentes del material en las soluciones.

En este capítulo se explicitan, para este caso particular, los resultados fundamentales obtenidos anteriormente para el caso general.

En cuanto a los tres primeros capítulos, la importancia de los resultados a obtener reside en el hecho de que la modelización de este tipo de sistemas es un problema de gran interés matemático e importancia industrial. Problemas de cambio de fase aparecen frecuentemente en procesos industriales tales como: colada continua del acero, congelación y descongelación de alimentos, solidificación de aleaciones binarias, soldadura de metales, en tecnología nuclear: prevención de accidentes por fusión de material radiactivo, en ingeniería civil solidificación de suelos húmedos, en aprovechamiento de energía solar, etc. y es fundamental poder establecer condiciones sobre los datos para asegurar la presencia o no de cambio de fase o de la frontera libre.

Por otro lado, en el capítulo 4 se plantea un problema que es relevante en procesos térmicos, por ejemplo en procesos de sublimación-deshidratación.

INTRODUCCION.

Los problemas de frontera libre son aquellos problemas de contorno para ecuaciones diferenciales parciales donde interviene además una superficie incógnita (la "frontera libre") que separa dos o más regiones, y sobre la cual se conocen datos que dependen del modelo analizado. Según el número de dimensiones del espacio, en lugar de una superficie se podrá tener una curva o un número finito de puntos. Un ejemplo típico es el problema de Stefan (o problema de cambio de fase), que estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase líquida y una fase sólida. Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. Sobre la superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, se impone una condición adicional que surge del principio de conservación de la energía a través de la frontera. El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha frontera libre, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

Los problemas de frontera libre para la ecuación del calor se dividen en dos clases: de "tipo explícito" o de "tipo implícito", según aparezca o no explícitamente la velocidad de la frontera libre en las condiciones que se imponen sobre dicha frontera. Es decir, si la frontera libre viene dada por $x = s(t)$, entonces el problema será de tipo explícito (implícito) si $\dot{s}(t)$ aparece (no aparece) en las condiciones que se imponen para $x = s(t)$.

Los cuatro capítulos de esta Tesis son todos ejemplos de problemas de frontera libre de tipo explícito o problemas de tipo Stefan.

Se pueden además estudiar problemas de frontera libre a una o dos fases si se considera la ecuación del calor para una fase (sólida o líquida) o para las dos fases (sólida y líquida) respectivamente.

Si se tiene un sólido semi-infinito (representado por $x > 0$) a temperatura de fusión T_f y en el borde fijo $x = 0$ es calentado a una temperatura $T_0 > T_f$, se dice que es un problema de Stefan (fusión) a una fase. Su formulación matemática está dada por: hallar la temperatura $T(x,t)$ de la fase líquida y la frontera libre $x = s(t)$, definida para $t > 0$, de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \rho c T_t - k T_{xx} = 0, \ 0 < x < s(t), & t > 0 \\ T(0,t) = T_0 > T_f \ , & t > 0 \\ T(s(t),t) = T_f \, , & t > 0 \\ s(0) = 0 \ , & t > 0 \\ k T_x(s(t),t) = -\rho l \overset{\bullet}{s}(t) \ , & t > 0 \end{cases}$$

donde la última condición se conoce como "condición de Stefan" y los coeficientes térmicos k (conductividad térmica), ρ (densidad de masa) y c (calor específico) son los correspondientes a la fase líquida del material de cambio de fase.

Pero si un material semi-infinito se encuentra inicialmente en estado sólido a una temperatura $T_i < T_f$ (temperatura de cambio de fase), y en el borde fijo $x = 0$ es calentado a una temperatura T_0, con $T_0 > T_f$, entonces se tiene un problema de Stefan a dos fases, cuya formulación matemática está dada por: hallar la función $x = s(t)$ (frontera libre, definida para $t > 0$) y la temperatura

$$T(x,t) = \begin{cases} T_2(x,t) > T_f & \text{si} \quad 0 < x < s(t), & t > 0, \\ T_f & \text{si} \quad x = s(t), & t > 0, \\ T_1(x,t) < T_f & \text{si} \quad s(t) < x, & t > 0, \end{cases}$$

definida para $x > 0$ y $t > 0$, de manera que satisfagan las siguientes condiciones ($i = 1$ representa la fase sólida y $i = 2$ la fase líquida; ρ la densidad de masa común a ambas fases):

$$\begin{cases} \rho c_2 T_{2t} - k_2 T_{2xx} = 0, \ 0 < x < s(t), & t > 0 \\ \rho c_1 T_{1t} - k_1 T_{1xx} = 0, \ x > s(t) & t > 0 \\ T_1(x,0) = T_i \ , \ x > 0 & \\ T_2(0,t) = T_0 & t > 0 \\ T_1(s(t),t) = T_f & t > 0 \\ T_2(s(t),t) = T_f & t > 0 \\ s(0) = 0 & t > 0 \\ k_1 T_{1x}(s(t),t) - k_2 T_{2x}(s(t),t) = \rho l \overset{\bullet}{s}(t) & t > 0 \end{cases}$$

donde la última condición se conoce también como "condición de Stefan".

En ambos casos la condición de temperatura en el borde $x = 0$ puede reemplazarse por una condición de flujo de calor del tipo

$$k T_x(0,t) = -g(t) \ , \ t > 0, \ g \geq 0 \ .$$

En particular se consideran en todos los capítulos un flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{t}$.

Este tipo de flujo de calor sobre el borde fijo $x = 0$ fue también considerado en muchos problemas aplicados, por ejemplo [J. R. Barber, "*An asymptotic solution for short-time transient heat conduction between two similar contacting bodies*", Int. J. Heat Mass Transfer, 32 (1989) 943-949; M. N. Coelho Pinheiro, "*Liquid phase mass transfer coefficients for bubbles growing in a pressure field: a simplified analysis*", Int. Comm. Heat Mass transfer, 27 (2000) 99-108 y A. D. Polyanin - V. V. Dil'man, "*The method of the 'carry over' of integral transforms in non-linear mass and heat transfer problems*", Int. J. Heat Mass Transfer, 33 (1990) 175-181].

En las últimas décadas el número de trabajos sobre problemas con cambio de fase ha aumentado significativamente. Esto se debe a que esos procesos están presentes en numerosos y variados problemas de la ciencia e ingeniería.

Prueba de ello son los numerosos artículos en revistas científicas y en congresos internacionales que se desarrollan periódicamente. (Ver Tarzia, MAT - Serie A, # 2 (2000)).

Así numerosos trabajos con diferentes enfoques en el tema han sido encarados y motivaron la presente Tesis. Entre ellos pueden mencionarse:

(i) para problemas a un fase a coeficientes constantes:

• H. S. Carslaw - J. C. Jaeger, "*Conduction of heat in solids*", Oxford University Press, London (1959).

• G. Lamé and B. P. Clapeyron, "*Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide*", Annales Chimie Physique, 47 (1831) 250-256.

• D. A. Tarzia, "*Determination of the unknown coefficients in the Lame-Clapeyron problem (or one- phase Stefan problem)*", Adv. Appl. Math., 3 (1982) 74-82.

• D. A. Tarzia, "*Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face*", Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983) 1151-1158.

(ii) para problemas a una fase con una conductividad como una función afín de la temperatura:

• S. H. Cho - J. E. Sunderland, "*Heat conduction problem with melting or freezing*", J. Heat Transfer, 91 (1969) 421-426.

• D. A. Tarzia, "*The determination of the unknown coefficients through phase change process with temperature-dependent thermal conductivity*", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 25 (1998) 139-147.

• M. F. Natale - D. A. Tarzia, "*An exact solution for a one-phase Stefan Problem with nonlinear thermal coefficients*", MAT-Serie A N^o 5 (2001) 33-36.

(iii) para problemas a una fase con una conductividad dependiente de la temperatura :

• J. M. Hill, "*The Stefan problem in nonlinear heat conduction*", Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 37 (1986) 206-229.

• K. Kunish-K. A. Murphy- G. Pechl, "*Estimation of the conductivity in the one-phase Stefan problem: Numerical results*", Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 27 (1989) 1407-1419.

• C. Rogers, "*On a class of moving boundary problems in non-linear heat conduction: application a Backlund transformation*", Int. J. Non-Linear Mechanics, 21 N^o 4 (1986) 249-256.

• A. C. Briozzo - M. F. Natale - D. A. Tarzia, "*Determination of unknown thermal coefficients through a free boundary problem for a nonlinear heat conduction equation with a convective term*", International Communications in Heat and Mass Transfer, 24 N^o 6 (1997) 857-868.

• A. C. Briozzo - M. F. Natale - D. A. Tarzia, "*Determination of unknown thermal coefficients for Storm's type materials through a phase-change process*", International Journal of Non-Linear Mechanics, 34 (1999) 329-340.

(iv) para problemas a dos fases con coeficientes constantes :

• M. B. Stampella - D. A. Tarzia, "*Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem*", Int. J. Eng. Science, 27 (1989) 1407-1419.

• D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient* σ *of the free boundary* $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ *of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math., 39 (1981) 491-497.

(v) para problemas a dos fases con conductividad dependiente de la temperatura :

• C. Rogers, "*Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*", J. Phys. A: Math. Gen., 18 (1985) 105-109.

• C. Rogers - P. Broadbridge, "*On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of a reciprocal transformation*", Journal of Applied Mathematics and Physisc (ZAMP), 39 (1988) 122-129.

• S.H. Cho - J. E. Sunderland, *"Phase Change Problems With Temperature-Dependent Thermal Conductivity",* J. Heat Transfer, 96 (1974) 214-217.

(vi) para problemas de flujos en medios saturados-no saturados:

• P. Broadbridge, "*Solution of a nonlinear absorption model of mixed unsaturated flow*", Water Resources Research, 6 (1990) 2435-2443.

• P. Broadbridge - I. White, "*Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model 1. Analytic solutions*", Water Resources Research, 24 (1988) 145-154.

• M. F. Natale - E. A. Santillan Marcus, "*The effect of Heat Convection on Drying of Porous Semi-Infinite Space with a Heat Flux Condition on the Fixed Face* $x = 0$", Applied Mathematics and Computation, 137 N^o 1 (2003) 109-129.

(vii) para problemas con fuentes internas en el material:

• S. Bhattacharya - S. Nandi - S. DasGupta - S. De, "*Analytical solution of transient heat tranfer with variable source for applications in nuclear reactors*", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 28 #7 (2001) 1005-1013.

• J. E. Bouillet, "*Self-similar solutions, having jumps and intervals of constancy, of a diffusion-heat conduction equation*", IMA Prepints #230, Univ. Minnesota (1986).

• J. E. Bouillet - D. A. Tarzia, "*An integral equation for a Stefan problem with many phases and a singular source*", Revista de la Unión Mat. Argentina, 41 #4 (2000) 1-8.

• H. Feng, "*Analysis of microwave assisted fluidized-bed drying of particulate product with a simplified heat and mass transfer model*", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 29 #8 (2002) 1021-1028.

• J. L. Menaldi - D. A. Tarzia, "*Generalized Lamé Clapeyron solution for a one-phase source Stefan problem*", Comp. Appl. Math., 12 #2 (1993) 123-142.

• G.A. Mercado - B. P. Luce - J. Xin, "*Modelling thermal front dynamics in microwave heating*", IMA J. Appl. Math., 67 (2002) 419-439.

• P. Ratanadecho - K. Aoki - M. Akahori, "*A numerical an experimental investigations of the modeling of microwave melting of frozen packed beds using a rectangular wave guide*", Int. Comm Heat Mass Transfer, 28 (2001) 751-762.

• E. P. Scott, "*An analytical solution and sensitivity study of sublimation-dehydration within a porous medium with volumetric heating*", Journal of Heat Transfer, 116 (1994) 686-693.

• M. Ward, "*Thermal runaway and microwave heating in thin cylindrical domains*", IMA Journal of Applied Mathematics, 67 (2002) 177-200.

En la presente Tesis se obtienen **nuevos resultados** acerca de la existencia de solución para problemas de cambio de fase de materiales con coeficientes térmicos variables o con fuentes internas en ambas fases:

1) un problema de Stefan a dos fases con conducción de calor no lineal para materiales de tipo Storm. Se consideran dos casos relacionados, uno de ellos con condición de flujo del tipo $-q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$ en el borde fijo $x = 0$ y el otro con condición de temperatura. En el primer caso se demuestra existencia y unicidad de solución cuando q_0 satisface cierta desigualdad que generaliza el trabajo [D. A. Tarzia "*An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math., 39 (1981) 491-497], bajo hipótesis de coeficientes térmicos constantes. En el segundo caso estudiado se prueba existencia y unicidad para cualquier valor de los datos iniciales del problema.

Estos resultados fueron publicados en Journal of Phsysics A: Mathematical and General, 33 (2000) 395-404.

2) un problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura y un término convectivo. En el borde fijo $x = 0$ se impone una condición de temperatura constante o una condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$. En ambos casos se obtiene una representación paramétrica de la solución del tipo similaridad.

Estos resultados fueron publicados en International Journal of Engineering Science, 41 (2003) 1685-1698.

3) un problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura

y con temperatura constante o condición de flujo de la forma $-q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$ **en el borde fijo** $x = 0$. En ambos casos se obtienen condiciones suficientes sobre los datos iniciales del problema para obtener una representación paramétrica de la solución de tipo similaridad para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario positivo. Estas soluciones explícitas se obtienen a través de la única solución de una ecuación integral con el tiempo como parámetro.

Estos resultados fueron recientemente aceptados para su publicación en el Bollettino della Unione Matematica Italiana.

4) un problema de Stefan unidimensional a dos fases con fuente de calor en el interior en las fases sólida y líquida para un material semi-infinito. Se considera una temperatura inicial negativa y en el borde fijo $x = 0$ se estudian los casos con temperatura positiva o con condición de flujo del tipo $-q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$. Las funciones que describen las fuentes de calor interno están dadas por $g_j(x,t) = \dfrac{\rho l}{t}\beta_j\left(\frac{x}{2a_j\sqrt{t}}\right)$ $(j = 1$ fase sólida; $j = 2$ fase líquida) donde $\beta_j = \beta_j(\eta)$ son funciones con ciertas propiedades de regularidad. Se obtienen soluciones explícitas para ambos problemas. Además se obtiene la equivalencia de los dos problemas de frontera libre. Finalmente, se estudia un caso particular donde β_j $(j = 1, 2)$ es del tipo exponencial dada por $\beta_j(\eta) = \exp\left(-(\eta + d_j)^2\right)$ con $d_j \in \mathbb{R}$, lo cual es interesante en procesos de sublimación-deshidratación según E. P. Scott, "*An analytical solution and sensitivity study of sublimation-dehydration within a porous medium with volumetric heating*", Journal of Heat Transfer, 116 (1994) 686-693.

El presente trabajo está dividido en cuatro Capítulos en los cuales se consideran los problemas planteados más arriba. En cada uno de ellos se presenta el problema, se resuelve el modelo propuesto y se exhibe la solución y la conclusión del mismo.

En el **Capítulo 1** se detalla el problema 1) :

Se considera un problema de Stefan a dos fases para una región semi-infinita $x > 0$ con temperatura de cambio de fase T_f. Se debe determinar la evolución de la frontera libre $x = X(t)$ y la temperaturas en ambas fases.

La modelización de este tipo de sistemas es un problema de gran impotancia matemática e industrial. Los problemas con cambio de fase aparecen frecuentemente en procesos industriales y en otros de interés tecnológico.

Aquí, se considera un proceso con cambio de fase (problema de Stefan) para una ecuación de conducción del calor no lineal que admite una clase de soluciones exactas análogas a la clásica solución de tipo Neumann [G. Lamé - B. P. Clapeyron, *"Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide Annales chimie Physique"*, 47 (1831) 250-256].

En este trabajo se usa el método de similaridad para encontrar una solución exacta al problema de frontera libre.

En [C. Rogers, "*Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*", J. Phys. A: Math. Gen, 18 (1985) 105-109] se considera el siguiente problema de frontera libre (proceso de fusión)

$$\rho c_{p_1}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right) \ , \ X(t) < x < \infty \ , \ t > 0 \tag{1}$$

$$k_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x} - k_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x} = L\rho \overset{\bullet}{X} \ , \ \ x = X(t) \tag{2}$$

$$T_1 = T_2 = T_f \quad , \ x = X(t) \tag{3}$$

$$\rho c_{p_2}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right) \ , \ 0 < x < X(t) \ , \ t > 0 \tag{4}$$

$$T_1(x,0) = T_0 < T_f \tag{5}$$

$$X(0) = 0 \tag{6}$$

$$k_2\left(T_2(0,t)\right)\frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} \ , \ q_0 > 0 \ , \ \ t > 0 \tag{7}$$

donde
$T_i(x,t), i = 1,2$: distribución de la temperatura en ambas fases, sólida y líquida respectivamente en el material semi-infinito $x > 0$ en el tiempo t
x : variable espacial
t : variable temporal
$X(t)$: frontera libre
ρ : densidad constante del medio
T_f : temperatura de cambio de fase
T_0 : temperatura inicial constante
$c_{p_i}(T_i), i = 1,2$: calor específico en las dos fases, sólida y líquida respectivamente
$k_i(T_i)$, $i = 1,2$: conductividad térmica en las dos fases, sólida y líquida respectivamente

L : al calor latente de fusión del medio
$-\frac{q_0}{\sqrt{t}}$: flujo de calor sobre el borde fijo $x = 0$
T_0 : temperatura inicial del medio.

El problema de Stefan a dos fases con conducción del calor lineal, coeficientes térmicos constantes y flujo de calor del tipo (7) fue estudiado en [D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math., 39 (1981) 491-497]. Se probó que para que ocurra un proceso de cambio de fase es necesario y suficiente que se verifique una cierta desigualdad para el coeficiente q_0.

Este trabajo se realiza para materiales para los cuales existen constantes positivas $K_i, \ i = 1, 2$ tales que

$$K_i \frac{\Phi_i'}{\Phi_i^2} = k_i(T_i) \qquad , \qquad i = 1, 2 \qquad , \qquad K_i > 0 \tag{8}$$

donde

$$\Phi_i(T_i) = \int_{T_{0i}}^{T_i} S_i(\sigma)\ d\sigma \qquad , \qquad S_i(T_i) = \rho c_{p_i}(T_i) \qquad i = 1, 2\ . \tag{9}$$

Se demuestra que si se cumple la condición (8) entonces $k_i(T_i)$ y $S_i(T_i)$ verifican la siguiente relación de Storm

$$\frac{1}{\sqrt{k_i(T_i) S_i(T_i)}} \frac{d}{dT_i} \left(log \sqrt{\frac{S_i(T_i)}{k_i(T_i)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{K_i}} \qquad , \qquad i = 1, 2\ . \tag{10}$$

Dicha condición fue originalmente obtenida por [M. L. Storm, *"Heat conduction in simple metals"*, J. Appl. Physics 22 (1951) 940-951] en una investigación de conducción del calor en metales monoatómicos simples. Así, la validez de la aproximación (10) fue examinada para aluminio, plata, sodio, zinc, cobre y plomo.

El objetivo de este trabajo es complementar el de C. Rogers citado anteriormente y demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema

$(1)-(7)$ si y solo si la constante positiva q_0 es suficientemente grande, es decir,

$$q_0 > \sqrt{K_2}G^{-1}\left(\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\frac{1}{\left(\frac{\Phi_1(T_f)}{\Phi_1(T_0)}-1\right)}\right) \tag{11}$$

donde $G^{-1}:(1,+\infty)\longmapsto(0,+\infty)$ es la función inversa de G con

$$G(x)=\operatorname{erf}(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp(-x^2)}{x} \qquad , \qquad x>0. \tag{12}$$

La función G fue definida en [A. C. Briozzo - M. F. Natale - D. A. Tarzia, ”*Determination of unknown thermal coefficients for Storm's-type materials through a phase-change process*”, Int. J. Non-Linear Mech., 34 (1999) 324-340] y se probó que

$$G(0^+)=+\infty \qquad , \qquad G(+\infty)=1 \qquad \text{y} \qquad G'(x)<0 \quad \forall x>0. \tag{13}$$

La desigualdad (11) para el coeficiente q_0 generaliza la correspondiente desigualdad que fue obtenida para coeficientes térmicos constantes en el trabajo de D. A. Tarzia citado previamente.

Luego se considera el problema $(1)-(6)$ y la condición de flujo (7) se reemplaza por la siguiente condición de temperatura

$$T_2(0,t)=T_m>T_f \ . \tag{14}$$

sobre el borde fijo.

Se prueba la existencia y unicidad de solución del problema $(1)-(6)$ y (14) para cualquier valor de los datos iniciales del problema.

El **Capítulo 2** está referido al problema 2).

Se considera un problema de Stefan para una región semi-infinita $x>0$.

Se debe determinar la evolución de la frontera libre $x=s(t)$ y la distribución de la temperatura $\theta(x,t)$.

Aquí se considera un proceso a una fase para una ecuación de conducción de calor no lineal con término convectivo.

Continuando con el trabajo [C. Rogers - P. Broadbridge, *”On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of reciprocal* *transformation*", Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 39 (1988) 122-129] se considera el siguiente problema de frontera libre (proceso de solidificación)

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta, x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - v(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x} \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \tag{15}$$

$$k(\theta(0,t),0)\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} \ , \ q_0 > 0 \ , \ t > 0 \tag{16}$$

$$k\left(\theta\left(s(t),t\right), s(t)\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\left(s(t),t\right) = \rho l \ \dot{s}(t) \ , \ t > 0 \tag{17}$$

$$\theta\left(s(t),t\right) = 0 \ , \ t > 0 \tag{18}$$

$$s(0) = 0 \tag{19}$$

donde la conductividad térmica $k(\theta, x)$ y la velocidad $v(\theta)$ están dadas por

$$v(\theta) = \rho c \frac{d}{2\left(a + b\theta\right)^2} \tag{20}$$

$$k(\theta, x) = \rho c \frac{1 + dx}{\left(a + b\theta\right)^2} \tag{21}$$

donde

$\theta(x,t)$: distribución de temperatura en el material semi-infinito,
q_0 : coeficiente que caracteriza el flujo de calor sobre el borde fijo,
x : variable espacial,
t : tiempo,
$s(t)$: frontera libre (posición de la interfase),
c : calor específico por unidad de masa ,
ρ : densidad de masa,
k : conductividad térmica,
l : calor latente de fusión por unidad de masa,
v : velocidad,
a, b, d : constantes positivas (parámetros) tales que $a + b\theta_f > 0$.

Estos tipos de conductividad térmica no lineal y de coeficientes de difusión fueron considerados en numerosos trabajos. La ecuación de transporte no lineal (15) surge relacionada con el flujo no saturado en medios porosos heterogéneos. Si se toma $d = 0$ y $b = 0$ en el problema de frontera libre $(15)-(19)$ entonces se obtiene el clásico problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a una fase. La primera solución explícita para el problema de Stefan a una fase fue dada en [G. Lamé - B. P. Clapeyron, *"Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide"* Annales chimie Physique, 47 (1831) 250-256]. Aquí con $q_0/\sqrt{t}$ notamos al flujo de calor en el borde $x = 0$ que es del tipo impuesto en [D. A. Tarzia, *"An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem"*, Quart. Appl. Math., 39 (1981) 491-497].

El objetivo de este trabajo es determinar que condiciones deben cumplir los parámetros del problema (en particular q_0) para obtener un proceso de cambio de fase instantáneo. También se continúa y complementa el trabajo de C. Rogers y P. Broadbridge citado anteriormente, probando la existencia de una solución explícita al problema $(15)-(19)$ con coeficientes no lineales (20) y (21) cualesquiera sean los datos q_0, ρ, c, l, a, b, d . Más aún, esta solución está dada como una función que depende de un parámetro γ^*, el cual es la única solución de una ecuación trascendental. Además, si se reemplaza la condición de flujo por una nueva condición de temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$ también se obtiene la existencia de solución cualesquiera sean los datos.

En ambos casos, la solución explícita está dada en forma paramétrica y tiene una representación del tipo similaridad.

En el **Capítulo 3** se considera el problema 3) .

Se considera un problema de cambio de fase (problema de Stefan) para una ecuación del calor no lineal para una región semi-infinita $x > 0$ con conductividad térmica no lineal $k(\theta)$ dada por

$$k(\theta) = \frac{\rho c}{(a + b\theta)^2} \tag{22}$$

y temperatura de cambio de fase θ_f. Este tipo de conductividad térmica o coeficiente de difusión fue considerado en numerosos trabajos científicos.

La formulación matemática de este problema de frontera libre (proceso de fusión) consiste en determinar la evolución de la frontera libre $x = s(t)$ y la distribución de la temperatura $\theta = \theta(x,t)$ satisfaciendo las condiciones

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \tag{23}$$

$$k(\theta(0,t))\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}\,,\ q_0 > 0\ ,\ t > 0 \tag{24}$$

$$k\left(\theta\left(s(t),t\right)\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(s(t),t\right) = -\rho l\ \dot{s}(t)\ ,\ t > 0 \tag{25}$$

$$\theta\left(s(t),t\right) = \theta_f\ ,\ t > 0 \tag{26}$$

$$s(0) = 0 \tag{27}$$

donde

$\theta(x,t)$: distribución de temperatura en el material semi-infinito,
q_0 : coeficiente que caracteriza el flujo de calor sobre el borde fijo,
x : variable espacial,
t : tiempo,
$s(t)$: frontera libre (posición de la interfase),
c : calor específico por unidad de masa ,
ρ : densidad de masa,
k : conductividad térmica,
l : calor latente de fusión por unidad de masa,
θ_f : temperatura de cambio de fase,
a, b, d : constantes positivas (parámetros) tales que $a + b\theta_f > 0$.

Aquí $-q_0/\sqrt{t}$ caracteriza al flujo de calor sobre el borde $x = 0$; luego se considerará temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$ del tipo $\theta(0,t) = \theta_0$. En [D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math., 39 (1981) 491-497] se probó que la condición de flujo de calor (24) sobre el borde fijo $x = 0$ es equivalente a la condición de temperatura constante en el borde fijo $x = 0$ para el problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito con coeficientes térmicos constantes en ambas fases. Otros problemas de este tipo pueden encontrarse en:

• A. C. Briozzo - M. F. Natale - D. A. Tarzia, "*Determination of unknown thermal coefficients for Storm's-type materials through a phase-change process*", Int. J. Non-Linear Mech., 34 (1999) 324-340,

• M. F. Natale - D. A. Tarzia, "*Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials*", J. Phys. A: Math. Gen, 33 (2000) 395-404,

• C. Rogers, "*Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*", J. Phys. A: Math. Gen, 18 (1985) 105-109,

• C. Rogers, "*On a class of moving boundary problems in non-linear heat condition: Application of a Bäcklund transformation*", Int. J. Non-Linear Mech., 21 (1986) 249-256.

El problema de frontera libre $(23)-(27)$ con $k(\theta)$ definido por (22) es un caso particular del presentado en el capítulo 2 tomando el parámetro $d=0$ para la siguiente ecuación

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - v(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\ ,\ 0<x<s(t)\ ,\ t>0 \tag{28}$$

donde la conductividad térmica $k(\theta)$ y el término de velocidad $v(\theta)$ está dado por (22) y

$$v(\theta) = \rho c \frac{d}{2\left(a+b\theta\right)^2} \tag{29}$$

respectivamente, y c, ρ y l son el calor específico, la densidad y el calor latente de fusión del medio respectivamente, además se supone que todos ellos son constantes y los parámetros a, b y d positivos y constantes.

En dicho capítulo se encuentran condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución explícita. Aquí se estudia el caso sin término de velocidad, i.e. $d=0$ en la ecuación diferencial (28), el cual no puede obtenerse del caso estudiado previamente en para el caso $d \neq 0$. En aquel problema se definió la transformación

$$y = \frac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \tag{30}$$

la cual es la identidad si se toma $d \to 0$ pues

$$\lim_{d\to 0} \frac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = x\ ,\ \forall\ x>0.$$

Por lo tanto, el caso $d=0$ debe resolverse usando otras técnicas, lo cual será realizado en este capítulo.

Luego se prueba la existencia y unicidad de una solución explícita del tipo similaridad para el problema de frontera libre $(23)-(27)$ para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f > bl/c$. También se obtiene una solución explícita para el caso $a + b\theta_f = bl/c$. Dichas soluciones se obtienen a través de la única solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro.

Además, para el caso $a + b\theta_f < bl/c$ no existe solución al problema de frontera libre $(23) - (27)$.

Luego se reemplaza la condición de flujo (24) por una condición de temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$. Se prueba la existencia y unicidad de una solución explícita del tipo similaridad del problema $(23), (25) - (27)$ y $\theta(0,t) = \theta_0$ para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario y positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f \geq bl/c$. Dichas soluciones se obtienen a través de la única solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro. También se demuestra para el caso $a + b\theta_f < bl/c$ la existencia de al menos una solución.

En el **Capítulo 4** se considera el siguiente problema de Stefan a dos fases (proceso de fusión) para un material semi-infinito

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x,t) = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_2} g_2(x,t), \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0; \tag{31}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x,t) = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_1} g_1(x,t), \qquad x > s(t), \qquad t > 0; \tag{32}$$

$$T_1(s(t),t) = T_2(s(t),t) = 0, \qquad t > 0; \tag{33}$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t),t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t),t) = \rho l \, \dot{s}(t), \qquad t > 0; \tag{34}$$

$$T_1(x,0) = T_1(+\infty,t) = -C < 0, \qquad x > 0, \qquad t > 0; \tag{35}$$

$$T_2(0,t) = B > 0, \qquad t > 0; \tag{36}$$

$$s(0) = 0. \tag{37}$$

para dos fuentes internas dadas por las expresiones

$$g_j = g_j(x,t) = \frac{\rho l}{t} \beta_j \left(\frac{x}{2a_j\sqrt{t}} \right) \qquad j = 1, 2, \tag{38}$$

donde se supone que $\beta_1(\eta) \geq 0$ y $\beta_2(\eta) \leq 0$ y además

$\beta_j = \beta_j(\eta)$: funciones integrables en $(0,\epsilon)$ $\forall \epsilon > 0$,

$\beta_j(\eta) \exp(\eta^2)$: funciones integrables en $(M, +\infty)$ $\forall M > 0$,

$B > 0$: temperatura en el borde fijo $x = 0$,

$-C < 0$: temperatura inicial y temperatura para $x \to \infty$,

l : calor latente de fusión constante por unidad de masa,
ρ : densidad de masa constante,
c_j , $j = 1, 2$: calor específico constante en las dos fases, sólida y líquida respectivamente,
k_j , $j = 1, 2$: conductividad térmica constante en las dos fases, sólida y líquida respectivamente y
$a_j^2 = k_j/\rho c_j$, para $j = 1, 2$: cuadrado de la difusividad térmica en ambas fases.

Se obtienen soluciones explícitas para el problema (31)-(37), con el particular tipo de fuentes dadas por (38) y con condición de temperatura en $x = 0$, y se dan propiedades de monotonicidad de dichas soluciones.

Luego se resuelve el problema de frontera libre con condición de flujo del tipo $-\frac{q_0}{\sqrt{t}}$ $(q_0 > 0)$ sobre el borde fijo $x = 0$, y se obtiene soluciones explícitas a este problema si el coeficiente q_0 satisface una desigualdad particular.

También se dan propiedades de monotonicidad de la solución y se demuestra la equivalencia de los dos problemas de frontera libre.

En [E. P. Scott, "*An analytical solution and sensitivity study of sublimation-dehydration within a porous medium with volumetric heating*", Journal of Heat Transfer, 116 (1994) 686-693] se consideró un medio poroso semi-infinito congelado con propiedades térmicas constantes sujeto a un proceso de sublimación-deshidratación que involucra a una fuente volumétrica de calor del tipo (38) con

$$\beta(x) = \exp\left(-(x+d)^2\right),$$

y también se llevó a cabo un estudio de sensibilidad en el cual fueron analizados los efectos de las propiedades inherentes del material en las soluciones.

En este capítulo se explicitan, para este caso particular, los resultados fundamentales obtenidos anteriormente para el caso general.

CAPITULO 1

SOLUCIONES EXPLICITAS A UN PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES PARA MATERIALES DE TIPO STORM

RESUMEN

Se utiliza una transformación recíproca para reducir el problema de Stefan a dos fases con conducción de calor no lineal en otro que admita soluciones exactas análogas a las clásicas soluciones de tipo Neumann.

El problema se considera para materiales de tipo Storm [C. Rogers, J. Phys. A: Math. Gen, **18** (1985) 105-109]. Se consideran dos casos relacionados, uno de ellos con condición de flujo del tipo $-q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$.

Se prueba existencia y unicidad de solución cuando q_0 satisface cierta desigualdad que generaliza el trabajo de D. A. Tarzia, Quart. Appl. Math., **39** (1981) 491-497, bajo hipótesis de coeficientes térmicos constantes.

Al otro caso que aquí se estudia se le impone una condición de temperatura en el borde fijo y se prueba existencia y unicidad para cualquier valor de los datos iniciales del problema.

I. INTRODUCCION.

Se considera un problema de Stefan a dos fases para una región semi-infinita $x > 0$ con temperatura de cambio de fase T_f. Se debe determinar la evolución de la frontera libre $x = X(t)$ y la temperaturas en ambas fases. La modelización de este tipo de sistemas es un problema de gran importancia matemática e industrial. Los problemas con cambio de fase aparecen frecuentemente en procesos industriales y en otros de interés tecnológico [1, 4, 7, 8, 9, 11, 14, 25].

Una larga bibliografía sobre el tema está dada en [21].

Aquí, se considera un proceso con cambio de fase (problema de Stefan) para una ecuación de conducción del calor no lineal que admite una clase de soluciones exactas análogas a la clásica solución de tipo Neumann [13].

En este trabajo se usa el método de similaridad para encontrar una solución exacta al problema de frontera libre.

Esta metodología fue utilizada en numerosos trabajos tales como [3, 4, 5, 10, 12, 17, 18, 22, 23, 24]. En todos ellos, esta metodología ha permitido obtener importantes resultados físicos.

En [15] se considera el siguiente problema de frontera libre (proceso de fusión)

$$\rho c_{p_1}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)\ ,\ X(t) < x < \infty\ ,\ t > 0 \tag{1}$$

$$k_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x} - k_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x} = L\rho \overset{\bullet}{X}\ ,\ \ x = X(t) \tag{2}$$

$$T_1 = T_2 = T_f \quad ,\ x = X(t) \tag{3}$$

$$\rho c_{p_2}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)\ ,\ 0 < x < X(t)\ ,\ t > 0 \tag{4}$$

$$T_1(x,0) = T_0 < T_f \tag{5}$$

$$X(0) = 0 \tag{6}$$

$$k_2\left(T_2(0,t)\right)\frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}\ ,\ q_0 > 0\ \ ,\ \ t > 0 \tag{7}$$

donde
$T_i(x,t), i = 1,2$: distribución de la temperatura en ambas fases, sólida y líquida respectivamente en el material
semi-infinito $x > 0$ en el tiempo t
x : variable espacial
t : variable temporal
$X(t)$: frontera libre
ρ : densidad constante del medio
T_f : temperatura de cambio de fase
T_0 : temperatura inicial constante
$c_{p_i}(T_i), i = 1,2$: calor específico en las dos fases, sólida y líquida respectivamente
$k_i(T_i),\ i = 1,2$: conductividad térmica en las dos fases, sólida y líquida respectivamente
L : al calor latente de fusión del medio
$-\frac{q_0}{\sqrt{t}}$: flujo de calor sobre el borde fijo $x = 0$
T_0 : temperatura inicial del medio.

El problema de Stefan a dos fases con conducción del calor lineal, coeficientes térmicos constantes y flujo de calor del tipo (7) fue estudiado en [20].

En dicho trabajo se probó que para que ocurra un proceso de cambio de fase es necesario y suficiente que se verifique una cierta desigualdad para el coeficiente q_0.

En este capítulo se consideran materiales para los cuales existen constantes positivas $K_i, \ i = 1, 2$ tales que

$$K_i \frac{\Phi_i'}{\Phi_i^2} = k_i(T_i) \qquad , \qquad i = 1, 2 \qquad , \qquad K_i > 0 \tag{8}$$

donde

$$\Phi_i(T_i) = \int_{T_{0i}}^{T_i} S_i(\sigma) \, d\sigma \qquad , \qquad S_i(T_i) = \rho c_{p_i}(T_i) \qquad i = 1, 2 \ . \tag{9}$$

El objetivo de este trabajo es complementar [15] y demostrar en la Sección II la existencia y unicidad de la solución del problema $(1) - (7)$ si y sólo si la constante positiva q_0 es suficientemente grande, es decir,

$$q_0 > \sqrt{K_2} G^{-1} \left(\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \frac{1}{\left(\frac{\Phi_1(T_f)}{\Phi_1(T_0)} - 1 \right)} \right) \tag{10}$$

donde $G^{-1} : (1, +\infty) \longmapsto (0, +\infty)$ es la función inversa de G con

$$G(x) = \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2)}{x} \qquad , \qquad x > 0. \tag{11}$$

La función G fue definida en [2] y se probó que

$$G(0^+) = +\infty \qquad , \qquad G(+\infty) = 1 \qquad \text{y} \qquad G'(x) < 0 \quad \forall x > 0. \tag{12}$$

La desigualdad (10) para el coeficiente q_0 generaliza la correspondiente desigualdad que fue obtenida para coeficientes térmicos constantes [20].

En la Sección III se considera el problema $(1) - (6)$ y la condición de flujo (7) se reemplaza por la siguiente condición de temperatura en el borde fijo $x = 0$

$$T_2(0, t) = T_m > T_f \ . \tag{13}$$

Cabe destacar que existe una relación entre las dos condiciones en el borde fijo $x = 0$ (7) y (13), la cual se muestra en (61) .

Se prueba la existencia y unicidad de solución del problema $(1) - (6)$ y (13) para cualquier valor de los datos iniciales del problema.

II. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON CONDICION DE FLUJO EN EL BORDE FIJO.

Se considera el problema $(1) - (7)$. Si ahora se define

$$\overline{T_i} = \Phi_i(T_i) = \int_{T_{0i}}^{T_i} \rho c_{pi}(\sigma)\, d\sigma \quad , \quad i = 1,2 \tag{14}$$

se tiene

$$\frac{\partial \overline{T_i}}{\partial t} = \rho c_{pi}(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial t} \ , \ \frac{\partial \overline{T_i}}{\partial x} = \rho c_{pi}(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial x} \quad , \quad i = 1,2$$

y reemplazando en (1) y (4) se obtiene

$$\frac{\partial \overline{T_i}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_i(T_i)}{S_i(T_i)}\frac{\partial \overline{T_i}}{\partial x}\right) \quad , \quad i = 1,2 \ ,$$

o bien

$$\frac{\partial \overline{T_i}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_i(T_i)}{\Phi_i'(T_i)}\frac{\partial \overline{T_i}}{\partial x}\right) \quad , \quad i = 1,2 \ . \tag{15}$$

Lema 1. *Si se cumple la condición* (8) *entonces* $k_i(T_i)$ *y* $S_i(T_i)$ *verifican la relación de Storm* [16]:

$$\frac{1}{\sqrt{k_i(T_i)S_i(T_i)}}\frac{d}{dT_i}\left(log\sqrt{\frac{S_i(T_i)}{k_i(T_i)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{K_i}} \qquad , \qquad i = 1,2 \ . \tag{16}$$

Demostración:

$$\frac{1}{\sqrt{k_i(T_i)S_i(T_i)}}\frac{d}{dT_i}\left(log\sqrt{\frac{S_i(T_i)}{k_i(T_i)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k_i(T_i)S_i(T_i)}}\frac{1}{2}\frac{k_i(T_i)}{S_i(T_i)}\frac{d}{dT_i}\left(\frac{S_i(T_i)}{k_i(T_i)}\right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{k_i(T_i)S_i(T_i)}}\frac{k_i(T_i)}{S_i(T_i)}\frac{d}{dT_i}\left(\frac{\Phi_i'(T_i)}{k_i(T_i)}\right)=\frac{1}{2S_i(T_i)}\sqrt{\frac{k_i(T_i)}{S_i(T_i)}}\frac{d}{dT_i}\left(\frac{\Phi_i^2(T_i)}{K_i}\right)=$$

$$\frac{1}{2S_i(T_i)}\sqrt{\frac{k_i(T_i)}{S_i(T_i)}}\frac{1}{K_i}2\Phi_i(T_i)\Phi_i'(T_i)\left(\frac{\Phi_i^2(T_i)}{K_i}\right)=$$

$$\sqrt{\frac{k_i(T_i)\Phi_i'(T_i)}{\Phi_i^2(T_i)S_i(T_i)}}\frac{1}{K_i}\Phi_i(T_i)=\sqrt{\frac{k_i(T_i)}{\Phi_i^2(T_i)}}\frac{1}{K_i}\Phi_i(T_i)=\frac{1}{\sqrt{K_i}},\ i=1,2.\blacksquare$$

Observación 1. *Dicha condición fue originalmente obtenida por Storm [19] en una investigación de conducción del calor en metales monoatómicos simples. Así, la validez de la aproximación* (16) *fue examinada para aluminio, plata, sodio, zinc, cobre y plomo.*$\blacksquare$

Lema 2. *Si es válida la condición* (8) *entonces la ecuación de conducción del calor en ambas fases se reduce a la forma*

$$\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial t}-K_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\overline{T_i}^2}\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial x}\right)=0 \qquad , \qquad i=1,2\ . \tag{17}$$

Demostración.

$$\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_i(T_i)}{\Phi_i'(T_i)}\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial x}\right) \qquad i=1,2 \iff$$

$$\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_i\frac{\Phi_i'(T_i)}{\Phi_i^2(T_i)\Phi_i'(T_i)}\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial x}\right) \qquad i=1,2 \iff$$

$$\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_i}{\Phi_i^2(T_i)}\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial x}\right) \qquad i=1,2 \iff (17)\ .\blacksquare$$

En lo que sigue se propone una solución de semejanza para el problema $(1)-(7)$, obteniéndose el siguiente teorema:

Teorema 1. *Si se define*

$$\xi=\frac{x}{X(t)} \tag{18}$$

y se buscan soluciones de tipo similaridad, es decir

$$\overline{T_i}\,(x,t) = \varphi_i \left(\frac{x}{X(t)} \right) = \varphi_i\,(\xi) \qquad i = 1,2\ \ , \tag{19}$$

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 = \displaystyle\int_{\xi_1^*|\xi_1=1}^{\xi_1^*} \varphi_1^* d\xi_1^* + 1 \ \ \text{para } x > X(t) \\[2em] \xi = \xi_2 = \displaystyle\int_{\xi_2^*|\xi_2=0}^{\xi_2^*} \varphi_2^* d\xi_2^* \ \ \text{para} \ \ 0 < x < X(t) \\[2em] \varphi_i^* = \dfrac{1}{\varphi_i} \quad i = 1,2 \quad , \end{cases} \tag{20}$$

se tiene que las temperaturas T_1 y T_2 están dadas por

$$T_1 = \Phi_1^{-1} \left\{ A_1 \operatorname{erf} \left[\left(\frac{\gamma}{2K_1} \right)^{\frac{1}{2}} \xi_1^* \right] + B_1 \right\}^{-1} \tag{21}$$

$$\xi_1 = 1 + \int_{\lambda_1}^{\xi_1^*} \left\{ A_1 \operatorname{erf} \left[\left(\frac{\gamma}{2K_1} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right] + B_1 \right\} d\sigma \tag{22}$$

$$T_2 = \Phi_2^{-1} \left\{ A_2 \operatorname{erf} \left[\left(\frac{\gamma}{2K_2} \right)^{\frac{1}{2}} \xi_2^* \right] + B_2 \right\}^{-1} \tag{23}$$

$$\xi_2 = \int_{-\sqrt{2/\gamma q_0}}^{\xi_2^*} \left\{ A_2 \operatorname{erf} \left[\left(\frac{\gamma}{2K_2} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma \right] + B_2 \right\} d\sigma\ , \tag{24}$$

donde Φ_i está dada por (14) y las incógnitas γ, A_i, B_i, λ_i ($i = 1,2$) deben verificar el siguiente sistema de ecuaciones (c.f. [15])

$$A_1 \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}} \lambda_1 \right) + B_1 = \frac{1}{\Phi_1(T_f)} \tag{25}$$

$$A_1 + B_1 = \frac{1}{\Phi_1(T_0)} \tag{26}$$

$$A_2 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2\right) + B_2 = \frac{1}{\Phi_2(T_f)} \tag{27}$$

$$\sqrt{\frac{K_2}{\pi}} A_2 \exp\left(\frac{-q_0^2}{K_2}\right) = q_0 \left(A_2 \operatorname{erf}\left(\frac{-q_0}{\sqrt{K_2}}\right) + B_2\right) \tag{28}$$

$$\lambda_1 = L\rho + \Phi_1(T_f) - \Phi_2(T_f) + \lambda_2 \tag{29}$$

$$1 = \int_{-\sqrt{2/\gamma}q_0}^{\lambda_2} A_2 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\sigma\right) d\sigma + B_2 \left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{2}{\gamma}} q_0\right) \tag{30}$$

$$-A_1\Phi_1(T_f)\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_1}\lambda_1^2\right) + A_2\Phi_2(T_f)\sqrt{\frac{2K_2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_2}\lambda_2^2\right) = L\rho\sqrt{\gamma} \tag{31}$$

donde

$$\lambda_1 = \xi_1^* \,|_{\xi=1} \qquad , \qquad \lambda_2 = \xi_2^* \,|_{\xi=1} \ , \tag{32}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-u^2\right) du \ , \tag{33}$$

y la frontera libre está dada por

$$X(t) = \sqrt{2\gamma t} \tag{34}$$

con $\gamma > 0$ *parámetro adimensional desconocido.*

Demostración. De (14) y (20) se tiene que

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = \frac{1}{\Phi_i'(T_i)} \varphi_2'(\xi) \frac{1}{X(t)} \ . \tag{35}$$

Utilizando (8) y (35) en (2) se tiene

$$k_1(T_1)\frac{1}{\Phi_1'(T_f)}\varphi_1'(1)\frac{1}{X(t)} - k_2(T_2)\frac{1}{\Phi_2'(T_f)}\varphi_2'(1)\frac{1}{X(t)} = L\rho \dot{X}(t) \Leftrightarrow$$

$$K_1 \frac{\varphi_1'(1)}{\Phi_1^2(T_f)} - K_2 \frac{\varphi_2'(1)}{\Phi_2^2(T_f)} = L\rho X(t) \dot{X}(t)$$

entonces $X(t)\overset{\bullet}{X}(t)$ debe ser constante, luego

$$X(t)=\sqrt{2\gamma t}\quad,\quad\gamma>0\ . \tag{36}$$

De (19) y (36) se tiene

$$\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial x}=\varphi_i^{'}(\xi)\,\frac{1}{\sqrt{2\gamma t}}\quad\text{y}\quad\frac{\partial\overline{T_i}}{\partial t}=\varphi_i^{'}(\xi)\,\frac{x}{\sqrt{2\gamma}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t^{3/2}}\quad,$$

y reemplazando en (17) se tiene

$$\varphi_i(\xi)\,\xi\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t}-K_i\frac{1}{\sqrt{2\gamma t}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\varphi_i^{2}(\xi)}\varphi_i^{'}(\xi)\,\frac{1}{\sqrt{2\gamma t}}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\varphi_i'(\xi)\,\frac{\xi}{2}+\frac{K_i}{2\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi_i^{'}(\xi)}{\varphi_i^{2}(\xi)}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\gamma\xi\varphi_i'(\xi)+K_i\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi_i^{'}(\xi)}{\varphi_i^{2}(\xi)}\right)=0\quad,\quad i=1,2\ . \tag{37}$$

Teniendo en cuenta (20) se tiene

$$\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}=-\frac{d\varphi_i}{d\xi_i}\frac{1}{\varphi_i^2}\varphi_i^*=\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d}{d\xi_i}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\right)\Longrightarrow$$

$$\frac{\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}}{\varphi_i^*}=\frac{-\frac{d\varphi_i}{d\xi_i}}{\varphi_i^2}\Longrightarrow\frac{d\varphi_i}{d\xi_i}=\frac{-\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}}{\varphi_i^*}\frac{1}{\varphi_i^{*2}}\Longrightarrow\frac{d\varphi_i}{d\xi_i}=\frac{d}{d\xi_i^*}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\right)\frac{1}{\varphi_i^*}$$

y entonces si se reemplaza en (37) se obtiene

$$\gamma\xi\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d}{d\xi_i^*}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\right)+K_i\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d}{d\xi_i^*}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\right)\frac{1}{\varphi_i^{2}(\xi)}\right)=0\Longleftrightarrow$$

$$\gamma\xi\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d}{d\xi_i^*}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\right)+K_i\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{-\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}}{\varphi_i^*}\right)=0\Longleftrightarrow$$

$$\gamma\xi\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d}{d\xi_i^*}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\right)+K_i\frac{d}{d\xi_i^*}\left(-\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}\right)\frac{d\xi_i^*}{d\xi_i}=0 \Longleftrightarrow$$

$$K_i\frac{d}{d\xi_i^*}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}\right)=\gamma\xi\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d}{d\xi_i^*}\left(\frac{1}{\varphi_i^*}\right) \Longleftrightarrow$$

$$K_i\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}=\gamma\xi\frac{1}{\varphi_i^*}-\int_0^{\xi_i^*}\frac{1}{\varphi_i^*}\gamma\frac{d\xi}{d\xi_i^*}d\xi_i^* \Longleftrightarrow$$

$$K_i\frac{1}{\varphi_i^*}\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}=\gamma\left(\frac{\xi}{\varphi_i^*}-\xi_i^*\right) \Longleftrightarrow$$

$$K_i\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}=\gamma\left(\xi-\xi_i^*\varphi_i^*\right) \quad , \quad i=1,2. \tag{38}$$

Derivando esta última expresión con respecto a ξ_i^* se tiene

$$K_i\frac{d^2\varphi_i^*}{d\xi_i^{*2}}-\gamma\frac{d\xi_i}{d\xi_i^*}+\gamma\left(\varphi_i^*+\xi_i^*\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}\right)=0 \quad , \quad i=1,2 \Longleftrightarrow$$

$$K_i\frac{d^2\varphi_i^*}{d\xi_i^{*2}}+\gamma\xi_i^*\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}=0 \quad , \quad i=1,2 \tag{39}$$

La solución de (39) es

$$\varphi_i^*=A_i\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_i}}\xi_i^*\right)+B_i \quad , \quad i=1,2 \tag{40}$$

y teniendo en cuenta (14) y (19) se tiene (21) y (23).

Teniendo en cuenta (20) y (32), las ecuaciones (25) y (27) se obtienen de (3) inmediatamente.

Veamos ahora como se transforma (7). Por (14) y (20) se tiene que

$$\frac{\partial\overline{T_2}}{\partial x}=\Phi_2'(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\Longrightarrow\frac{\partial T_2}{\partial x}=\frac{1}{\Phi_2'(T_2)}\frac{\partial\overline{T_2}}{\partial x}\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}=\frac{1}{\Phi_2'(T_2)}\varphi_2'(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\gamma t}} \tag{41}$$

Además, si se reemplaza este último resultado y la condición (8) en (7) se obtiene

$$K_2\frac{\Phi_2'(T_2)}{\Phi_2^2(T_2)}\frac{1}{\Phi_2'(T_2)}\varphi_2'(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\gamma t}}=-\frac{q_0}{\sqrt{t}} \quad , \quad \xi=0$$

$$K_2 \varphi_2^{*2}(\xi_2^*)\, \varphi_2'(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} = -q_0 \quad , \quad \xi = 0$$

$$K_2 \varphi_2^{*2}(\xi_2^*) \frac{d\varphi_2^*}{d\xi_2^*}(\xi_2^*) \frac{(-1)}{\varphi_2^{*3}(\xi_2^*)} = -q_0 \sqrt{2\gamma} \quad , \quad \xi = 0$$

$$K_2 \frac{d\varphi_2^*}{d\xi_2^*}(\xi_2^*) = q_0 \sqrt{2\gamma} \varphi_2^*(\xi_2^*) \quad , \quad \xi_2^* |_{\xi=0} \tag{42}$$

Es de interés calcular $\xi_2^* |_{\xi=0}$, para ello se considera (38) y (42). Igualando ambas ecuaciones se tiene

$$\gamma(\xi - \xi_2^* \varphi_2^*) = q_0 \sqrt{2\gamma} \varphi_2^*(\xi_2^*) \quad , \quad \xi_2^* |_{\xi=0}$$

entonces

$$-\gamma \xi_2^* = q_0 \sqrt{2\gamma} \quad , \quad \xi_2^* |_{\xi=0}$$

y luego

$$\xi_2^* |_{\xi=0} = -\sqrt{\frac{2}{\gamma}} q_0 \tag{43}$$

Reemplazando este valor de ξ_2^* en (42) se tiene

$$K_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} A_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_2} \frac{2}{\gamma} q_0^2\right) \sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}} = \sqrt{2\gamma} q_0 \left(A_2 \operatorname{erf}\left(-\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) + B_2\right) \ ,$$

la cual es equivalente a (28).

Se sabe que

$$\overline{T_i} = \Phi_i(T_i) = \varphi_i(\xi) = \frac{1}{\varphi_i^*(\xi_i^*)}$$

entonces (5) se puede reescribir del siguiente modo

$$\frac{1}{\Phi_1(T_0)} = A_1 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}} \xi_1^* |_{\xi \to +\infty}\right) + B_1 \ . \tag{44}$$

Además,

$$\frac{d\xi_1}{d\xi_1^*} = \varphi_1^*(\xi_1^*) = \frac{1}{\varphi_1(\xi_1)} \Longrightarrow \varphi_1(\xi_1)\, d\xi_1 = d\xi_1^* \Longrightarrow$$

$$\int_{\xi_1=1}^{\xi_1} \varphi_1(\xi_1)\, d\xi_1 = \xi_1^* - \xi_1^* \Big|_{\xi_1=1} \quad ,$$

entonces para $\xi_1 \to +\infty$, como $\varphi_1 > 0$, se tiene que $\xi_1^* \to +\infty$ entonces $\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\xi_1^* \,|_{\xi \to +\infty}\right) = 1$ y teniendo en cuenta (44) se tiene (26).

Si se utiliza (8) y (41) en la condición de interfase (2) se deduce que

$$k_1(T_1)\frac{\varphi_1'(\xi)}{\Phi_1'(T_1)}\frac{1}{\sqrt{2\gamma t}} - k_2(T_2)\frac{\varphi_2'(\xi)}{\Phi_2'(T_2)}\frac{1}{\sqrt{2\gamma t}} = L\rho\frac{\sqrt{2\gamma}}{2\sqrt{t}}\ ,\ x = X(t)$$

$$K_1\frac{\varphi_1'(\xi)}{\Phi_1^2(T_1)} - K_2\frac{\varphi_2'(\xi)}{\Phi_2^2(T_2)} = L\rho\gamma\ ,\ \xi = 1\ . \tag{45}$$

Como

$$\varphi_i'(\xi) = -\frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*}\frac{1}{\varphi_i^{*3}} \ \text{ y } \ \Phi_i(T_i) = \frac{1}{\varphi_i^*(\xi_i^*)} \quad ,$$

(45) puede reescribirse:

$$-K_1\frac{d\varphi_1^*}{d\xi_1^*}\frac{1}{\varphi_1^{*3}\Phi_1^2} + K_2\frac{d\varphi_2^*}{d\xi_2^*}\frac{1}{\varphi_2^{*3}\Phi_2^2} = L\rho\gamma\ ,\ \xi = 1\ ,$$

o bien,

$$K_2\frac{d\varphi_2^*}{d\xi_2^*}\frac{1}{\varphi_2^*} - K_1\frac{d\varphi_1^*}{d\xi_1^*}\frac{1}{\varphi_1^*} = L\rho\gamma\ ,\ \xi = 1\ , \tag{46}$$

y utilizando (38)

$$\gamma(\xi_2 - \xi_2^*\varphi_2^*)\frac{1}{\varphi_2^*} - \gamma(\xi_1 - \xi_1^*\varphi_1^*)\frac{1}{\varphi_1^*} = L\rho\gamma\ ,\ \xi_i = 1\ ,\ i = 1,2 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\xi_2}{\varphi_2^*} - \xi_2^* - \frac{\xi_1}{\varphi_1^*} + \xi_1^* = L\rho\ ,\ \xi_i = 1\ ,\ i = 1,2\ \ . \tag{47}$$

Además,

$$\Phi_i(T_f) = \int_{T_{0i}}^{T_f} S_i(\sigma)\, d\sigma = \overline{T}_i(T_f) = \varphi_i\left(\frac{X(t)}{\sqrt{2\gamma t}}\right) = \varphi_i(1) = \frac{1}{\varphi_i^*(\xi_i^*)} \text{ con } \xi_i^*\Big|_{\xi_i=1} \ \ ,$$

entonces por (47) se tiene

$$\Phi_2(T_f) - \xi_2^* \big|_{\xi_2=1} - \Phi_1(T_f) + \xi_1^* \big|_{\xi_1=1} = L\rho$$

o bien

$$\Phi_2(T_f) - \Phi_1(T_f) + \lambda_1 - \lambda_2 = L\rho \ ,$$

que es equivalente a (29) definiendo λ_1 y λ_2 como en (32).

La ecuación (30) se obtiene tomando $\xi_2 = 1$ en (20) y teniendo en cuenta (32), (40) y (43).

Resta ahora encontrar la ecuación (31) que permitirá determinar γ.

Se tiene

$$\Phi_i(T_f) = \varphi_i(1) = \frac{1}{\varphi_i^*(\xi_i^* \big|_{\xi_i=1})} \text{ y } \frac{d\varphi_i^*}{d\xi_i^*} = A_i\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi K_i}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_i}\xi_i^{*2}\right) \ ,$$

entonces sustituyendo en (46) que es equivalente a (2) se tiene

$$K_2\frac{1}{\varphi_2^*}A_2\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi K_2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_2}\lambda_2^2\right) - K_1\frac{1}{\varphi_1^*}A_1\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi K_1}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_1}\lambda_1^2\right) = L\rho\gamma \ , \ \xi = 1 \ ,$$

y como $\Phi_i(T_f) = \dfrac{1}{\varphi_1^*}$ para $\xi = 1$, se obtiene (31).■

Lema 3. *La solución del sistema* (25) – (28) *está dada por:*

$$A_1 = \frac{1}{\operatorname{erf} c\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1\right)}\left(\frac{1}{\Phi_1(T_0)} - \frac{1}{\Phi_1(T_f)}\right)$$

$$B_1 = \frac{1}{\operatorname{erf} c\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1\right)}\left(\frac{1}{\Phi_1(T_f)} - \frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1\right)}{\Phi_1(T_0)}\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{\Phi_2(T_f)\left(G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2\right)\right)}$$

$$B_2 = \frac{G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right)}{\Phi_2(T_f)\left(G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2\right)\right)}$$

donde

$$\operatorname{erf} c(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad y$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2)}{x} + \operatorname{erf}(x) \;\;,\;\; x > 0. \tag{48}$$

Lema 4. *La ecuación* (30) *puede reescribirse como*

$$F(\gamma, \lambda_2) = 0 \tag{49}$$

donde

$$F(\gamma, \lambda_2) = -1 + \frac{\lambda_2}{\Phi_2\left(T_f\right)} \frac{G\left(u\left(\gamma, \lambda_2\right)\right) + m}{m + \operatorname{erf}\left(u\left(\gamma, \lambda_2\right)\right)} \;,\; \gamma > 0 \;,\; \lambda_2 > 0 \tag{50}$$

con

$$m = G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) > 1 \;\; ([2]) \qquad y \qquad u\left(\gamma, \lambda_2\right) = \sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}} \lambda_2 \tag{51}$$

y G definida en (48) *.*

Demostración. Sustituyendo los valores obtenidos para A_2 y B_2 en (30) , se obtiene

$$0 = -1 + \int\limits_{-\sqrt{2/\gamma} q_0}^{\lambda_2} A_2\left(\gamma, \lambda_2\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}} \sigma\right) d\sigma + B_2\left(\gamma, \lambda_2\right) \left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{2}{\gamma}} q_0\right)$$

$$0 = -1 + \frac{\int_{-\sqrt{2/\gamma} q_0}^{\lambda_2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}} \sigma\right) d\sigma + G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) \left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{2}{\gamma}} q_0\right)}{\Phi_2\left(T_f\right) \left(G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}} \sigma\right)\right)} \;.$$

Integrando, se tiene

$$0 = -1 + \frac{\lambda_2 G\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}} \lambda_2\right) - G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) \sqrt{\frac{2}{\gamma}} q_0 + G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) \left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{2}{\gamma}} q_0\right)}{\Phi_2\left(T_f\right) \left(G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}} \sigma\right)\right)}$$

$$0=-1+\frac{\lambda_2\left(G\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2\right)+G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right)\right)}{\Phi_2\left(T_f\right)\left(G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right)+\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\sigma\right)\right)}\ .$$

Si se define m y u como en (51) se tiene la tesis. ■

Ahora, sólo resta resolver el sistema (31) y (49) para encontrar la solución, donde λ_1 está dado por (29). Primero se estudia la ecuación (49) .

Lema 5. *La ecuación* (49) *define implícitamente una función creciente* $\lambda_2=\lambda_2(\gamma)$ *tal que* $F(\gamma,\lambda_2(\gamma))=0$. *Más aún, tenemos que* $\lambda_2(0^+)=0$ *y* $\lambda_2(+\infty)=\Phi_2(T_f)$.

Demostración. Para obtener la tesis del teorema basta aplicar el teroema de Dini. Entonces, basta ver que $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_2}(\gamma,\lambda_2)\neq 0$ para todo γ y λ_2. Se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda_2}(\gamma,\lambda_2)=\frac{1}{\Phi_2\left(T_f\right)}W\left(u\left(\gamma,\lambda_2\right),m\right) \tag{52}$$

donde

$$W(u,m)=1-\frac{2u\exp\left(-u^2\right)}{\sqrt{\pi}\left(m+\operatorname{erf}(u)\right)}-\frac{2\exp\left(-2u^2\right)}{\pi\left(m+\operatorname{erf}(u)\right)^2}\ . \tag{53}$$

Como

$$\frac{\partial W}{\partial m}(u,m)=\frac{2u\exp\left(-u^2\right)}{\sqrt{\pi}\left(m+\operatorname{erf}(u)\right)}+4\frac{\exp\left(-2u^2\right)}{\pi\left(m+\operatorname{erf}(u)\right)^3}>0\ . \tag{54}$$

entonces $W(u,m)>W(u,1)$ para todo $u\geq 0$.

Por lo tanto, es suficiente demostrar que $W(u,1)>0$.

Puede verse fácilmente que $W(0^+,1)=1-\dfrac{2}{\pi}, W(+\infty,1)=1$, y luego de tediosos cálculos se obtiene que $\dfrac{\partial W}{\partial u}(u,1)\neq 0,\forall u\geq 0$.

Entonces $0<1-\dfrac{2}{\pi}<W(u,1)<1,\forall u\geq 0$ y por lo tanto $W(u,m)>W(u,1)>0$ para todo $u\geq 0$ con lo cual se demuestra que $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_2}>0$ para todo γ y λ_2.

Además, teniendo en cuenta (50) y (51) se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma}(\gamma, \lambda_2) = \frac{-u^2}{\Phi_2(T_f)\gamma\,(m+\operatorname{erf}(u))}\sqrt{\frac{2K_2}{\gamma\pi}}\left(\frac{1}{2u^2}+1+\frac{\exp\left(-u^2\right)}{\sqrt{\pi}u\,(m+\operatorname{erf}(u))}\right) < 0\ . \tag{55}$$

Debido a que $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} > 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial \gamma} < 0$ por el teorema de Dini resulta que existe una función $\lambda_2 = \lambda_2(\gamma)$ definida implícitamente por $F\left(\gamma, \lambda_2(\gamma)\right) = 0$ para todo γ y su derivada está dada por

$$\lambda_2'(\gamma) = -\tfrac{\partial F}{\partial \gamma}/\tfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} > 0, \text{ para todo } \gamma. \blacksquare$$

Ahora reemplazando $\lambda_2 = \lambda_2(\gamma)$ en (29), tenemos el siguiente teorema

Teorema 2. *El problema de frontera libre* $(25)-(31)$ *tiene única solución si y sólo si* q_0 *verifica la desigualdad* (10).

Demostración. En el Lema 5 se vió que $\lambda_2 = \lambda_2(\gamma)$ es una función creciente, entonces por (29) $\lambda_1 = \lambda_1(\gamma)$ es creciente también. Además $\lambda_1(0^+) = L\rho + \Phi_1(T_f) - \Phi_2(T_f)$ y $\lambda_1(+\infty) = L\rho + \Phi_1(T_f)$. Finalmente, tenemos que estudiar la existencia y unicidad de solución de la ecuación (31). Teniendo en cuenta el Lema 3 la ecuación (31) puede escribirse de la siguiente manera

$$\Psi(\gamma) = L\rho\sqrt{\gamma} \qquad , \qquad \gamma > 0 \tag{56}$$

donde

$$\Psi(\gamma) = -\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}\frac{\Phi_1(T_f)-\Phi_1(T_0)}{\Phi_1(T_0)}\frac{\exp(-\frac{\gamma}{2K_1}\lambda_1^2(\gamma))}{1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1(\gamma)\right)}+\sqrt{\frac{2K_2}{\pi}}\frac{\exp(-\frac{\gamma}{2K_2}\lambda_2^2(\gamma))}{m+\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2(\gamma)\right)}. \tag{57}$$

Es fácil ver que Ψ es una función decreciente tal que $\Psi(+\infty) = -\infty$. Ahora, es necesario conocer el signo de $\Psi(0^+)$ donde

$$\Psi\left(0^+\right) = \sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}\left(1-\frac{\Phi_1(T_f)}{\Phi_1(T_0)}\right) + \sqrt{\frac{2K_2}{\pi}}\frac{1}{m}\ . \tag{58}$$

De (12) [2] tenemos que

$$\Psi\left(0^{+}\right)>0 \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\frac{1}{\left(\frac{\Phi_1(T_f)}{\Phi_1(T_0)}-1\right)}>m=G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow G^{-1}\left(\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\frac{1}{\left(\frac{\Phi_1(T_f)}{\Phi_1(T_0)}-1\right)}\right)<G^{-1}(m)=\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow q_0>\sqrt{K_2}G^{-1}\left(\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\frac{1}{\left(\frac{\Phi_1(T_f)}{\Phi_1(T_0)}-1\right)}\right), \tag{59}$$

que es la desigualdad (10). Resumiendo, si la condición (10) vale, entonces Ψ es una función decreciente tal que $\Psi\left(0^{+}\right)>0$ y $\Psi(+\infty)=-\infty$, entonces existe un único valor γ el cual satisface la ecuación trascendental (56) .■

Luego, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3. *El problema* $(1)-(7)$ *tiene una única solución del tipo Neumann si y solo si el coeficiente* q_0 *verifica la desigualdad* (10)*. En este caso la solución está dada por* $(18),(19),(21)-(24)$*, donde* A_i *y* B_i *para* $i=1,2$ *están dados por el Lema 3,* $\lambda_2=\lambda_2(\gamma)$ *dada por el Lema 5,* $\lambda_1=\lambda_1(\gamma)$ *dada por* (29) *y* γ *es la única solución de la ecuación* (56)*.*

El Teorema 2 nos muestra que cuando el coeficiente del flujo de calor entrante q_0 tiene una cota inferior del tipo (10) obtenemos un proceso de cambio de fase instantáneo.

Por el contrario, si q_0 no verifica (10) entonces tenemos solamente un problema de conducción del calor para la fase sólida inicial.

En el caso que q_0 verifique la desigualdad (10), podemos calcular la temperatura sobre el borde fijo $x=0$. Esta temperatura está dada por

$$T_2(0,t)=\Phi_2^{-1}\left(\frac{q_0\sqrt{\pi}\Phi_2(T_f)}{\sqrt{K_2}}\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2(\gamma)\right)+G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right)}{\exp\left(-\frac{q_0^2}{K_2}\right)}\right), \tag{60}$$

y satisface la condición $T_2(0,t) > T_f$, $\forall t > 0$.

Por lo tanto, podemos considerar el problema $(1) - (6)$ y (13). En la próxima sección se probará que este nuevo problema matemático tiene una solución del tipo similaridad para todos los datos, con $T_2(0,t) = T_m > T_f$.

Observación 2. *Imponiendo un flujo de calor proporcional a* $t^{-1/2}$ (7), *obtenemos la condición* (13), *condición de temperatura constante en el borde fijo a través de la siguiente expresión*

$$T_m = \Phi_2^{-1}\left(\frac{q_0\sqrt{\pi}\Phi_2(T_f)}{\sqrt{K_2}} \frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2(\gamma)\right) + G\left(\frac{q_0}{\sqrt{K_2}}\right)}{\exp\left(-\frac{q_0^2}{K_2}\right)} \right) \tag{61}$$

donde γ *es la única solución de la ecuación* (56).■

Este resultado fue obtenido en [20] para coeficientes térmicos constantes en ambas fases.

Observación 3. *Para un proceso de solidificación con flujo de calor en el borde fijo proporcional a* $t^{-1/2}$ *, se puede obtener un resultado similar al del Teorema 2 (proceso de fusión).*■

III. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION PARA EL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON CONDICION DE TEMPERATURA EN EL BORDE FIJO.

Ahora, se considera el problema $(1) - (6)$ y la condición de temperatura (13) sobre el borde fijo $x = 0$. Usando $(8), (14), (18)$ y defiendo

$$\xi_1 = 1 + \int_{\xi_1^*|_{\xi_1=1}}^{\xi_1^*} \varphi_1^* \; d\xi_1^* \qquad \text{con} \qquad \varphi_1^* = \frac{1}{\varphi_1} \tag{62}$$

y

$$\xi_2 = \int_0^{\xi_2^*} \varphi_2^* \; d\xi_2^* \qquad \text{con} \qquad \varphi_2^* = \frac{1}{\varphi_2}\,, \tag{63}$$

se tiene el siguiente teorema

Teorema 4. *Las distribuciones de temperaturas T_1 y T_2 del problema* $(1)-(6),(13)$ *están dadas paramétricamente por*

$$T_1 = \Phi_1^{-1}\left\{C_1 \operatorname{erf}\left[\left(\frac{\gamma}{2K_1}\right)^{\frac{1}{2}} \xi_1^*\right] + D_1\right\}^{-1}, \tag{64}$$

$$\xi_1 = \int_{\lambda_1}^{\xi_1^*} \left\{C_1 \operatorname{erf}\left[\left(\frac{\gamma}{2K_1}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma\right] + D_1\right\} d\sigma + 1\,, \tag{65}$$

y

$$T_2 = \Phi_2^{-1}\left\{C_2 \operatorname{erf}\left[\left(\frac{\gamma}{2K_2}\right)^{\frac{1}{2}} \xi_2^*\right] + D_2\right\}^{-1}, \tag{66}$$

$$\xi_2 = \int_{0}^{\xi_2^*} \left\{C_2 \operatorname{erf}\left[\left(\frac{\gamma}{2K_2}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma\right] + D_2\right\} d\sigma \tag{67}$$

donde las incógnitas $\gamma, C_i, D_i, \lambda_i$ $(i = 1, 2)$ *deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\frac{1}{\Phi_1(T_f)} = C_1 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1\right) + D_1 \tag{68}$$

$$\frac{1}{\Phi_2(T_f)} = C_2 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2\right) + D_2 \tag{69}$$

$$\frac{1}{\Phi_1(T_0)} = C_1 + D_1 \tag{70}$$

$$\frac{1}{\Phi_2(T_m)} = D_2 \tag{71}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 + L\rho + \Phi_1(T_f) - \Phi_2(T_f) \tag{72}$$

$$1 = \int_0^{\lambda_2} C_2 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\sigma\right) d\sigma + D_2\lambda_2 \tag{73}$$

$$-C_1\Phi_1(T_f)\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_1}\lambda_1^2\right) + C_2\Phi_2(T_f)\sqrt{\frac{2K_2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2K_2}\lambda_2^2\right) = L\rho\sqrt{\gamma} \tag{74}$$

donde λ_1 *y* λ_2 *están dadas por* (32).

Demostración. Análogamente al teorema 1 se obtiene $(64)-(70)$, (72) y (74), con constantes C_i y D_i en lugar de A_i y B_i respectivamente para $i=1,2$. También se tiene que

$$\varphi_i^* = C_i \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_i}}\xi_i^*\right) + D_i \quad , \quad i = 1,2 \ .$$

Resta entonces ver como se obtienen (71) y (73).

Para $x = 0$ se tiene $\xi = 0$ entonces

$$\varphi_2^*(0) = \frac{1}{\varphi_2(0)} = \frac{1}{\overline{T_2}(0,t)} = \frac{1}{\Phi_2(T_2(0,t))} = \frac{1}{\Phi_2(T_m)} \ .$$

Luego

$$\frac{1}{\Phi_2(T_m)} = \varphi_2^*(0) = C_2 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\ \xi_2^*|_{\xi_2=0}\right) + D_2 \ ,$$

como $\xi_2^*|_{\xi_2=0} = 0$, se tiene (71).

Por último, si se toma $\xi_2 = 1$ en (67) se obtiene (73).■

Lema 6. *La solución del sistema* $(68)-(71)$ *está dada por*

$$C_1 = \frac{1}{1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1\right)}\left(\frac{1}{\Phi_1(T_0)} - \frac{1}{\Phi_1(T_f)}\right) \ , \tag{75}$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\Phi_2(T_f)} - \frac{1}{\Phi_2(T_m)}\right)\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2\right)} \ , \tag{76}$$

$$D_1 = \frac{1}{1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1\right)}\left(\frac{1}{\Phi_1(T_f)} - \frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1\right)}{\Phi_1(T_0)}\right), \tag{77}$$

$$D_2 = \frac{1}{\Phi_2(T_m)} \ . \tag{78}$$

Lema 7. *La ecuación* (73) *puede reescribirse como*

$$H(\gamma, \lambda_2) = 0 \tag{79}$$

donde

$$H(\gamma, \lambda_2) = -1 + C_2(\gamma, \lambda_2) \int_0^{\lambda_2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\sigma\right) d\sigma + D_2\lambda_2 \quad .$$

Ahora, solo resta resolver el sistema (74) y (79) con incógnitas γ y λ_2 para encontar la solución. Primero, en forma análoga a lo hecho en la Sección II, se estudia la ecuación (79).

Lema 8. *Existe una función creciente* $\lambda_2 = \lambda_2(\gamma)$ *tal que* $H(\gamma, \lambda_2(\gamma)) = 0$ *para todo* γ.

Demostración. Basta con aplicar el teorema de Dini probando que $\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}(\gamma, \lambda_2) \neq 0$ para todo γ y λ_2. Se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}(\gamma, \lambda_2) = C_2(\gamma, \lambda_2) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2\right) +$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial \lambda_2}(\gamma, \lambda_2) \int_0^{\lambda_2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\sigma\right) d\sigma + D_2 =$$

$$= \frac{1}{\Phi_2(T_f)}\left(1 - \frac{\beta \exp(-u^2)}{\operatorname{erf}(u)}\left(u + \frac{\exp(-u^2) - 1}{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(u)}\right)\right)$$

donde $u = u(\gamma, \lambda_2)$ está dada por (51) y

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{\Phi_2(T_f)}{\Phi_2(T_m)}\right) > 0 \, . \tag{80}$$

Entonces se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}(\gamma, \lambda_2) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} > M(u) \, , \tag{81}$$

donde la función M está definida por

$$M(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)} \left(x\sqrt{\pi} + \frac{\exp(-x^2) - 1}{\operatorname{erf}(x)} \right) \quad , \quad \forall x > 0\ . \tag{82}$$

Debido a que $\beta < \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ entonces $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\beta} > \dfrac{\pi}{2}$ y como $M(0) = \frac{\pi}{4}, M(+\infty) = 0$ y $M'(x) < 0, \forall x > 0$, se obtiene que (81) vale para todo γ, λ_2.

Además

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma}(\gamma, \lambda_2) = -\frac{\beta_1 \lambda_2}{\sqrt{\pi}\gamma \operatorname{erf}(u)} \left(\left(1 - \exp(-u^2)\right) \left(\frac{1}{2u} - \frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(u)} \right) + u \exp\left(-u^2\right) \right) \tag{83}$$

donde

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\Phi_2(T_f)} - \frac{1}{\Phi_2(T_m)} \right) .$$

Es fácil ver que

$$\frac{1}{2u} - \frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(u)} > 0 \text{ entonces } \frac{\partial H}{\partial \gamma}(\gamma, \lambda_2) < 0\ . \tag{84}$$

Entonces por (81) y (84) , se obtiene que

$$\lambda_2'(\gamma) = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial \gamma}(\gamma, \lambda_2)}{\dfrac{\partial H}{\partial \lambda_2}(\gamma, \lambda_2)} > 0. \blacksquare$$

Ahora, reemplazando $\lambda_2 = \lambda_2(\gamma)$ en (72) se tiene el siguiente teorema

Teorema 5. *El problema de frontera libre* $(68)-(74)$ *tiene única solución cualquiera sean los datos iniciales del problema.*

Demostración. Los coeficientes C_i, D_i $(i = 1, 2)$ están dados por $(75)-(78)$. En el Lema 8 se obtuvo que $\lambda_2 = \lambda_2(\gamma)$ es una función creciente, entonces por (72) se obtiene que $\lambda_1 = \lambda_1(\gamma)$ es creciente también.

Finalmente , se debe estudiar la existencia y unicidad de la ecuación (74) . Teniendo en cuenta (75) y (76) , la ecuación (74) se convierte en

$$\Lambda(\gamma) = L\rho\sqrt{\gamma} \qquad , \qquad \gamma > 0 \tag{85}$$

donde la función Λ está definida por

$$\Lambda(\gamma) = -\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}\left(\frac{\Phi_1(T_f) - \Phi_1(T_0)}{\Phi_1(T_0)}\right)\frac{\exp\left(-\frac{\gamma}{2K_1}\lambda_1^2(\gamma)\right)}{\left(1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1(\gamma)\right)\right)} +$$

$$+\sqrt{\frac{2K_2}{\pi}}\left(\frac{\Phi_2(T_m) - \Phi_2(T_f)}{\Phi_2(T_m)}\right)\frac{\exp\left(-\frac{\gamma}{2K_2}\lambda_2^2(\gamma)\right)}{\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2(\gamma)\right)} \ , \ \gamma > 0 \ .$$

Para demostrar que Λ es una función decreciente se define

$$I_1(\gamma) = -\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}\left(\frac{\Phi_1(T_f) - \Phi_1(T_0)}{\Phi_1(T_0)}\right)F_1\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_1}}\lambda_1(\gamma)\right)$$

y

$$I_2(\gamma) = \sqrt{\frac{2K_2}{\pi}}\left(\frac{\Phi_2(T_m) - \Phi_2(T_f)}{\Phi_2(T_m)}\right)F_2\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2K_2}}\lambda_2(\gamma)\right)$$

donde

$$F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{1 - \mathrm{erf}(x)} \ \text{ y } \ F_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\mathrm{erf}(x)} \ , \ x > 0 \ .$$

I_1 es una función decreciente pues F_1 y λ_1 son crecientes y además $\Phi_1(T_f) > \Phi_1(T_0)$.

I_2 también resulta una función decreciente pues λ_2 es una función creciente, F_2 decrece y además $\Phi_2(T_m) > \Phi_2(T_f)$. Por lo tanto Λ es decreciente.

Además, es fácil ver que $F_1(0^+) = 1, F_1(+\infty) = +\infty, F_2(0^+) = +\infty$ y $F_2(+\infty) = 0$ entonces $\Lambda(0^+) = +\infty$ y $\Lambda(+\infty) = -\infty$. Luego existe una única solución γ de la ecuación trascendental (85) cualesquiera sean los datos iniciales del problema.■

CONCLUSION. Se obtuvo una solución del tipo similaridad, análoga a la solución clásica de tipo Neumann, correspondiente al proceso de fusión con coeficientes térmicos no lineales para materiales de tipo Storm y una condición inicial de temperatura constante T_0 menor que la temperatura de fusión T_f.

Se probó que existe una solución explícita cualesquiera sean los datos iniciales del problema cuando se impone una condición de temperatura (13) en el borde fijo $x = 0$. Si se considera la condición (7), flujo de calor proporcional a $t^{-1/2}$, entonces se obtiene la solución explícita si y sólo si el coeficiente del flujo de calor entrante q_0 tiene una cota inferior dada por (10).

Las dos condiciones de borde sobre $x = 0$ (7), con dato q_0, y (13), con dato T_m, están relacionadas a través de (61).

Más aún, todos los resultados obtenidos para el proceso de fusión con materiales de tipo pueden ser también obtenidos para un proceso de solidificación con los correspondientes datos iniciales y de borde análogos.

References

[1] V. Alexiades - A. D. Solomon ,"*Mathematical modeling of melting and freezing processes",* Hemisphere - Taylor & Francis Washington (1983).

[2] A. C. Briozzo - M. F. Natale - D. A. Tarzia , "*Determination of unknown thermal coefficients for Storm's type materials through a phase-change process",* International Journal of Non-Linear Mechanics **34** (1999) 324-340.

[3] A. C. Briozzo - D. A. Tarzia, *"An explicit solution for an instantaneous two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a particular heat flux on the fixed face",* IMA Journal of Applied mathematics **34** (1999) 324-340.

[4] G. Caginalp*, "A free boundary problem with moving source",* Advances in Applied Mathematics **5** (1984) 476-488.

[5] G. Caginalp - Y. Nishiura, *"The existence of travelling waves for phase field equations and convergence to sharp interface models in the singular limit",* Quarterly of Applied Mathematics **49** (1991) 147-162.

[6] J. R. Cannon, *The one-dimensional heat equation,* Addison - Wesley, Menlo Park, California (1984).

[7] H. S. Carslaw - J. C. Jaeger, "*Conduction of heat in solids",* Oxford University Press, London (1959).

[8] J. M. Chadam - H. Rasmussen H (Eds.), "*Free boundary problems involving solids",* Pitman Research Notes in Mathematics Series **281** Longman Essex (1993).

[9] J. Crank, *Free and moving boundary problems,* Clarendon Press Oxford (1984).

[10] J. N. Dewynne - S. D. Howison - J. R. Ockendon - W. Xie, *"Asymptotic behavior of solutions to the Stefan problem with a kinetic condition ata the free boundary",* J. Austral. Math. Soc. Ser B **31** (1989) 81-96.

[11] J. I. Diaz, M. A. Herrero, A. Liñan and J. L. Vazquez (Eds.), "*Free boundary problems: theory and applications*", Pitman Research Notes in Mathematics Series #**323,** Longman, Essex (1995).

[12] A. Fasano - M. Primicerio - D. A. Tarzia , *"Similarity soolutions in a class of thawing processes",* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **9** (1999) 1-10**.**

[13] G. Lamé and B. P. Clapeyron, "*Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide",* Annales Chimie Physique **47** (1831) 250-256.

[14] V. J. Lunardini, *Heat transfer with freezing and thawing,* Elsevier, Amsterdam (1991).

[15] C. Rogers, "*Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*", J. Phys. A: Math. Gen **18** (1985) 105-109.

[16] C. Rogers, "*On a class of moving boundary problems in non-linear heat condition: Application of a Bäcklund transformation*", Int. J. Non-Linear Mech. **21** (1986) 249-256.

[17] M. C. Sanziel - D. A. Tarzia, *"Necessary and sufficient condition to obtain n phases in a one-dimensional medium with a flux condition on the fixed face",* Mathematicae Notae **33** (1989) 25-32.

[18] A. D. Solomon - D. G. Wilson - V. Alexiades, *"Explicit solutions to phase problems",* Quart. Appl. Math. **41** (1983) 237-243.

[19] M. L. Storm, *"Heat conduction in simple metals",* J. Appl. Physics **22** (1951) 940-951.

[20] D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math. **39** (1981) 491-497.

[21] D. A. Tarzia, *A bibliography on moving - free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem,* MAT- Serie A, Rosario, #*2* (2000), with 5869 titles on the subject, 300 pages. www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)/

[22] P. Tritscher and P. Broadbridge, "*A similarity solution of a multiphase Stefan problem incorporating general non-linear heat conduction", Int.* J. Heat Mass Transfer **37** No 14 *(*1994*)* 2113-2121.

[23] J. H. Weiner, *"Transient heat conduction in multiphase media"*, Brit. J. Appl. Physics **6** (1955) 361-363.

[24] D. G. Wilson *"Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multi-phase problems"* SIAM J. Appl. Math. **35** (1978) 135-147.

[25] L. C. Wrobel and C. A. Brebbia (Eds.), *Computational methods for free and moving boundary problems in heat and fluid flow,* Computational Mechanics Publications, Southampton (1993).

CAPITULO 2

SOLUCIONES EXPLÍCITAS PARA UN PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE CON CONDUCTIVIDAD TERMICA DEPENDIENTE DE LA TEMPERATURA Y CON TERMINO CONVECTIVO.

RESUMEN

Se estudia un problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura y un término convectivo. En el borde fijo $x = 0$ se impone una condición de temperatura constante o una condición de flujo de calor del tipo $q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$. En ambos casos se obtiene una representación paramétrica de la solución del tipo similaridad.

I. INTRODUCCION

Se considera un problema de Stefan para una región semi-infinita $x > 0$ [18]. Se debe determinar la evolución de la frontera libre $x = s(t)$ y la distribución de la temperatura $\theta(x,t)$. En [29] puede encontrarse una gran cantidad de bibliografía sobre este tipo de problemas.

Aquí se considera un proceso a una fase para una ecuación de conducción de calor no lineal con término convectivo. Continuando con el trabajo [26] se considera el siguiente problema de frontera libre (proceso de solidificación)

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta,x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - v(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x} \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \tag{1}$$

$$k(\theta(0,t),0)\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} , \ q_0 > 0 \ , \ t > 0 \tag{2}$$

$$k\left(\theta\left(s(t),t\right), s(t)\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\left(s(t),t\right) = \rho l \ \dot{s}(t) \ , \ t > 0 \tag{3}$$

$$\theta\left(s(t),t\right) = 0 \ , \ t > 0 \tag{4}$$

$$s(0) = 0 \tag{5}$$

donde la conductividad térmica $k(\theta,x)$ y la velocidad $v(\theta)$ están dadas por

$$v(\theta) = \rho c \frac{d}{2\left(a + b\theta\right)^2} \tag{6}$$

$$k(\theta, x) = \rho c \frac{1 + dx}{(a + b\theta)^2} \tag{7}$$

donde

$\theta(x, t)$: distribución de temperatura en el material semi-infinito,
q_0 : coeficiente que caracteriza el flujo de calor sobre el borde fijo,
x : variable espacial,
t : tiempo,
$s(t)$: frontera libre (posición de la interfase),
c : calor específico por unidad de masa ,
ρ : densidad de masa,
k : conductividad térmica,
l : calor latente de fusión por unidad de masa,
v : velocidad,
a, b, d : constantes positivas (parámetros).

Estos tipos de conductividad térmica no lineal y de coeficientes de difusión fueron considerados en numerosos trabajos, por ejemplo [4, 7, 8, 17, 21, 23, 27]. La ecuación de transporte no lineal (1) surge relacionada con el flujo no saturado en medios porosos heterogéneos. Si se toma $d = 0$ y $b = 0$ en el problema de frontera libre $(1) - (7)$ entonces se obtiene el clásico problema de Lamé-Clapeyron-Stefan a una fase. La primera solución explícita para el problema de Stefan a una fase fue dada en [18]. Aquí con $q_0/\sqrt{t}$ notamos al flujo de calor en el borde $x = 0$ que es del tipo impuesto en [28]. Este tipo de flujo de calor sobre el borde fijo $x = 0$ fue también considerado en muchos problemas aplicados, por ejemplo [3, 12, 22].

El objetivo de este trabajo es determinar que condiciones deben cumplir los parámetros del problema (en particular q_0) para obtener un proceso de cambio de fase instantáneo. En la Sección II se continúa y complementa [26], probando la existencia de una solución explícita al problema $(1) - (5)$ con coeficientes no lineales (6) y (7) calesquiera sean los datos $q_0, \rho, c, l, \theta_f, a, b, d$. Más aún, esta solución está dada como una función que depende de un parámetro γ^*, el cual es la única solución de la ecuación trascendental (52). Además, si se reemplaza la condición de flujo (2) por una nueva condición de temperatura (55) sobre el borde fijo $x = 0$ también se obtiene en la Sección III la existencia de solución cualesquiera sean los datos. En esta sección se obtienen resultados novedosos respecto a [26].

En ambos casos, la solución explícita está dada en forma paramétrica y tiene una representación del tipo similaridad. Otros problemas con coeficientes térmicos no lineales en este área pueden encontrarse en [5, 6, 20, 24, 25].

II. SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON CONDICION DE FLUJO EN EL BORDE FIJO.

Consideremos el problema $(1)-(5)$. Teniendo en cuenta (6) y (7) podemos escribir el problema de la siguiente forma

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+dx}{(a+b\theta)^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{d}{2b\,(a+b\theta)}\right)\ ,\ 0<x<s(t)\ ,\ t>0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)=\frac{q_0^*}{\sqrt{t}}\ ,\ t>0 \tag{9}$$

$$\frac{1+ds(t)}{a^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(s(t),t\right)=\alpha\ \dot{s}(t)\ ,\ t>0 \tag{10}$$

$$\theta\left(s(t),t\right)=0\ ,\ t>0 \tag{11}$$

$$s(0)=0 \tag{12}$$

donde $\alpha=\dfrac{l}{c}$ y $q_0^*=\dfrac{q_0}{\rho c}$.

Lema 1. *Si se definen las siguientes transformaciones, de la misma forma en que se hizo en* [26]

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}}-1\right] \\ S(t)=\dfrac{2}{d}\left[(1+ds(t))^{\frac{1}{2}}-1\right] \\ \overline{\theta}(y,t)=\theta(x,t) \end{cases} \tag{13}$$

y

$$\begin{cases} y^*=y^*(y,t)=\int\limits_{S(t)}^{y}\left(a+b\overline{\theta}\left(\sigma,t\right)\right)d\sigma+\left(\alpha b+a\right)S(t) \\ t^*=t \\ \theta^*=\dfrac{1}{a+b\overline{\theta}} \\ S^*=y^*\left.\right|_{y=S}=\left(\alpha b+a\right)S(t). \end{cases} \tag{14}$$

se tiene el siguiente problema de frontera libre para la ecuación del calor:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \ , \ 2bq_0^*\sqrt{t^*} < y^* < S^*(t^*) \ , \ t^* > 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\left(2bq_0^*\sqrt{t^*}, t^*\right) = -\frac{q_0^* b}{\sqrt{t^*}}\,\theta^*\left(2bq_0^*\sqrt{t^*}, t^*\right) \ , \ t^* > 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\left(S^*(t^*), t^*\right) = \alpha^* \overset{\bullet}{S^*}(t^*) \ , \ t^* > 0 \tag{17}$$

$$\theta^*\left(S^*(t^*), t^*\right) = \theta_f^* \ , \ t^* > 0 \tag{18}$$

$$S^*(0) = 0 \tag{19}$$

donde

$$\alpha^* = \frac{-\alpha b}{(\alpha b + a)\,a} \qquad , \qquad \theta_f^* = \frac{1}{a}\,. \tag{20}$$

Demostración. En primer lugar, se demuestra que el problema $(8)-(12)$ es equivalente al siguiente:

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(a+b\,\overline{\theta})^2}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\right) \ , \ 0 < y < S(t) \ , \ t > 0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\left(a + b\,\overline{\theta}(0,t)\right)^2}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,t) = \frac{q_0^*}{\sqrt{t}} \ , \ t > 0, \ \left(q_0^* = \frac{q_0}{\rho c}\right) \ , \ t > 0, \tag{22}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(S(t),t) = \alpha\,\overset{\bullet}{S}(t) \ , \ t > 0 \ \left(\alpha = \frac{l}{c} > 0\right) \ , \ t > 0, \tag{23}$$

$$\overline{\theta}(S(t),t) = 0 \ , \ t > 0, \tag{24}$$

$$S(0) = 0 \tag{25}$$

Si se considera la transformación (13) se tiene que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{1+dx}}$$

y reemplazada en (8) da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} &= \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+dx}{(a+b\,\overline{\theta})^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{1+dx}} + \frac{d}{2b(a+b\,\overline{\theta})}\right)\frac{1}{\sqrt{1+dx}} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{d}{2}y+1}{(a+b\,\overline{\theta})^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} + \frac{d}{2b(a+b\,\overline{\theta})}\right)\frac{1}{\frac{d}{2}y+1} = \\
&= \frac{\frac{d}{2}}{\left(\frac{d}{2}y+1\right)\left(a+b\,\overline{\theta}\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} - \frac{2b}{\left(a+b\,\overline{\theta}\right)^3}\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{(a+b\,\overline{\theta})^2}\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial y^2} \\
&\quad -\frac{1}{\left(\frac{d}{2}y+1\right)}\frac{\frac{d}{2}}{\left(a+b\,\overline{\theta}\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}
\end{aligned}$$

luego,

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} = -\frac{2b}{\left(a+b\,\overline{\theta}\right)^3}\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{(a+b\,\overline{\theta})^2}\frac{\partial^2\overline{\theta}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(a+b\,\overline{\theta})^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\right) \qquad (26)$$

y se ha obtenido la ecuación (21).

Las condiciones (24) y (25) salen en forma inmediata de (4) y (5).

La condición (9) es equivalente a la dada por

$$\frac{1}{\left(a+b\,\overline{\theta}(0,t)\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{q_0^*}{\sqrt{t}}\ ,\ t>0,$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+dx}} = \left(\frac{d}{2}y+1\right)^{-1}$$

se obtiene (22).

La condición (10) es equivalente a

$$\frac{1+d\,s(t)}{a^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(S(t),t)\frac{\partial y}{\partial x}(s(t),t) = \alpha\,\overset{\bullet}{s}(t)\ ,\ t>0 \iff$$

$$\iff \frac{1+d\,s(t)}{a^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(S(t),t)\frac{1}{\sqrt{1+ds(t)}} = \alpha\sqrt{1+ds(t)}\,\overset{\bullet}{S}(t)\ ,\ t>0$$

luego, se tiene (23).

Antes de pasar al problema $(15)-(19)$, de la transformación (14) y del problema $(21)-(25)$ se obtiene una expresión alternativa para y^*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y^*}{\partial t} &= -\left(a+b\overline{\theta}\left(S(t),t\right)\right)\overset{\bullet}{S}(t)+\int\limits_{S(t)}^{y} b\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}\left(\sigma,t\right)d\sigma+\left(\alpha b+a\right)\overset{\bullet}{S}(t)= \\
&= \alpha b\overset{\bullet}{S}(t)+\int\limits_{S(t)}^{y} b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\left(a+b\overline{\theta}\left(\sigma,t\right)\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\right)d\sigma= \\
&= \alpha b\overset{\bullet}{S}(t)+b\left(\frac{1}{\left(a+b\overline{\theta}\left(y,t\right)\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(y,t)-\frac{1}{\left(a+b\overline{\theta}\left(S(t),t\right)\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(S(t),t)\right)= \\
&= \frac{b}{\left(a+b\overline{\theta}\left(y,t\right)\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(y,t)=
\end{aligned}
$$

$$
=\int\limits_{0}^{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{\left(a+b\overline{\theta}\left(\sigma,t\right)\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(\sigma,t)\right)d\sigma+\frac{b}{\left(a+b\overline{\theta}\left(0,t\right)\right)^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(0,t) \qquad (27)
$$

$$
\underset{(21)-(22)}{=} b\int\limits_{0}^{y}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}\left(\sigma,t\right)d\sigma+\frac{bq_0^*}{\sqrt{t}} \qquad (28)
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
y^*(y,t) &= \int\limits_{0}^{t}\left(\int\limits_{0}^{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(a+b\overline{\theta}\left(\sigma,t\right)\right)d\sigma+\frac{bq_0^*}{\sqrt{\tau}}\right)d\tau+\int\limits_{0}^{y}\left(a+b\overline{\theta}\left(\sigma,0\right)\right)d\sigma= \\
&= \int\limits_{0}^{y}\left(a+b\overline{\theta}\left(\sigma,t\right)\right)d\sigma+2bq_0^*\sqrt{t}\,. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Ahora, se considera la transformación (14) y se obtiene:

$$
\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial y}=\frac{-b\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}}{\left(a+b\,\overline{\theta}\right)^2} \iff \frac{\partial\theta^*}{\partial y^*}\left(a+b\overline{\theta}\right)=\frac{-b\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}}{\left(a+b\,\overline{\theta}\right)^2} \iff
$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} = \frac{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^3}{-b} \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{b\theta^{*3}} \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \tag{30}$$

Si se deriva nuevamente respecto de y resulta:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \left(a + b\overline{\theta}\right)^2 + \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} b \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} = \frac{2b^2}{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^3} \left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\right)^2 - \frac{b}{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^2} \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial y^2}$$

y, si se reemplaza $\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial y^2} = \frac{-\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^4}{b} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} + \frac{3\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^5}{b} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\right)^2 \tag{31}$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{-b\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial t}}{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^2} \Longleftrightarrow \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \frac{b}{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{-b}{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} = \frac{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^3}{b} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\right)^2 - \frac{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^2}{b} \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \tag{32}$$

Si se reemplaza (30), (31) y (32) en (26) se obtiene (15).

Para obtener (16) se debe considerar la transformación (14) y se debe recordar que

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} = \frac{\left(a + b\,\overline{\theta}\right)^3}{-b} \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{b\theta^{*3}} \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \quad .$$

Se demostró que (10) es equivalente a (23), luego para probar (17) se deriva

$$S^* = y^* \left.\right|_{y=S} = (\alpha b + a)\, S(t)$$

respecto de t^* y se obtiene

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \left(S^*(t^*), t^*\right) = \frac{-\alpha b}{a\,(\alpha b + a)} \frac{dS^*}{dt^*} = \alpha^* \frac{dS^*}{dt^*} \ .$$

Finalmente se debe definir α^* como en (20) y utilizar (30).

Las condiciones (18) y (19) se deducen de (24) y de (25) en forma inmediata usando la transformación (14) y definiendo θ_f^* como en (20).

De esta manera se ha demostrado que el problema $(8)-(12)$ es equivalente al problema dado por $(15)-(19)$.■

Observación 1. *Teniendo en cuenta que el problema* $(15)-(19)$ *es un clásico problema de tipo Stefan, las dos condiciones sobre la frontera libre implican que necesariamente la frontera libre* $S^*(t^*)$ $(S(t))$ *está dada por*

$$S^*(t^*) = \sqrt{2\gamma^* t^*}, \qquad \left(S(t) = \sqrt{2\gamma t}\right) \tag{33}$$

donde $\gamma > 0$ *es un parámetro desconocido a ser determinado y está relacionado con* γ^* *de la siguiente manera*

$$\gamma^* = \gamma(\alpha b + a)^2 .■ \tag{34}$$

En lo que sigue se propone una solución de semejanza para el problema $(15)-(19)$ y se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1. *Sea*

$$\theta^*(y^*, t^*) = \Theta^*(\xi^*) \qquad , \qquad \xi^* = \frac{y^*}{\sqrt{2\gamma^* t^*}} \ . \tag{35}$$

Así, el problema $(15)-(19)$ *se reduce a:*

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^{*2}} + \gamma^* \xi^* \frac{d\Theta^*}{d\xi^*} = 0 \ , \ bq_0^* \sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} < \xi^* < 1 \tag{36}$$

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*} \left(bq_0^* \sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} \right) = -\sqrt{2\gamma^*} q_0^* b \ \Theta^* \left(bq_0^* \sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} \right) \tag{37}$$

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*}(1) = \alpha^* \ \gamma^* \tag{38}$$

$$\Theta^* (1) = \theta_f^* . \tag{39}$$

Más aún, la solución de (36) *está dada por*

$$\Theta^* (\xi^*) = A \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}} \xi^* \right] + B, \tag{40}$$

donde A *,* B *y* γ^* *deben ser determinados por las condiciones* $(37) - (39)$ *las cuales son equivalentes a*

$$A \exp \left(- (b q_0^*)^2 \right) = - q_0^* b \sqrt{\pi} \left[A \operatorname{erf} (b q_0^*) + B \right] \tag{41}$$

$$A \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}} \right] + B = \theta_f^* \tag{42}$$

$$A \exp \left[- \frac{\gamma^*}{2} \right] = \alpha^* \sqrt{\frac{\gamma^* \pi}{2}} \tag{43}$$

Demostración. De (35) se tiene

$$\theta^*(y^*, t^*) = \Theta^*(\xi^*) \qquad , \qquad \xi^* = \frac{y^*}{\sqrt{2\gamma^* t^*}}$$

luego,

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} = \frac{d\Theta^*}{d\xi^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} = \frac{d\Theta^*}{d\xi^*} \frac{1}{\sqrt{2\gamma^* t^*}} \quad , \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{d\Theta^*}{d\xi^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} = \frac{d\Theta^*}{d\xi^*} \frac{(-y^*) \gamma^*}{(2\gamma^* t^*)^{\frac{3}{2}}}$$

y

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} = \frac{d^2 \Theta^*}{d\xi^{*2}} \frac{1}{2\gamma^* t^*}$$

que reemplazadas en (15) implica que

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*} \frac{(-y^*) \gamma^*}{(2\gamma^* t^*)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2 \Theta^*}{d\xi^{*2}} \frac{1}{2\gamma^* t^*}$$

o equivalentemente

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*} \gamma^* \xi^* + \frac{d^2 \Theta^*}{d\xi^{*2}} = 0 \ . \tag{44}$$

Si la ecuación (15) es válida para

$$2bq_0^*\sqrt{t^*} < y^* < S^*(t^*) \ , \ t^* > 0 \, ,$$

entonces

$$2bq_0^*\sqrt{t^*} < y^* < \sqrt{2\gamma^* t^*} \ , \ t^* > 0 \, ,$$

luego la ecuación (36) tiene validez en el siguiente dominio

$$bq_0^*\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} < \xi^* < 1 \ .$$

La condición (39) se deduce por simples reemplazos.

Para obtener la condición (38) se considera

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*} = \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial \xi^*} = \sqrt{2\gamma^* t^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta^*}{d\xi^*}(1) &= \sqrt{2\gamma^* t^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\left(S^*(t^*), t^*\right) \underset{(17)}{=} \\ &= \sqrt{2\gamma^* t^*}\alpha^*\frac{\partial S^*}{\partial t^*} = \sqrt{2\gamma^* t^*}\alpha^*\frac{\sqrt{2\gamma^*}}{2\sqrt{t^*}} = \alpha^*\gamma^* \ . \end{aligned}$$

Análogamente para obtener (37) se tiene

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*} = \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial \xi^*} = \sqrt{2\gamma^* t^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta^*}{d\xi^*}\left(bq_0^*\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}\right) &= \sqrt{2\gamma^* t^*}\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\left(2bq_0^*\sqrt{t^*}, t^*\right) \underset{(16)}{=} \\ &= -\sqrt{2\gamma^* t^*}\frac{bq_0^*}{\sqrt{t^*}}\theta^*\left(2bq_0^*\sqrt{t^*}, t^*\right) = -\sqrt{2\gamma^*}bq_0^*\Theta^*\left(\frac{2bq_0^*\sqrt{t^*}}{\sqrt{2\gamma^* t^*}}\right) = \\ &= -\sqrt{2\gamma^*}bq_0^*\Theta^*\left(bq_0^*\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}\right) \ . \end{aligned}$$

con lo cual se deduce (37).

La solución (40) se obtiene integrando la ecuación diferencial ordinaria (36).

Además, teniendo en cuenta (40)se tiene que

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*}\left(\xi^*\right) = A\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\gamma^*}{2}{\xi^*}^2\right)\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}$$

y entonces por (37) se deduce que

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*}\left(bq_0^*\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}\right) = A\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(bq_0^*\right)^2\right)\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}} = \sqrt{2\gamma^*}bq_0^*\Theta^*\left(bq_0^*\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} A\exp\left(-\left(bq_0^*\right)^2\right) &= q_0^* b\sqrt{\pi}\Theta^*\left(bq_0^*\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}\right) = \\ & q_0^* b\sqrt{\pi}\left[A\,\mathrm{erf}\left(bq_0^*\right) + B\right]\ . \end{aligned}$$

Como $\Theta^*\left(1\right) = \theta_f^*$ y vale (40) entonces

$$A\,\mathrm{erf}\left[\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right] + B = \theta_f^*\ .$$

Finalmente, como

$$\frac{d\Theta^*}{d\xi^*}\left(1\right) = A\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\gamma^*}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}$$

y vale (38) se tiene que

$$\alpha^*\gamma^* = A\sqrt{\frac{2\gamma^*}{\pi}}\exp\left(-\frac{\gamma^*}{2}\right)$$

o equivalentemente

$$A\exp\left(-\frac{\gamma^*}{2}\right) = \alpha^*\sqrt{\frac{\pi\gamma^*}{2}}\ ,$$

es decir, (43).■

En lo que sigue, se trata de reencontrar la solución θ del problema original invirtiendo las transformaciones realizadas.

Finalmente, se obtendrá la solución en forma paramétrica.

Teorema 2. *El problema de frontera libre* $(1)-(5)$ *tiene una única solución de tipo similaridad cualesquiera sean los datos* $q_0, \rho, c, l, \theta_f, a, b, d$. *Más aún, la solución está dada por*

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \theta(\xi) = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{A\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\xi^*\right)+B} - a\right] \\ \xi &= \frac{y}{\sqrt{2\gamma t}} = \frac{\frac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}}-1\right]}{\sqrt{2\gamma t}} \\ s(t) &= \frac{1}{d}\left[\left(1+\frac{d}{2}\sqrt{2\gamma t}\right)^2 - 1\right] \end{aligned} \tag{45}$$

donde

$$\xi = (\alpha b + a)\left(\xi^*\left(Ag\left(\sqrt{\tfrac{\gamma^*}{2}}\xi^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)+B\right) - \sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}bq_0^*\left(Ag\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)+B\right)\right) \ , \tag{46}$$

$$A = \frac{-\theta_f^*}{g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)} \ , \tag{47}$$

$$B = \frac{\theta_f^*\ g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)}{g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)} \ , \tag{48}$$

$$\begin{aligned} g(x,p) &= \mathrm{erf}(x) + pR(x)\ ,\ x>0\ ,\ p\in\mathbb{R}, \\ R(x) &= \frac{\exp(-x^2)}{x}\ ,\ x>0 \end{aligned} \tag{49}$$

y

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-u^2\right) du \quad . \tag{50}$$

La constante desconocida γ^* *es la única solución de la siguiente ecuación:*

$$\alpha^* \sqrt{x} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\theta_f^*}{g\left(bq_0^*, -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \ , \ x > 0.$$

Demostración. Para obtener (45) se deben invertir las relaciones (13) , (14) y (35) .

Si se define $\xi = y/\sqrt{2\gamma t}$ se tiene

$$\frac{d\xi^*}{d\xi} = \frac{d\xi^*}{dy^*}\frac{dy^*}{dy}\frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma^* t^*}}\left(a + b\overline{\theta}\right)\sqrt{2\gamma t} =$$

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma^*}}\left(a + b\overline{\theta}\right) \underset{(34)}{=} \frac{1}{\alpha b + a}\left(a + b\overline{\theta}\right)$$

entonces

$$\frac{d\xi}{d\xi^*} = (\alpha b + a)\frac{1}{a + b\overline{\theta}} = (\alpha b + a)\,\theta^*\left(y^*, t^*\right) =$$

$$(\alpha b + a)\,\Theta^*\left(\xi^*\right) = (\alpha b + a)\left[A \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\xi^*\right) + B\right] ,$$

luego como

$$\xi^* \mid_{\xi=0} = \left.\frac{y^*}{\sqrt{2\gamma^* t^*}}\right|_{y=0} = \frac{2bq_0^*\sqrt{t^*}}{\sqrt{2\gamma^* t^*}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} bq_0^*$$

se tiene

$$\xi = (\alpha b + a) \int_{\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} bq_0^*}^{\xi^*} \left[A \operatorname{erf}\left(\sqrt{\tfrac{\gamma^*}{2}}\sigma\right) + B\right] d\sigma \ . \tag{51}$$

Como

$$\int \operatorname{erf}(x) dx = x \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) =$$

$$x\left(\operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp(-x^2)}{x}\right) = xg\left(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$$

entonces

$$\xi = (\alpha b + a) \left(A\sigma g \left(\sqrt{\tfrac{\gamma^*}{2}}\sigma, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \right) + B\sigma \right) \Bigg|_{\sigma=\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}bq_0^*}^{\sigma=\xi^*} =$$

$$(\alpha b + a) \left(A\xi^* g \left(\sqrt{\tfrac{\gamma^*}{2}}\xi^*, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \right) + B\xi^* - A\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} bq_0^* g \left(bq_0^*, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \right) - B\sqrt{\tfrac{2}{\gamma^*}}bq_0^* \right) = \quad (51)$$

Las constantes A y B se deducen de forma inmediata de (41) y (42). Por otra parte, la constante desconocida γ^* se determinará a través de la condición de borde (38) o bien la condición equivalente (43), la cual lleva a la siguiente ecuación

$$\alpha^* \sqrt{\gamma^*} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\theta_f^*}{g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)} \exp\left(-\frac{\gamma^*}{2}\right) \ , \ \gamma^* > 0, \qquad (52)$$

o bien

$$\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}} \exp\left(\frac{\gamma^*}{2}\right) = \frac{\theta_f^*}{(-\alpha^*)\sqrt{\pi}\left(g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)\right)} \ , \ \gamma^* > 0. \qquad (53)$$

Si se define $\mu = \sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}$ y se observa que

$$\frac{\theta_f^*}{(-\alpha^*)\sqrt{\pi}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{\alpha b}{a(\alpha b + a)}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{a}{\alpha b}\right)$$

entonces μ debe ser la solución de la siguiente ecuación

$$W_1(x) = W_2(x) \ , \ x > 0 \, ,$$

donde

$$W_1(x) = x \exp(x^2) \ , \ x > 0 \ \text{ y}$$

$$W_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{a}{\alpha b}\right) \frac{1}{g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \operatorname{erf}(x)} \ , \ x > 0.$$

Es fácil ver que $W_1(0^+) = 0$, $W_1(+\infty) = +\infty$ y $W_1'(x) > 0,\ \forall x > 0$.
La función g definida por (49) es decreciente,

$$g\left(0^+, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = +\infty \ \text{ y } \ g\left(+\infty, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = 1 \ ,$$

entonces W_2 está bien definida y además $W_2(x) > 0 \ \ \forall x > 0$.
Además

$$W_2(0^+) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \tfrac{a}{\alpha b}\right)\frac{1}{g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)} \ , \ W_2(+\infty) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \tfrac{a}{\alpha b}\right)\frac{1}{g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - 1} \ \text{y}$$

$$W_2'(x) = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{a}{\alpha b}\right)\frac{\exp(-x^2)}{\left(g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \operatorname{erf}(x)\right)^2} > 0 \ \ \forall x > 0 \ ,$$

por lo tanto existe una única solución γ^* de (53) cualesquiera sean los datos.■

Observación 2.
Como se vió previamente

$$\xi^* \mid_{\xi=0} = \frac{2bq_0^*\sqrt{t^*}}{\sqrt{2\gamma^* t^*}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}\, bq_0^*$$

entonces

$$\theta\,(0,t) = \overline{\theta}\,(0,t) = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{\theta^*\left(y^*|_{y=0}\,, t\right)} - a\right) =$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{\Theta^*\left(\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}}\, bq_0^*\right)} - a\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{A \operatorname{erf}\,(bq_0^*) + B} - a\right),$$

es decir, la temperatura es constante en el borde fijo $x = 0$. Esto origina la siguiente Sección III.■

Observación 3. *Es importante destacar que*

$$\theta\,(0,t) < 0 \ .$$

Reemplazando los valores de las constantes A y B se tiene que

$$\theta(0,t) = \frac{1}{b}\left(\frac{g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)}{\frac{\theta_f^*}{\sqrt{\pi}} R\left(bq_0^*\right)} - a\right) =$$

$$\frac{a\sqrt{\pi}}{b}\frac{1}{R\left(bq_0^*\right)}\left(\operatorname{erf}\left(bq_0^*\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}R\left(bq_0^*\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) - \frac{R\left(bq_0^*\right)}{\sqrt{\pi}}\right) =$$

$$\frac{a\sqrt{\pi}}{b}\frac{1}{R\left(bq_0^*\right)}\left(\operatorname{erf}\left(bq_0^*\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)\right). \tag{54}$$

Como γ^* es la única solución de la ecuación (53) *se tiene que*

$$g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{a}{\alpha b}\right) R\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}R\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{\alpha b}R\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{\alpha b}R\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right),$$

entonces

$$g\left(bq_0^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) > g\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$$

y como g es decreciente resulta $bq_0^* < \sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}$, con lo cual , teniendo en cuenta la expresión (54) , *resulta $\theta(0,t) < 0$.*■

Observación 4.

Como $a + b\theta(s(t),t) = a > 0$, si se prueba que $a + b\theta(0,t) > 0$ entonces por el Principio del máximo resultaría v y k bien definidos. Se tiene

$$a + b\theta(0,t) \underset{(54)}{=} a + b\frac{a\sqrt{\pi}}{b}\frac{1}{R\left(bq_0^*\right)}\left(\operatorname{erf}\left(bq_0^*\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)\right) =$$

$$a\left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{R\left(bq_0^*\right)}\left(\operatorname{erf}\left(bq_0^*\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)\right)\right) =$$

$$\frac{a}{R\left(bq_0^*\right)}\left(R\left(bq_0^*\right)+\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(bq_0^*\right)-\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)\right)=$$
$$\frac{a\sqrt{\pi}}{R\left(bq_0^*\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}R\left(bq_0^*\right)+\mathrm{erf}\left(bq_0^*\right)-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)\right)=$$
$$\frac{a\sqrt{\pi}}{R\left(bq_0^*\right)}\left(g\left(bq_0^*,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)\right).$$

De forma análoga a lo hecho en la observación 3 puede demostrarse que esta última expresión es positiva debido a que γ^* es la única solución de la ecuación (53) .■

III. SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON CONDICION DE TEMPERATURA EN EL BORDE FIJO.

Ahora, se considera el problema $(1)-(5)$ pero la condición (2) se reemplazará por la siguiente condición de temperatura en el borde fijo.

$$\theta\left(0,t\right)=-\theta_0\ ,\ t>0\ ,\ \left(\theta_0>0\right) \tag{55}$$

con $a-b\theta_0>0$ para que k y v estén bien definidos. Se considera el siguiente problema:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+dx}{\left(a+b\theta\right)^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{d}{2b\left(a+b\theta\right)}\right)\ ,\ 0<x<s(t)\ ,\ t>0 \tag{56}$$

$$\theta\left(0,t\right)=-\theta_0\ ,\ t>0\ , \tag{57}$$

$$\frac{1+ds(t)}{a^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(s(t),t\right)=\alpha\,\dot{s}(t)\ ,\ t>0 \tag{58}$$

$$\theta\left(s(t),t\right)=0\ ,\ t>0 \tag{59}$$

$$s(0)=0 \tag{60}$$

donde $\alpha=\dfrac{l}{c}$.

Lema 2. *Si se definen nuevamente las transformaciones* (13) y (14) *como en la sección II, se tiene el siguiente problema de frontera libre para la ecuación del calor:*

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^*} \ , \ \frac{b}{(a-b\theta_0)^2} \int_0^{t^*} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau) d\tau < y^* < S^*(t^*) \ , \ t^* > 0 \tag{61}$$

$$\theta^* \left(\frac{b}{(a-b\theta_0)^2} \int_0^{t^*} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau) d\tau, t^* \right) = \theta_0^* \tag{62}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \left(S^*(t^*), t^* \right) = \alpha^* \overset{\bullet}{S^*} (t^*) \ , \ t^* > 0 \tag{63}$$

$$\theta^* \left(S^*(t^*), t^* \right) = \theta_f^* \ , \ t^* > 0 \tag{64}$$

$$S^*(0) = 0 \tag{65}$$

donde θ_f^* *y* α^* *están dadas por* (20) *y*

$$\theta_0^* = \frac{1}{a + b\overline{\theta}(0,t)} = \frac{1}{a + b\theta(0,t)} = \frac{1}{a - b\theta_0} \quad . \tag{66}$$

Demostración. Si se definen las mismas transformaciones como se ha hecho en el caso anterior, ahora se tiene que

$$\frac{\partial y^*}{\partial t} \underset{(27)}{=} b \int_0^y \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t}(\sigma, t) d\sigma + \frac{b}{\left(a + b\overline{\theta}\,(0,t)\right)^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,t) =$$

$$= b \int_0^y \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t}(\sigma, t) d\sigma + \frac{b}{(a - b\theta_0)^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,t) \ .$$

Entonces

$$y^*(y,t) = \int_0^t \left(\int_0^y \frac{\partial}{\partial \tau} \left(a + b\overline{\theta}\,(\sigma,\tau)\right) d\sigma + \frac{b}{(a-b\theta_0)^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau) \right) d\tau + \int_0^y \left(a + b\overline{\theta}\,(\sigma,0)\right) d\sigma =$$

$$= \int_0^y \left(a + b\overline{\theta}\,(\sigma,t)\right) d\sigma + \frac{b}{(a-b\theta_0)^2} \int_0^t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau) d\tau. \tag{67}$$

Luego

$$y^*(0,t) = \frac{b}{(a-b\theta_0)^2} \int_0^t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau) d\tau \ .$$

De igual modo que en el Lema 1 se obtiene $(61), (63) - (65)$. Además

$$\overline{\theta}\,(0,t) = -\theta_0 \Leftrightarrow \theta^* \left(\frac{b}{(a-b\theta_0)^2} \int_0^{t^*} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau) d\tau, t \right) = \frac{1}{a + b\overline{\theta}\,(0,t)} \Leftrightarrow \tag{68}$$

$$\theta^* \left(b\theta_0^* \int_0^{t^*} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau) d\tau, t \right) = \frac{1}{a - b\theta_0} = \theta_0^* \tag{69}$$

donde θ_f^*, α^* y θ_0^* están dadas por (20) y (66) respectivamente.■

Observación 5. *Teniendo en cuenta que el problema* $(61) - (65)$ *es un clásico problema de tipo Stefan, las dos condiciones sobre la frontera libre implican que necesariamente la frontera libre* $S^*(t^*)$ $(S(t))$ *está dada por*

$$S^*(t^*) = \sqrt{2\gamma^* t^*}, \qquad \left(S(t) = \sqrt{2\gamma t} \right) \tag{70}$$

donde γ^* *(i.e.* γ*) es una constante adimensional que debe ser determinada.*■

Si se introduce una variable de similaridad y se propone una solución del tipo similaridad entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3. *Sea*

$$\theta^*(y^*, t^*) = \Theta^*(\xi^*) \qquad , \qquad \xi^* = \frac{y^*}{\sqrt{2\gamma^* t^*}} \tag{71}$$

El problema $(61) - (65)$ *se transforma en* $(38), (39)$ *y*

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^{*2}} + \gamma^* \xi^* \frac{d\Theta^*}{d\xi^*} = 0 \ , \ \xi_0^* < \xi^* < 1$$

$$\Theta^*\left(\xi_0^*\right) = \theta_0^* \ , \ t^* > 0$$

donde ξ_0^* *es una constante tal que*

$$\int_0^{t^*} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau)d\tau = \xi_0^* \frac{(a-b\theta_0)^2}{b}\sqrt{2\gamma^* t^*}\ .$$

Además

$$\Theta^*\left(\xi^*\right) = A' \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\xi^*\right) + B' \qquad , \qquad \xi_0^* < \xi^* < 1 \tag{72}$$

donde los coeficientes desconocidos ξ_0^*, A', B' *y* γ^* *deben satisfacer las siguientes ecuaciones*

$$A' \operatorname{erf}\left(\xi_0^*\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) + B' = \theta_0^*\ ,\ t > 0 \tag{73}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\gamma^*}} \exp\left(-\frac{\gamma^*}{2}\right) = \frac{\alpha^*}{A'}\sqrt{\pi} \tag{74}$$

$$A' \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) + B' = \theta_f^*\ . \tag{75}$$

Demostración. Teniendo en cuenta (71), el problema (61) $-$ (65) se transforma en $(38), (39)$ y

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^{*2}} + \gamma^*\xi^*\frac{d\Theta^*}{d\xi^*} = 0\ ,\ \frac{b\theta_0^{*2}}{\sqrt{2\gamma^* t^*}}\int_0^{t^*}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau)d\tau < \xi^* < 1\ ,\ t^* > 0 \tag{76}$$

$$\Theta^*\left(\frac{b\theta_0^{*2}}{\sqrt{2\gamma^* t^*}}\int_0^{t^*}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau)d\tau\right) = \theta_0^*\ ,\ t^* > 0 \tag{77}$$

De (77) se tiene necesariamente la existencia de una constante ξ_0^* such that

$$\int_0^{t^*}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau)d\tau = \xi_0^*\frac{1}{b\theta_0^{*2}}\sqrt{2\gamma^* t^*}\ . \tag{78}$$

Por lo tanto (76) y (77) se pueden reescribir como

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^{*2}} + \gamma^*\xi^*\frac{d\Theta^*}{d\xi^*} = 0\ ,\ \xi_0^* < \xi^* < 1 \tag{79}$$

$$\Theta^*\left(\xi_0^*\right) = \theta_0^*\ ,\ t^* > 0 \tag{80}$$

Análogamente a lo hecho previamente, la solución del problema $(38), (39), (79), (80)$ está dada por

$$\Theta^*\left(\xi^*\right) = A'\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\xi^*\right) + B' \qquad , \qquad \xi_0^* < \xi^* < 1 \tag{81}$$

donde los coeficientes desconocidos ξ_0^*, A', B' y γ^* deben satisfacer las ecuaciones $(73) - (75)$ y (78) .■

Observación 6: *De* (78) *se tiene que*

$$b\theta_0^{*2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(0,t) = \frac{\xi_0^*\gamma^*}{\sqrt{2\gamma^* t}} \Leftrightarrow \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(0,t) = \frac{q_0^*}{\sqrt{t}}$$

con

$$q_0^* = \frac{\xi_0^*}{b\theta_0^{*2}}\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\ .■ \tag{82}$$

Observación 7:

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(y,t) = \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\theta^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{-1}{b\theta^{*^2}(y^*,t)}\frac{\Psi'\left(\xi^*\right)}{S^*(t)}\frac{1}{\theta^*(y^*,t)}$$

entonces

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(0,t) = \frac{-1}{bS^*(t)}\frac{1}{\theta_0^{*^3}}\Psi'\left(\xi_0^*\right)$$

pues

$$y^*(0,t) = \frac{b}{\left(a - b\theta_0\right)^2}\int_0^t \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}(0,\tau)\,d\tau = b\theta_0^{*^2}\int_0^t \overline{\theta}_y(0,\tau)\,d\tau =$$

$$= \xi_0^* \sqrt{2\gamma^* t} = \xi_0^* S^*(t) \qquad \left(\xi^* = \frac{y^*}{S^*(t)} \right),$$

Por lo tanto

$$\xi_0^* = \frac{b\theta_0^{*^2}}{\sqrt{2\gamma^* t}} \int_0^t \overline{\theta}_y(0,\tau)\, d\tau = \frac{b\theta_0^{*^2}}{\sqrt{2\gamma^*}\sqrt{t}} \int_0^t \frac{-1}{b\sqrt{2\gamma^*\tau}} \frac{\Psi'(\xi_0^*)}{\theta_0^{*^3}} d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{-\Psi'(\xi_0^*)}{\theta_0^* \gamma^*} = \xi_0^* \;\; .\blacksquare \tag{83}$$

Ahora se debe resolver el sistema $(73) - (75)$ y (83) donde A', B', γ^* y ξ_0^* son las incógnitas.

De (73) y (75) se tiene

$$A' = \frac{\theta_0^* - \theta_f^*}{\operatorname{erf}\left(\xi_0^* \sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)} \tag{84}$$

$$B' = \frac{\theta_f^* \operatorname{erf}\left(\xi_0^* \sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) - \theta_0^* \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\xi_0^* \sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{2}}\right)} : \tag{85}$$

Entonces, ahora se debe resolver el sistema (74) y (83) con incógnitas ξ_0^* y γ^*.

Teniendo en cuenta (84) dicho sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\operatorname{erf}(\mu) - \operatorname{erf}(\nu) = \frac{\theta_0 (a + b\alpha)}{\alpha (a - b\theta_0)\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu} \tag{86}$$

$$\operatorname{erf}(\mu) - \operatorname{erf}(\nu) = \frac{b\theta_0}{a\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\nu^2)}{\nu} \tag{87}$$

donde

$$\mu = \sqrt{\frac{\gamma^*}{2}} \;\text{ y }\; \nu = \sqrt{\frac{\gamma^*}{2}} \xi_0^* \quad .$$

De (86) se tiene que $\operatorname{erf}(\nu) = g(\mu, p_1)$ con g definida en (49) y

$$p_1 = -\frac{\theta_0 (a + b\alpha)}{\alpha (a - b\theta_0) \sqrt{\pi}} < 0 \quad .$$

Como $g(x, p_1)$ es una función creciente en la variable x $(p_1 < 0)$ con $g(0^+, p_1) = -\infty$ y $g(+\infty, p_1) = 1$ entonces existe $x_0 > 0$ tal que $g(x_0, p_1) = 0$. Si $\mu > x_0$ entonces

$$\nu = \operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1)) \, . \tag{88}$$

Sustituyendo (88) en (87) se tiene que

$$\operatorname{erf}(\mu) - g(\mu, p_1) = p_2 \frac{\exp\left(-\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1))\right)^2\right)}{\operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1))}$$

$$\Leftrightarrow -p_1 \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu} = p_2 \frac{\exp\left(-\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1))\right)^2\right)}{\operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1))}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{p_1}{p_2} \operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1)) \exp\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1))\right)^2 = \mu \exp\left(\mu^2\right)$$

donde

$$p_2 = \frac{b\theta_0}{a\sqrt{\pi}} > 0 \, .$$

Si se define $P(x) = x \exp(x^2)$, μ debe ser solución de

$$P(x) = \eta P\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(x, p_1))\right), \; x > x_0. \tag{89}$$

o bien μ debe ser solución de

$$W(x) \equiv \eta \frac{P(\operatorname{erf}^{-1}(g(x, p_1)))}{P(x)} = 1 \quad , \quad x > x_0 \tag{90}$$

donde

$$\eta = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{\theta_0(a+b\alpha)}{\alpha(a-b\theta_0)\sqrt{\pi}}}{\frac{b\theta_0}{a\sqrt{\pi}}} = \frac{(a + b\alpha)}{(a - b\theta_0)} \frac{a}{b\alpha} = \frac{ab\alpha + a^2}{ab\alpha - b^2\alpha\theta_0} \tag{91}$$

Primero es útil probar que

$$L \equiv \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{erf}^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right)}{x} = 1 \; . \tag{92}$$

$$\left|\mathrm{erf}\ ^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right) - \mathrm{erf}\ ^{-1}\left(\mathrm{erf}(x)\right)\right| = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{erf}\ ^{-1}(c)\right)\left|g(x,p_1) - \mathrm{erf}(x)\right| \tag{93}$$

con $c \in \left(g(x,p_1), \mathrm{erf}(x)\right)$, entonces como $\mathrm{erf}^{-1}(c) < \mathrm{erf}^{-1}(\mathrm{erf}(x)) = x$

$$(93) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left[\left(\overset{-1}{\mathrm{erf}}(c)\right)^2\right]|p_1|\,\frac{\exp(-x^2)}{x} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,|p_1|\,\frac{1}{x} \; ,$$

luego

$$\left|\frac{\mathrm{erf}^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right)}{x} - 1\right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,|p_1|\,\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,|p_1|\,\frac{1}{K^2} \;\; , \; \forall x \geq K \;\; .$$

Por otro lado

$$L_1 \equiv \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\left(\mathrm{erf}^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right)\right)^2\right)}{\exp\left(x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{erf}^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right)\left[\exp\left(\left(\mathrm{erf}^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right)\right)^2\right)\right]^2\sqrt{\pi}}{2x\left[\exp\left(x^2\right)\right]^2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - p_1\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\mathrm{erf}^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right)}{x}\left[\frac{\exp\left(\left(\mathrm{erf}^{-1}\left(g\left(x,p_1\right)\right)\right)^2\right)}{\exp\left(x^2\right)}\right]^2\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - p_1\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\; L_1^2\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 2p_1\right) = L_1^2\left(1 - p_1\sqrt{\pi}\right).$$

Por lo tanto

$$L_1 = L_1^2\left(1 - p_1\sqrt{\pi}\right). \tag{94}$$

Además

$$1 = L \equiv \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{erf}^{-1}(g(x, p_1))}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\exp\left(\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(x, p_1))\right)^2\right)}{\exp(x^2)} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - p_1 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= L_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 2p_1\right) = L_1 \left(1 - p_1 \sqrt{\pi}\right) \tag{95}$$

entonces $L_1 \neq 0$, luego de (94) se deduce que

$$L_1 = \frac{1}{1 - p_1 \sqrt{\pi}} \ .$$

Por último

$$\lim_{x \to +\infty} W(x) = \lim_{x \to +\infty} \eta \frac{P\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(x, p_1))\right)}{P(x)} =$$

$$= \eta \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{erf}^{-1}(g(x, p_1)) \exp\left(\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(x, p_1))\right)^2\right)}{x \exp(x^2)} = \eta \frac{1}{1 - p_1 \sqrt{\pi}} =$$

$$\underset{(91)}{=} \frac{ab\alpha + a^2}{(ab\alpha - b^2 \alpha \theta_0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta_0 (a + b\alpha)}{\alpha (a - b\theta_0)}\right)} =$$

$$= \frac{ab\alpha + a^2}{b\alpha (a - b\theta_0)} \frac{\alpha (a - b\theta_0)}{(\alpha (a - b\theta_0) + \theta_0 (a + b\alpha))} =$$

$$= \frac{ab\alpha + a^2}{ab(\alpha + \theta_0)} = \frac{a(b\alpha + a)}{ab(\alpha + \theta_0)} = \frac{b\alpha + a}{b(\alpha + \theta_0)} = \frac{b\alpha + a}{b\alpha + b\theta_0} > 1$$

pues $a - b\theta_0 > 0$. Resumiendo, se tiene

$$W(x_0) = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x \to +\infty} W(x) = \frac{b\alpha + a}{b\alpha + b\theta_0} > 1 \ ,$$

por lo tanto existe al menos una solución μ de (90).

Se pueden resumir los resultados previos en el siguiente teorema:

Teorema 4. *Si $a - b\theta_0 > 0$ entonces el problema de frontera libre $(1), (3)-(5), (55)$ tiene al menos una solución del tipo similaridad cualquiera sean los datos $q_0, \rho, c, l, \theta_f, a, b, d$. Además, la solución está dada por*

$$\theta(x,t) = \overline{\theta}(y,t) = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\theta^*(y^*,t)} - a\right] = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta^*(\xi^*)} - a\right]$$

con

$$\Theta^*(\xi^*) = A' \operatorname{erf}(\mu\xi^*) + B' \quad , \quad \xi^* = \frac{y^*}{S^*(t)} \quad ,$$

$$A' = -\frac{\dfrac{b\theta_0}{a(a-b\theta_0)}}{\operatorname{erf}(\mu) - \operatorname{erf}(\nu)} \quad , \tag{96}$$

$$B' = \frac{\theta_0^* \operatorname{erf}(\mu) - \theta_f^* \operatorname{erf}(\nu)}{\operatorname{erf}(\mu) - \operatorname{erf}(\nu)} \quad , \tag{97}$$

μ solución de (90) y $\nu = \operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1))$, $\mu > x_0$,

$$s(t) = \left[\left(\frac{d}{2}S(t) + 1\right)^2 - 1\right]\frac{1}{d} = \frac{1}{d}\left[\left(1 + \frac{d}{2}\frac{S^*(t)}{b\alpha + a}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{d}\left[\left(1 + \frac{d}{2}\frac{\sqrt{t}2\mu}{b\alpha + a}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{d}\left[\left(1 + \frac{d\mu}{b\alpha + a}\sqrt{t}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{d}\left[1 + \frac{2d\mu}{b\alpha + a}\sqrt{t} + \frac{d^2\mu^2}{(b\alpha + a)^2}t - 1\right] = \frac{\mu}{b\alpha + a}\left[2\sqrt{t} + \frac{d\mu}{b\alpha + a}t\right] \quad .$$

Además

$$\gamma^* = 2\mu^2 \quad \text{y} \quad \xi_0^* = \frac{\nu}{\mu} = \frac{\operatorname{erf}^{-1}(g(\mu, p_1))}{\mu} < 1 \quad .$$

Observación 8. *El caso sin término convectivo en* (1)*, es decir con* $d = 0$*, no puede obtenerse de lo hecho previamente para el caso* $d \neq 0$ *y tomando* $d \to 0$*, pues la transformación* $x \to y$ *por medio de* (13) *es la identidad pues*

$$\lim_{d \to 0} \frac{2}{d} \left[(1 + dx)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = x \ , \ \forall \ x > 0.$$

Entonces, el caso $d = 0$ *debe ser resuelto usando otra técnica que será desarrollada en el próximo capítulo.* ■

CONCLUSION. Se obtiene una solución explícita en forma paramétrica del tipo similaridad para un problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura (7) y un término convectivo (6) con flujo de calor (2) o con una condición de temperatura constante en el borde fijo (55).

Para el caso con condición de flujo se siguió y se mejoró [26], obteniendo el teorema de existencia en la Sección II.

Además, también se estudió el problema para la nueva condición de temperatura en el borde fijo y se obtuvo el correspondiente teorema de existencia en la Sección III.

Para ambos casos sus respectivas soluciones explícitas están dadas como funciones de un parámetro el cual está definido como la única solución de una ecuación trascendental.

References

[1] V. Alexiades and A.D. Solomon, *Mathematical modeling of melting and freezing processes,* Hemisphere - Taylor & Francis, Washington (1983).

[2] I. Athanasopoulos, G. Makrakis and J. F. Rodrigues (Eds.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications,* CRC Press, Boca Raton (1999).

[3] J. R. Barber, "*An asymptotic solution for short-time transient heat conduction between two similar contacting bodies*", Int. J. Heat Mass Transfer., **32** (1989), 943-949.

[4] G. Bluman and S. Kumei, "*On the remarkable nonlinear diffusion equation*", J. Math Phys., **21** (1980), 1019-1023.

[5] A. C. Briozzo, M. F. Natale and D. A. Tarzia, "*Determination of unknown thermal coefficients for Storm's-type materials through a phase-change process*", Int. J. Non-Linear Mech., **34** (1999), 324-340.

[6] A. C. Briozzo and D. A. Tarzia, "*An explicit solution for an instantaneous two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients* ", IMA J. of Applied Mathematics, **67** (2002), 249-261.

[7] P. Broadbridge, "*Non-integrability of non-linear diffusion-convection equations in two spatial dimensions*", J. Phys. A: Math. Gen, **19** (1986), 1245-1257.

[8] P. Broadbridge, "*Integrable forms of the one-dimensional flow equation for unsaturated heterogeneous porous media*", J. Phys. A: Math. Gen, **29** (1988), 622-627.

[9] J. R. Cannon, *The one-dimensional heat equation,* Addison - Wesley, Menlo Park, California (1984).

[10] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids,* Oxford University Press, London (1959).

[11] J. M. Chadam and H. Rasmussen H (Eds.), *Free boundary problems involving solids,* Pitman Research Notes in Mathematics Series #**281,** Longman Essex (1993).

[12] M. N. Coelho Pinheiro, "*Liquid phase mass transfer coefficients for bubbles growing in a pressure field: a simplified analysis*", Int. Comm. Heat Mass transfer, **27** (2000), 99-108.

[13] J. Crank, *Free and moving boundary problems,* Clarendon Press Oxford (1984).

[14] J. I. Diaz, M. A. Herrero, A. Liñan and J. L. Vazquez (Eds.), "*Free boundary problems: theory and applications",* Pitman Research Notes in Mathematics Series #**323,** Longman, Essex (1995).

[15] A. Fasano and M. Primicerio (Eds.), "*Nonlinear diffusion problems",* Lecture Notes in Math N. **1224,** Springer Verlag, Berlin (1986).

[16] N. Kenmochi (Ed.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications, I,II,* Gakuto International Series: Mathematical Sciences and Applications, Vol. ***13, 14,*** Gakkotosho, Tokyo (2000).

[17] J. H. Knight, J. R. Philip, "*Exact solutions in nonlinear diffusion",* J. Engrg. Math., **8** (1974), 219-227.

[18] G. Lamé and B. P. Clapeyron, "*Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide",* Annales Chimie Physique, **47** (1831), 250-256.

[19] V. J. Lunardini, *Heat transfer with freezing and thawing,* Elsevier, Amsterdam (1991).

[20] M. F. Natale and D. A. Tarzia, "*Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials*", J. Phys. A: Math. Gen, **33** (2000), 395-404.

[21] R. Philip, "*General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation*", Australian J. of Physics, **13** (1960) 1-12.

[22] A. D. Polyanin and V. V. Dil'man, "*The method of the 'carry over' of integral transforms in non-linear mass and heat transfer problems*", Int. J. Heat Mass Transfer, **33** (1990), 175-181.

[23] R. I. Reeves, "*Variational solutions for two nonlinear boundary-value problems for diffusion with concentration-dependent coefficients*", Quart. Appl. Math., **33** (1975), 291-295.

[24] C. Rogers, "*Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem*", J. Phys. A: Math. Gen, **18** (1985), 105-109.

[25] C. Rogers, "*On a class of moving boundary problems in non-linear heat condition: Application of a Bäcklund transformation*", Int. J. Non-Linear Mech., **21** (1986), 249-256.

[26] C. Rogers and P. Broadbridge, On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of reciprocal transformation, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), **39** (1988), 122-129.

[27] G. C. Sander, I. F. Cunning, W. L. Hogarth and J. Y. Parlange, "*Exact solution for nonlinear nonhysteretic redistribution in vertical soil of finite depth*", Water Resources Research, **27** (1991), 1529-1536.

[28] D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient* σ *of the free boundary* $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ *of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math., **39** (1981), 491-497.

[29] D. A. Tarzia, *A bibliography on moving - free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem,* MAT- Serie A, Rosario, *#2* (2000), with 5869 titles on the subject, 300 pages. See www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)/

[30] L. C. Wrobel and C. A. Brebbia (Eds.), *Computational methods for free and moving boundary problems in heat and fluid flow,* Computational Mechanics Publications, Southampton (1993).

CAPITULO 3

SOLUCION EXPLICITA PARA UN PROBLEMA DE STEFAN A UNA FASE CON CONDUCTIVIDAD TERMICA DEPENDIENTE DE LA TEMPERATURA.

RESUMEN.

Se estudia un problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura y con temperatura constante o condición de flujo de la forma $-q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$ en el borde fijo $x = 0$. En ambos casos se obtienen condiciones suficientes sobre los datos iniciales del problema para obtener una representación paramétrica de la solución de tipo similaridad para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario positivo. Estas soluciones explícitas se obtienen a través de la única solución de una ecuación integral con el tiempo como parámetro.

I. INTRODUCCION.

Se considera un problema de cambio de fase (problema de Stefan) para una ecuación del calor no lineal para una región semi-infinita $x > 0$ con conductividad térmica no lineal $k(\theta)$ dada por

$$k(\theta) = \frac{\rho c}{(a + b\theta)^2} \tag{1}$$

y temperatura de cambio de fase θ_f. Este tipo de conductividad térmica o coeficiente de difusión fue considerado en [4, 5, 7, 8, 16, 18, 21, 24, 26, 29, 32]. Los problemas de cambio de fase aparecen frecuentemente en procesos industriales y otros problemas de interés tecnológicos [1, 2, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20]. Puede encontrarse una extensa bibliografía sobre estos temas en [31].

La formulación matemática de este problema de frontera libre (proceso de fusión) consiste en determinar la evolución de la frontera libre $x = s(t)$ y la distribución de la temperatura $\theta = \theta(x, t)$ satisfaciendo las condiciones

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \tag{2}$$

$$k(\theta(0,t))\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} \ , \ q_0 > 0 \ , \ t > 0 \tag{3}$$

$$k\left(\theta\left(s(t),t\right)\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\left(s(t),t\right)=-\rho l\ \dot{s}(t)\ ,\ t>0 \tag{4}$$

$$\theta\left(s(t),t\right)=\theta_f\ ,\ t>0 \tag{5}$$

$$s(0)=0 \tag{6}$$

donde

$\theta(x,t)$: distribución de temperatura en el material semi-infinito,
q_0 : coeficiente que caracteriza el flujo de calor sobre el borde fijo,
x : variable espacial,
t : tiempo,
$s(t)$: frontera libre (posición de la interfase),
c : calor específico por unidad de masa ,
ρ : densidad de masa,
k : conductividad térmica,
l : calor latente de fusión por unidad de masa,
θ_f : temperatura de cambio de fase,
a, b, d : constantes positivas (parámetros) tales que $a+b\theta_f>0$.

Aquí $-q_0/\sqrt{t}$ caracteriza al flujo de calor sobre el borde $x=0$, el cual es del tipo impuesto en [30]; luego se considerará temperatura constante sobre el borde fijo $x=0$ del tipo (55). Este tipo de condición de flujo (3) fue considerada en numerosos trabajos, e.g. [3, 12, 25]. Otros problemas de este tipo son [6, 22, 26, 27].

El problema de frontera libre $(2)-(6)$ con $k(\theta)$ definido por (1) es un caso particular del presentado en el capítulo 2 [23, 28] tomando el parámetro $d=0$ para la siguiente ecuación

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-v(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\ ,\ 0<x<s(t)\ ,\ t>0 \tag{7}$$

donde la conductividad térmica $k(\theta)$ y el término de velocidad $v(\theta)$ está dado por (1) y

$$v(\theta)=\rho c\frac{d}{2\left(a+b\theta\right)^2} \tag{8}$$

respectivamente, y c, ρ y l son el calor específico, la densidad y el calor latente de fusión del medio respectivamente, además se supone que todos ellos son constantes y los parámetros a, b y d positivos y constantes.

En dicho capítulo se encuentran condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución explícita. Aquí se estudia el caso sin término de velocidad, i.e. $d = 0$ en la ecuación diferencial (7), el cual no puede obtenerse del caso estudiado previamente en [23, 28] para el caso $d \neq 0$. En aquel trabajo se definió la transformación

$$y = \frac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \tag{9}$$

la cual es la identidad si se toma $d \to 0$ pues

$$\lim_{d\to 0} \frac{2}{d}\left[(1+dx)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = x \ , \ \forall \ x > 0.$$

Por lo tanto, el caso $d = 0$ debe resolverse usando otras técnicas, lo cual será realizado en este capítulo.

En la Sección II se prueba la existencia y unicidad de una solución explícita del tipo similaridad para el problema de frontera libre $(2) - (6)$ para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f \geq bl/c$. Se obtienen soluciones explícitas para los casos $a+b\theta_f < bl/c$ y $a+b\theta_f = bl/c$ a través de la solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro.

Además, para el caso $a + b\theta_f < bl/c$ no existe solución al problema de frontera libre $(2) - (6)$.

En la Sección III se reemplaza la condición de flujo (3) por una condición de temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$, dada por (55). Se prueba la existencia y unicidad de una solución explícita del tipo similaridad del problema $(2), (4) - (6)$ y (55) para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario y positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f \geq bl/c$. La solución explícita para los dos casos se obtiene también a través de única solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro. Además, para el caso $a + b\theta_f < bl/c$ se prueba que existe al menos una solución del tipo similaridad para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario y positivo.

II. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON CONDICION DE FLUJO EN EL BORDE FIJO.

Se considera el problema de frontera libre $(2) - (6)$ donde los parámetros a, b y los coeficientes l, c satisfacen la siguiente condición

$$a + b\theta_f > \frac{bl}{c} \ . \tag{10}$$

Lema 1. *Si se define*

$$\Theta = \frac{1}{a + b\theta} \ , \tag{11}$$

entonces el problema (2) − (6) *se transforma en*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Theta^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \ , \ 0 < x < s(t) \ , \ t > 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(0,t) = \frac{w}{\sqrt{t}} \ , \ t > 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(s(t),t) = \frac{bl}{c} \overset{\bullet}{s}(t) \ , \ t > 0 \tag{14}$$

$$\Theta(s(t),t) = \frac{1}{a + b\theta_f} \ , \ t > 0 \tag{15}$$

$$s(0) = 0 \tag{16}$$

donde w es una constante definida por

$$w = \frac{bq_0}{\rho c}. \tag{17}$$

Demostración. De (11) se tiene que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{(-1)}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \frac{1}{\Theta^2} \ \text{ y } \ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{(-1)}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{1}{\Theta^2}$$

luego

$$(2) \Longleftrightarrow \rho c \frac{(-1)}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \frac{1}{\Theta^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho c \Theta^2 \frac{(-1)}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{1}{\Theta^2} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-\rho c}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \frac{1}{\Theta^2} = \frac{-\rho c}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) \Longleftrightarrow (12) \, .$$

Además

$$(3) \Longleftrightarrow \rho c \Theta^2 (0,t) \frac{(-1)}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial x} (0,t) \frac{1}{\Theta^2 (0,t)} = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{\rho c}{b} \frac{\partial \Theta}{\partial x} (0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}} \Longleftrightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial x} (0,t) = -\frac{q_0 b}{\rho c \sqrt{t}} \Longleftrightarrow (13) \, .$$

Las expresiones (14) y (15) se deducen inmediatamente de $(4), (5)$ y (11).■

Lema 2. *Si se define la siguiente transformación*

$$\begin{aligned} \chi(x,t) &= \textstyle\int_0^x \dfrac{d\eta}{\Theta(\eta,t)} \\ \Psi(\chi,t) &= \Theta(x,t) \end{aligned} \tag{18}$$

y

$$S(t) = \chi(s(t),t) \ . \tag{19}$$

entonces el problema $(12)-(16)$ *se lleva a*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \chi^2} - \frac{w}{\sqrt{t}}\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \ , \ 0 < \chi < S(t) \ , \ t > 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}(0,t) = \frac{w}{\sqrt{t}}\Psi(0,t) \ , \ t > 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}(S(t),t) = \frac{1}{(a+b\theta_f)\left(\frac{c}{bl}(a+b\theta_f)-1\right)}\left(\overset{\bullet}{S}(t) - \frac{w}{\sqrt{t}}\right) \ , \ t > 0 \tag{22}$$

$$\Psi(S(t),t) = \frac{1}{a+b\theta_f} \ , \ t > 0 \tag{23}$$

$$S(0) = 0 \tag{24}$$

donde

$$\overset{\bullet}{S}(t) = \left(a + b\theta_f - \frac{bl}{c}\right)\overset{\bullet}{s}(t) + \frac{w}{\sqrt{t}} \ . \tag{25}$$

Demostración. De (18) se tiene que

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{\Theta(x,t)}$$

y

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(x,t) = \int_0^x \frac{-\frac{\partial \Theta}{\partial t}(\eta,t)}{\Theta^2(\eta,t)}d\eta = -\int_0^x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}(\eta,t)\,d\eta =$$

$$-\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)+\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)=\frac{q_0 b}{\rho c\sqrt{t}}-\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)\,.$$

Además

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\,\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{\Theta(x,t)}\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)=\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)}{\Psi(\chi,t)}\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}(x,t)&=-\frac{\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)}{\Theta^2(x,t)}\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)+\frac{1}{\Theta(x,t)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2}(\chi,t)\,\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t)\\
&=\frac{1}{\Theta^2(x,t)}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2}(\chi,t)-\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)\,\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\right)\ ,\\
\frac{\partial\Theta}{\partial t}(x,t)&=\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\chi,t)+\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\,\frac{\partial\chi}{\partial t}(x,t)=\\
&=\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\chi,t)+\left(\frac{bq_0}{\rho c\sqrt{t}}-\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\ .\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando las expresiones anteriores en (12) se tiene

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2}-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}=\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\left(\frac{bq_0}{\rho c\sqrt{t}}-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}\Longleftrightarrow(20)\,.$$

Como $\chi\left(0,t\right)=0$ entonces

$$(13)\Longleftrightarrow\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}\left(\chi\left(0,t\right),t\right)}{\Psi\left(\chi\left(0,t\right),t\right)}=\frac{bq_0}{\rho c\sqrt{t}}\Longleftrightarrow(21)\,.$$

Además

$$\Psi\left(S(t),t\right)=\Psi\left(\chi\left(s(t),t\right),t\right)=\Theta\left(s(t),t\right)=\frac{1}{a+b\theta_f}\ ,$$

y

$$S(0)=\chi\left(s(0),0\right)=0\ .$$

De (19) se tiene

$$\dot{S}\,(t)=\frac{d}{dt}\left(\chi\left(s(t),t\right)\right)=\frac{\partial\chi}{\partial x}\left(s(t),t\right)\dot{s}\,(t)+\frac{\partial\chi}{\partial t}\left(s(t),t\right)$$

$$= \frac{1}{\Theta\left(s(t),t\right)} \overset{\bullet}{s}(t) + \frac{bq_0}{\rho c\sqrt{t}} - \frac{\partial \Theta}{\partial x}\left(s(t),t\right)$$

$$= \left(a + b\theta_f\right) \overset{\bullet}{s}(t) + \frac{bq_0}{\rho c\sqrt{t}} - \frac{lb}{c} \overset{\bullet}{s}(t), \text{ esto es } (25)\,.$$

Por último, utilizando (25), (14) puede reescribirse como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}\left(S(t),t\right) = \Psi\left(S(t),t\right) \frac{bl}{c} \overset{\bullet}{s}(t) = \frac{1}{a+b\theta_f} \frac{bl}{c} \overset{\bullet}{s}(t) =$$

$$\frac{1}{\left(a+b\theta_f\right)} \frac{bl}{c} \frac{1}{\left(a+b\theta_f - \dfrac{bl}{c}\right)} \left(\overset{\bullet}{S}(t) - \frac{bq_0}{\rho c\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(a+b\theta_f\right)} \frac{1}{\left(\dfrac{c}{bl}(a+b\theta_f) - 1\right)} \left(\overset{\bullet}{S}(t) - \frac{bq_0}{\rho c\sqrt{t}}\right) . \blacksquare$$

Teorema 1. *Si se asume una solución de tipo similaridad, es decir, si se define*

$$\xi = \frac{\chi}{2\sqrt{t}} \qquad , \tag{26}$$

y se busca una solución del tipo

$$\Psi\left(\chi,t\right) = \varphi\left(\xi\right) = \varphi\left(\frac{\chi}{2\sqrt{t}}\right) \tag{27}$$

entonces la frontera libre $S(t)$ *del problema* $(20)-(24)$ *debe ser de la siguiente forma*

$$S(t) = 2\Lambda_1\sqrt{t}\ ,\ t>0 \tag{28}$$

con $\Lambda_1 > 0$ *un coeficiente desconocido a ser determinado y el problema* $(20)-(24)$ *se lleva a*

$$\varphi''\left(\xi\right) + 2\varphi'\left(\xi\right)\left(\xi - w\right) = 0\ ,\ 0<\xi<\Lambda_1 \tag{29}$$

$$\varphi'\left(0\right) = 2w\varphi\left(0\right) \tag{30}$$

$$\varphi\left(\Lambda_1\right) = \frac{1}{a+b\theta_f} \tag{31}$$

$$\varphi'(\Lambda_1) = \frac{2}{(a+b\theta_f)\left(\dfrac{c}{bl}(a+b\theta_f)-1\right)}(\Lambda_1 - w)\,. \tag{32}$$

Además se tiene

$$s(t) = 2\lambda_1\sqrt{t} \tag{33}$$

con

$$\lambda_1 = \frac{\Lambda_1 - w}{a + b\theta_f - \dfrac{bl}{c}} \tag{34}$$

y

$$\varphi(\xi) = D_1 \operatorname{erf}(\xi - w) + C_1 \tag{35}$$

donde D_1 *y* C_1 *están dadas por*

$$D_1 = \frac{\sqrt{\pi}w\exp(w^2)}{(a+b\theta_f)\left(1+\sqrt{\pi}w\exp(w^2)\left(\operatorname{erf}(\Lambda_1 - w) + \operatorname{erf}(w)\right)\right)}\ , \tag{36}$$

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{\pi}w\exp(w^2)\operatorname{erf}(w)}{(a+b\theta_f)\left(1+\sqrt{\pi}w\exp(w^2)\left(\operatorname{erf}(\Lambda_1 - w) + \operatorname{erf}(w)\right)\right)}\ . \tag{37}$$

Demostración. De (27) se tiene que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t) = \varphi'(\xi)\frac{1}{2\sqrt{t}}\ ,$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2}(\chi,t) = \varphi''(\xi)\frac{1}{4t}\ ,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\chi,t) = \varphi'(\xi)\frac{\chi}{2}\frac{(-1)}{2t\sqrt{t}} = -\frac{1}{2t}\xi\varphi'(\xi)\ \ ,$$

entonces

$$(20) \Longleftrightarrow -\frac{1}{2t}\xi\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi)\frac{1}{4t} - w\frac{1}{2\sqrt{t}}\varphi'(\xi) \Longleftrightarrow$$

$$-\xi\varphi'(\xi) = \frac{1}{2}\varphi''(\xi) - w\varphi'(\xi) \Longleftrightarrow -2\xi\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi) - 2w\varphi'(\xi) \Longleftrightarrow (29)\,.$$

Además, se tiene

$$(23) \Longleftrightarrow \varphi\left(\frac{S(t)}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{a+b\theta_f} \ , \ \forall t>0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{S(t)}{2\sqrt{t}} = \Lambda_1 \ , \ \forall t>0 \Longleftrightarrow S(t) = 2\Lambda_1\sqrt{t} \ , \qquad (38)$$

donde $\Lambda_1 > 0$ es una constante a determinar.

La ecuación (20) tiene validez para $0 < \chi < S(t)$ entonces la ecuación (29) vale para $0 < \frac{\chi}{2\sqrt{t}} = \xi < \frac{S(t)}{2\sqrt{t}} = \Lambda_1$.

Si $\chi = 0$ entonces $\xi = 0$, luego

$$(21) \Longleftrightarrow \varphi'(0)\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{w}{\sqrt{t}}\varphi(0) \Longleftrightarrow (30)\,.$$

De (23) y (18) se deduce inmediatamente (31).

Por último,

$$(22) \Longleftrightarrow \frac{\varphi'(\Lambda_1)}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{(a+b\theta_f)\left(\frac{c}{bl}(a+b\theta_f)-1\right)}\left(\overset{\bullet}{S}(t) - \frac{w}{\sqrt{t}}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\varphi'(\Lambda_1) = \frac{2\sqrt{t}}{(a+b\theta_f)\left(\frac{c}{bl}(a+b\theta_f)-1\right)}\left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{t}} - \frac{w}{\sqrt{t}}\right) \Longleftrightarrow (32)\,.$$

De (25) y (38) se tiene que

$$\overset{\bullet}{s}(t) = \frac{1}{a+b\theta_f - \dfrac{bl}{c}}\left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{t}} - \frac{w}{\sqrt{t}}\right)$$

entonces

$$s(t) = 2\lambda_1\sqrt{t} \text{ con } \lambda_1 \text{ dada por } (34)\,.$$

Integrando (29) se obtiene que φ está dada por (35) y teniendo en cuenta (30) y (31) se deducen los valores de las constantes D_1 y C_1 dados por (36) y (37).■

Por último, se considera la ecuación (32) y se tiene el siguiente lema:

Lema 3. *Existe una única solución* Λ_1 *de la siguiente ecuación*

$$W_1(x) = W_2(x) \qquad , \qquad x > w \tag{39}$$

donde

$$W_1(x) = \frac{w \exp\left(w^2\right) \exp\left[-\left(x-w\right)^2\right]}{1 + w \exp\left(w^2\right) \sqrt{\pi} \left(\operatorname{erf}\left(x-w\right) + \operatorname{erf}\left(w\right)\right)} \tag{40}$$

y

$$W_2(x) = \frac{bl}{c\left(a + b\theta_f\right) - bl}\left(x - w\right) \quad . \tag{41}$$

Demostración. De (32), y teniendo en cuenta (35), se tiene

$$D_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\Lambda_1 - w\right)^2\right) = \frac{2}{\left(a + b\theta_f\right)\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)}\left(\Lambda_1 - w\right) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\pi} w \exp\left(w^2\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\Lambda_1 - w\right)^2\right]}{\left(a + b\theta_f\right)\left(1 + \sqrt{\pi} w \exp(w^2)(\operatorname{erf}(\Lambda_1 - w) + \operatorname{erf}(w))\right)} = \frac{2}{\left(a + b\theta_f\right)\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)}\left(\Lambda_1 - w\right)$$

es decir, Λ_1 debe ser solución de (39) con W_1 y W_2 dadas por (40) y (41).

W_2 es una función creciente por la condición (10), además $W_2(w) = 0$ y $W_2(+\infty) = +\infty$.

Es fácil probar que W_1 es una función decreciente con $W_1(0) = w > 0$ y $W_1(+\infty) = 0$. Entonces, existe una única solución $\Lambda_1 > w$ de la ecuación (39). ■

Teorema 2. S*e considera la hipótesis* (10).

(i) Si (Θ, s) *es una solución del problema de frontera libre* $(12) - (16)$ *entonces* $\Theta = \Theta(x,t)$ *es una solución, en la variable* x*, de la ecuación integral:*

$$\Theta(x,t) = C_1 + D_1 \operatorname{erf}\left(\frac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}}{2\sqrt{t}} - w\right) \ , \ 0 \leq x \leq s(t) \ , \tag{42}$$

donde $t > 0$ *es un parámetro y* w, D_1 *y* C_1 *son definidas por* $(17), (36)$ *y* (37) *respectivamente, y* $s(t)$ *está dada por* (33) *y* Λ_1 *es la única solución de la ecuación* (39). *Más aún, la función* $Y(x,t)$ *definida por*

$$Y(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^x \tfrac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}-w \qquad , \qquad 0\le x\le s(t)\ ,\ t>0 \tag{43}$$

satisface las condiciones

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{1}{\Theta(x,t)}\ ,\ 0<x<s(t)\ ,\ t>0 \tag{44}$$

$$Y(0,t)=-w\ ,\ t>0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(x,t)=-\frac{1}{2t}\left(Y(x,t)+\frac{D_1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)}\right)\ ,\ 0<x<s(t)\ ,\ t>0 \tag{46}$$

$$Y\left(s(t),t\right)=\Lambda_1-w\ ,\ t>0 \tag{47}$$

(ii) Recíprocamente, si Θ *es una solución de la ecuación integral* (42) *con* s *dada por* (33) *y la función* Y*, definida por* (43) *satisface las condiciones* $(44)-(47)$*, y* w, D_1 *y* C_1 *están definidas por* $(17),(36)$ *y* (37) *respectivamente, y* Λ_1 *es la única solución de la ecuación* (39) *entonces* (Θ,s) *es una solución del problema de frontera libre* $(12)-(16)$.

(iii) La ecuación integral (42) *tiene una única solución para* $t\ge t_0>0$ *con* t_0 *un tiempo arbitrario positivo.*

(iv) El problema de frontera libre $(2)-(6)$ *junto a la hipóteisis* (10) *tiene una única solución del tipo similaridad generalizada* (θ,s) *para* $t\ge t_0>0$ *(con* t_0 *un tiempo arbitrario positivo) la cual está dada por*

$$\theta(x,t) = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta(x,t)}-a\right],\ \ 0<x<s(t),\ \ t\ge t_0>0 \tag{48}$$

$$s(t) = \frac{2\left(\Lambda_1-w\right)}{a+b\theta_f-\dfrac{bl}{c}}\sqrt{t}\ ,\ t\ge t_0>0 \tag{49}$$

donde Θ *es la única solución de la ecuación integral* (42) *donde* Λ_1 *es la única solución de la ecuación* (39)*, y* w, D_1 *y* C_1 *están definidos por* $(17),(36)$ *y* (37) *respectivamente.*

Demostración.

(i) De los cálculos previos se tiene que

$$\Theta(x,t)=\varphi(\xi)=C_1+D_1\operatorname{erf}(\xi-w)=C_1+D_1\operatorname{erf}\left(\frac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}}{2\sqrt{t}}-w\right),$$

es decir, Θ es una solución de la ecuación integral (42). Por cálculos elementales la función Y, definida por (43), satisface las condiciones $(44),(45)$ y

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(x,t)=-\frac{1}{4t\sqrt{t}}\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^x \Theta_{xx}(\eta,t)d\eta=$$

$$=-\frac{1}{2t}\left(Y(x,t)+w\right)-\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\Theta_x(x,t)-\Theta_x(0,t)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{Y(x,t)}{\sqrt{t}}+\Theta_x(x,t)\right)=-\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{Y(x,t)}{\sqrt{t}}+\frac{D_1}{\sqrt{\pi t}}\frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)}\right)$$

esto es (46). Finalmente se tiene

$$Y\left(s(t),t\right)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^{s(t)}\frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}-w=\frac{\chi\left(s(t),t\right)}{2\sqrt{t}}-w=\frac{S\left(t\right)}{2\sqrt{t}}-w=\Lambda_1-w$$

esto es (47).

(ii) Para probar que (Θ,s) es una solución del problema de frontera libre $(12)-(16)$ se tiene que:

a)

$$\Theta_{xx}(x,t)=\left(\frac{D_1}{\sqrt{\pi t}}\frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)}\right)_x=$$

$$=-\frac{D_1}{\sqrt{\pi t}}\frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta^2(x,t)}\left(Y(x,t)+\frac{D_1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)}\right);$$

b)

$$\Theta_t(x,t)=\frac{2D_1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-Y^2(x,t)\right)Y_t(x,t)=$$

$$= -\frac{D_1}{\sqrt{\pi}t}\exp\left(-Y^2(x,t)\right)\left(Y(x,t)+\frac{D_1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)}\right)$$

esto es la ecuación (12);

c)

$$\Theta(0,t) = C_1 - D_1\operatorname{erf}(w) = \frac{D_1}{\sqrt{\pi}w\exp(w^2)} \ ;$$

d)

$$\Theta_x(0,t) = \frac{D_1}{\sqrt{\pi t}}\frac{\exp\left(-Y^2(0,t)\right)}{\Theta(0,t)} = \frac{w}{\sqrt{t}} \ , \text{ esto es } (13);$$

e)

$$\Theta(s(t),t) = C_1 + D_1\operatorname{erf}(\Lambda_1 - w) = \frac{1}{a+b\theta_f} \ , \text{ esto es } (15);$$

f)

$$\Theta_x(s(t),t) = \frac{D_1}{\sqrt{\pi t}}\frac{\exp\left(-Y^2(s(t),t)\right)}{\Theta(s(t),t)} = \frac{(a+b\theta_f)\,D_1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-(\Lambda_1-w)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}W_1(\Lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{t}}W_2(\Lambda_1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{bl}{c(a+b\theta_f)-bl}(\Lambda_1 - w) = \frac{bl\lambda_1}{c\sqrt{t}} = \frac{bl}{c}\dot{s}(t) \ , \text{ esto es } (14)$$

(iii) Ahora para completar la prueba, sólo se debe demostrar la existencia de una solución de la ecuación integral (42). Si se define $Y(x,t)$ por (43) entonces, la ecuación (42) es equivalente al siguiente problema diferencial de Cauchy

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{1}{(C_1 + D_1\operatorname{erf}(Y(x,t)))} \equiv G_1(x,t,Y(x,t)) \quad , \quad 0<x<s(t) \ , \ t>0\\ &Y(0,t) = -w \ ,\end{aligned} \tag{50}$$

con $t>0$ un parámetro positivo. Se tiene $\left|\frac{\partial G_1}{\partial Y}\right| \leq \frac{D_1}{C_1^2\sqrt{\pi t}}$, acotada para todo $t \geqslant t_0 > 0$, $0 \leq x \leq s(t)$, para un tiempo arbitrario y positivo t_0. Entonces, el problema (50) (i.e. la ecuación integral (42)) tiene una única solución para $t \geq t_0 > 0$, para un tiempo positivo arbitrario t_0.

(iv) Se tiene que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{b}\frac{-\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}}{\Theta^2} \Longrightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -b\Theta^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{b}\frac{-\dfrac{\partial \Theta}{\partial t}}{\Theta^2} \Longrightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -b\Theta^2 \frac{\partial \theta}{\partial t} \, .$$

Se debe verificar (2) entonces

$$\rho c \frac{1}{b}\left(-\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)\frac{1}{\Theta^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho c}{(a+b\theta)^2}\frac{1}{b}\left(-\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\frac{1}{\Theta^2}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\rho c}{b}\frac{\partial \Theta}{\partial t}\frac{1}{\Theta^2} = \frac{\rho c}{b}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \Longleftrightarrow (12)\, .$$

Además

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(0,t) = \frac{w}{\sqrt{t}} \Longrightarrow -b\Theta^2(0,t)\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = \frac{w}{\sqrt{t}} \Longrightarrow$$

$$\frac{-b}{(a+b\theta(0,t))^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = \frac{w}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \frac{-b}{\rho c}\frac{\rho c}{(a+b\theta(0,t))^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = \frac{b q_0}{\rho c\sqrt{t}}$$

$$\Longrightarrow k(\theta(0,t))\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}\, .$$

Como Θ verifica la ecuación (14) se tiene que

$$-b\Theta^2(s(t),t)\frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t),t) = \frac{bl}{c}\overset{\bullet}{s}(t) \Longleftrightarrow \frac{-b}{\rho c}\frac{\rho c}{(a+b\theta(s(t),t))^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t),t) = \frac{bl}{c}\overset{\bullet}{s}(t)$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{b}{\rho c}k(\theta(s(t),t))\frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t),t) = \frac{bl}{c}\overset{\bullet}{s}(t) \Longleftrightarrow k(\theta(s(t),t))\frac{\partial \theta}{\partial x}(s(t),t) = -\rho l\overset{\bullet}{s}(t)\, .$$

Finalmente

$$\Theta\left(s(t),t\right)=\frac{1}{a+b\theta_f}\Longrightarrow\frac{1}{a+b\theta\left(s(t),t\right)}=\frac{1}{a+b\theta_f}\Longrightarrow(5)\,.\blacksquare$$

Observación 1. *$Y(x,t)$ no tiene límite en $(0,0)$ porque $Y(0,t)=-w=-\frac{bq_0}{\rho c}<0$ para $t>0$ y $\lim\limits_{t\mapsto 0}Y(s(t),t)=\Lambda_1-w>0$ para todo $t>0$.*

Si Θ es la solución de la ecuación integral (42) entonces Θ es estrictamente monótona en la variable x. Se obtiene que $\theta(x,t)=\left(1/\Theta(x,t)-a\right)/b$ no tiene límite cuando $(x,t)\rightarrow(0,0)$ pero $\theta(x,t)$ está acotada en un entorno de $(0,0)$ verificando que

$$\begin{aligned}\theta_f &= \lim_{(\eta,\tau)\mapsto(0,0)}\inf\ \theta(\eta,\tau)\leq\theta(x,t)\leq\lim_{(\eta,\tau)\mapsto(0,0)}\sup\ \theta(\eta,\tau)=\\ &= \theta_f+\frac{a+b\theta_f}{b}\sqrt{\pi}w\exp(w^2)\left(\operatorname{erf}(w)+\operatorname{erf}(\Lambda_1-w)\right).\blacksquare\end{aligned}$$

Cuando la hipótesis (10) no se satisface se puede seguir un método análogo al descripto anteriormente para obtener el siguiente resultado:

Teorema 3.

(i) El resultado del Teorema 2 vale si se reemplaza la condición (10) por $a+b\theta_f=\dfrac{bl}{c}$. Además, en este caso, la solución del problema de frontera libre $(2)-(6)$ está dada por

$$\theta(x,t)=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta(x,t)}-a\right] \tag{51}$$

$$s(t)=2D_0\sqrt{\frac{t}{\pi}} \tag{52}$$

donde Θ es la única solución de la siguiente ecuación integral

$$\Theta(x,t)=D_0\operatorname{erf}\left(\frac{\int_0^x\frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}}{2\sqrt{t}}-w\right)+\frac{c}{bl}\ ,\ 0\leq x\leq s(t)\ , \tag{53}$$

con

$$D_0=\frac{q_0\sqrt{\pi}\exp(w^2)}{\rho l\left(1+\sqrt{\pi}w\exp(w^2)\operatorname{erf}(w)\right)} \tag{54}$$

para $t \geq t_0 > 0$, $0 \leq x \leq s(t)$ *para cualquier tiempo arbitrario positivo* t_0 *y* w *definida por* (17).

(ii) No existe solución al problema de frontera libre $(2) - (6)$ *para el caso* $a + b\theta_f < \dfrac{bl}{c}$.

Demostración. (i) Análogamente al caso anterior, se define $(11), (18)$ y (19) y se obtienen $(20) - (21)$, $(23) - (24)$.

Además, en este caso se tiene

$$\overset{\bullet}{S}(t) = \frac{\partial \chi}{\partial x}(s(t), t)\,\overset{\bullet}{s}(t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(s(t), t) =$$

$$\frac{1}{\Theta(s(t), t)}\,\overset{\bullet}{s}(t) + \frac{bq_0}{\rho c}\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\partial \Theta}{\partial x}(s(t), t) =$$

$$(a + b\theta_f)\,\overset{\bullet}{s}(t) + \frac{bq_0}{\rho c}\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{lb}{c}\,\overset{\bullet}{s}(t) = \frac{bq_0}{\rho c}\frac{1}{\sqrt{t}}\ ,$$

entonces

$$S(t) = 2\frac{bq_0}{\rho c}\sqrt{t} = 2w\sqrt{t}\ .$$

En lugar de la ecuación (22) se obtiene

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}(S(t), t) = \overset{\bullet}{s}(t)\ .$$

Se define ahora (26) y se buscan soluciones del tipo (27). Se tiene, como en el teorema 1, (29) y (30) y φ es de la forma

$$\varphi(\xi) = K\exp(w^2)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(\xi - w) + \frac{c}{bl}\ .$$

Además

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}(S(t), t) = \varphi'\left(\frac{bq_0}{\rho c}\right) = \varphi'(w) = \overset{\bullet}{s}(t)$$

y

$$\varphi\left(\frac{bq_0}{\rho c}\right) = \varphi(w) = \frac{c}{bl}\ .$$

La constante K está dada por

$$K = \frac{2q_0}{\rho l} \frac{1}{(1 + \sqrt{\pi} w \exp(w^2) \operatorname{erf}(w))} \ .$$

Por (18) se obtiene (51) y como

$$\Theta(x,t) = \Psi(\chi,t) = \varphi\left(\frac{\chi}{2\sqrt{t}}\right)$$

se obtiene (53) .

La demostración de la existencia de solución de la ecuación integral para este caso es análoga a la del teorema 1.

Por último falta obtener la expresión de la frontera libre.

Por (53) se tiene que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,t) = D_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)} - w\right)^2\right) \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\Theta(x,t)}$$

entonces

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(s(t),t) = D_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\Theta(s(t),t)} \ ,$$

pues

$$Y\left(s(t),t\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^{s(t)} \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)} - w = \frac{1}{2\sqrt{t}} S(t) - w = \frac{1}{2\sqrt{t}} 2w\sqrt{t} - w = 0.$$

Luego, como $\Theta\left(s(t),t\right) = \frac{c}{bl}$ y $\frac{\partial \Theta}{\partial x}\left(s(t),t\right) = \frac{bl}{c} \overset{\bullet}{s}(t)$, se tiene que

$$\frac{bl}{c} \overset{\bullet}{s}(t) = \frac{D_0}{\sqrt{\pi t}} \ ,$$

entonces como $s(0) = 0$ se obtiene (52) con D_0 definido en (54) .

(ii) Si $a + b\theta_f < \frac{bl}{c}$ entonces para $x > w$, la función W_2 definida en (41) es negativa, por lo tanto no existe solución a la ecuación (39) .$\blacksquare$

Observación 2. $\theta\left(0,t\right)$ *es constante.*

Como

$$\theta\left(x,t\right)=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta(x,t)}-a\right]$$

entonces

$$\theta\left(0,t\right)=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta(0,t)}-a\right]=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{C_1+D_1\operatorname{erf}\left(-\omega\right)}-a\right]=$$

$$\frac{1}{b}\left[\left(a+b\theta_f\right)\left[1+\sqrt{\pi}\omega e^{\omega^2}\left(\operatorname{erf}\left(\Lambda_1-\omega\right)+\operatorname{erf}\left(\omega\right)\right)\right]-a\right]=$$

$$\frac{1}{b}\left[a+b\theta_f+\left(a+b\theta_f\right)\left[\sqrt{\pi}\omega e^{\omega^2}\left(\operatorname{erf}\left(\Lambda_1-\omega\right)+\operatorname{erf}\left(\omega\right)\right)\right]-a\right]=$$

$$\frac{1}{b}\left[b\theta_f+\left(a+b\theta_f\right)\left[\sqrt{\pi}\omega e^{\omega^2}\left(\operatorname{erf}\left(\Lambda_1-\omega\right)+\operatorname{erf}\left(\omega\right)\right)\right]\right]\ .$$

Como la temperatura es constante en el borde fijo $x=0$ *tiene sentido plantear en la siguiente sección el problema cambiando la condición de flujo por una condición de temperatura.*■

Observación 3.

$$a+b\theta\left(0,t\right)=a+b\theta_f+\left(a+b\theta_f\right)\left[\sqrt{\pi}\omega e^{\omega^2}\left(\operatorname{erf}\left(\Lambda_1-\omega\right)+\operatorname{erf}\left(\omega\right)\right)\right]$$

$$\left(a+b\theta_f\right)\left[1+\sqrt{\pi}\omega e^{\omega^2}\left(\operatorname{erf}\left(\Lambda_1-\omega\right)+\operatorname{erf}\left(\omega\right)\right)\right]>0,$$

entonces, como también $a+b\theta_f>0$, *resulta por el Principio del Máximo que la conductividad térmica está bien definida.*■

III. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON CONDICION DE TEMPERATURA EN EL BORDE FIJO.

En esta sección se considera el problema de frontera libre dado por (2) , $(4)-(6)$ y la condición de temperatura

$$\theta(0,t)=\theta_0\ ,\ t>0 \qquad (\theta_0>\theta_f) \tag{55}$$

en lugar de la condición de flujo (3) en el borde fijo $x=0$. La conductividad térmica no lineal está dada por (1). Se supone también que se cumple la condición (10).

Lema 4. *Si se define* Θ *como en* (11), *el problema de frontera libre* $(2),(4)-(6)$ *y* (55) *se transforma en* (12), $(14)-(16)$ *y*

$$\Theta(0,t)=\frac{1}{a+b\theta_0}\ . \tag{56}$$

Demostración. De igual modo que en el caso flujo se obtienen las ecuaciones $(12),(14)-(16)$.

Además
$$\Theta(0,t)=\frac{1}{a+b\theta\,(0,t)}=\frac{1}{a+b\theta_0}\ .\blacksquare$$

Lema 5. *Si se define* (18) *y* (19), *se obtiene* $(23),(24)$ *y*

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\chi,t)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2}(\chi,t)-(a+b\theta_0)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(0,t)\ ,\ 0<\chi<S(t)\ ,\ t>0 \tag{57}$$

$$\Psi(0,t)=\frac{1}{a+b\theta_0} \tag{58}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(S(t),t)=\frac{1}{(a+b\theta_f)\left[\dfrac{c}{bl}\,(a+b\theta_f)-1\right]}\left(\overset{\bullet}{S}\,(t)-(a+b\theta_0)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(0,t)\right) \tag{59}$$

y

$$\overset{\bullet}{S}\,(t)=\overset{\bullet}{s}\,(t)\left(a+b\theta_f-\frac{bl}{c}\right)+(a+b\theta_0)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(0,t). \tag{60}$$

Demostración. Las ecuaciones (23) y (24) se obtienen como en el caso flujo.

Además
$$\frac{\partial\chi}{\partial t}\,(\chi,t)=-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,(x,t)+\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,(0,t)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\left(-\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)+\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\chi,t)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\frac{1}{\Theta(x,t)}\Rightarrow\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(0,t)\left(a+b\theta_0\right)\ .$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}(x,t)=-\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)+\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(0,t)\left(a+b\theta_0\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\chi,t),$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2}(\chi,t)\frac{1}{\Theta^2(x,t)}+\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\frac{(-1)}{\Theta^2(x,t)}\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)\ .$$

Reemplazando estos cálculos en (12) se obtiene (57).
Si $x=0$ entonces $\chi(0,t)=0$, luego

$$\Psi(0,t)=\theta(0,t)=\frac{1}{a+b\theta_0}\ .$$

Como

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(\chi,t)\frac{1}{\Theta(x,t)}$$

y además vale (14) se tiene

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(S(t),t)\frac{1}{\Theta(s(t),t)}=\frac{lb}{c}\overset{\bullet}{s}(t). \tag{61}$$

Además

$$\overset{\bullet}{S}(t)=\frac{\partial\chi}{\partial x}(s(t),t)\overset{\bullet}{s}(t)+\frac{\partial\chi}{\partial t}(s(t),t)=$$

$$\frac{1}{\Theta(s(t),t)}\overset{\bullet}{s}(t)+\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial\Theta}{\partial x}(s(t),t)=$$

$$(a+b\theta_f)\overset{\bullet}{s}(t)+\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)-\frac{bl}{c}\overset{\bullet}{s}(t)=(60)\,.$$

De (61) y de (60) se obtiene (59).■

Teorema 4. *Si se asume una solución de tipo similaridad, es decir, si se define* (26) *y se buscan soluciones del tipo* (27) *entonces la frontera libre del problema* $(23),(24),(57)-(59)$ *debe ser de la forma*

$$S(t)=2\Lambda_2\sqrt{t}$$

con Λ_2 un coeficiente desconocido a ser determinado. Además, el problema se transforma en

$$\varphi''(\xi) + 2\varphi'(\xi)\left(\xi - \frac{\varphi'(0)}{2}(a + b\theta_0)\right) = 0\ ,\ 0 < \xi < \Lambda_2 \tag{62}$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{a + b\theta_0} \tag{63}$$

$$\varphi(\Lambda_2) = \frac{1}{a + b\theta_f} \tag{64}$$

$$\varphi'(\Lambda_2) = \frac{2}{(a + b\theta_f)\left[\frac{c}{bl}(a + b\theta_f) - 1\right]}\left(\Lambda_2 - \frac{\varphi'(0)}{2}(a + b\theta_0)\right). \tag{65}$$

Además se tiene

$$s(t) = 2\lambda_2\sqrt{t} \tag{66}$$

con

$$\lambda_2 = \frac{\Lambda_2 - r}{a + b\theta_f - \frac{bl}{c}} \tag{67}$$

donde

$$r = \frac{\varphi'(0)(a + b\theta_0)}{2} \tag{68}$$

y

$$\varphi(\xi) = D_2 \operatorname{erf}(\xi - r) + C_2\ , \tag{69}$$

con

$$D_2 = \frac{b(\theta_0 - \theta_f)}{(a + b\theta_f)(a + b\theta_0)(\operatorname{erf}(r) + \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r))}\ , \tag{70}$$

$$C_2 = \frac{1}{a + b\theta_f}\left(1 - \frac{b(\theta_0 - \theta_f)\operatorname{erf}(\Lambda_2 - r)}{(a + b\theta_0)(\operatorname{erf}(r) + \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r))}\right)\ . \tag{71}$$

Más aún, la función φ está dada por la siguiente expresión

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{a+b\theta_f}\left[1+\frac{b\left(\theta_0-\theta_f\right)\left(\operatorname{erf}\left(\xi-r\right)-\operatorname{erf}\left(\Lambda_2-r\right)\right)}{\left(a+b\theta_0\right)\left(\operatorname{erf}\left(r\right)+\operatorname{erf}\left(\Lambda_2-r\right)\right)}\right] \ . \tag{72}$$

Demostración. Las expresiones de las derivadas de Ψ ya fueron obtenidas en el caso flujo entonces se sustituyen en (57) y se obtiene

$$-\frac{1}{2t}\xi\varphi'\left(\xi\right) = \frac{1}{4t}\xi\varphi''\left(\xi\right) - \left(a+b\theta_0\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}\varphi'\left(0\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}\varphi'\left(\xi\right)$$

$$\Longleftrightarrow -\xi\varphi'\left(\xi\right) = \frac{1}{2}\varphi''\left(\xi\right) - \left(a+b\theta_0\right)\frac{1}{2}\varphi'\left(0\right)\varphi'\left(\xi\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\varphi''\left(\xi\right) + \xi\varphi'\left(\xi\right) - \frac{a+b\theta_0}{2}\varphi'\left(0\right)\varphi'\left(\xi\right) = 0 \Longleftrightarrow (62) \ .$$

La expresión (63) se deduce inmediatamente de (26), (27) y de (58).

Además, como

$$\Psi(S(t),t) = \frac{1}{a+b\theta_f} \Longleftrightarrow \varphi\left(\frac{S(t)}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{a+b\theta_f} \ , \ \forall t>0 \Longrightarrow$$

$$\frac{S(t)}{2\sqrt{t}} = \Lambda_2 \ , \ \forall t>0 \Longrightarrow S(t) = 2\Lambda_2\sqrt{t} \ ,$$

y también se tiene (64).

Como

$$\overset{\bullet}{S}\left(t\right) = \frac{\Lambda_2}{\sqrt{t}} \ , \ \frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(S(t),t) = \frac{\varphi'\left(\Lambda_2\right)}{2\sqrt{t}} \text{ y } \frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(0,t) = \frac{\varphi'\left(0\right)}{2\sqrt{t}}$$

se tiene

$$(59) \Longleftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}\varphi'\left(\Lambda_2\right) = \frac{\dfrac{\Lambda_2}{\sqrt{t}} - \left(a+b\theta_0\right)\dfrac{\varphi'\left(0\right)}{2\sqrt{t}}}{\left(a+b\theta_f\right)\left(\dfrac{c}{bl}\left(a+b\theta_f\right)-1\right)} \Longleftrightarrow (65) \ .$$

Por otro lado

$$(60) \Longleftrightarrow \left(a+b\theta_f-\frac{bl}{c}\right)\overset{\bullet}{s}\left(t\right) = \overset{\bullet}{S}\left(t\right) - \left(a+b\theta_0\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(0,t)$$

$$\Longleftrightarrow \left(a + b\theta_f - \frac{bl}{c}\right) \overset{\bullet}{s}(t) = \frac{\Lambda_2}{\sqrt{t}} - (a + b\theta_0)\frac{\varphi'(0)}{2\sqrt{t}}$$

$$\Longrightarrow \overset{\bullet}{s}(t) = \frac{1}{a + b\theta_f - \dfrac{bl}{c}}\left(\frac{2\Lambda_2 - (a + b\theta_0)\varphi'(0)}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$\Longrightarrow s(t) = \frac{1}{a + b\theta_f - \dfrac{bl}{c}}\left(2\Lambda_2 - (a + b\theta_0)\varphi'(0)\right)\sqrt{t}$$

$$\Longrightarrow s(t) = 2\lambda_2\sqrt{t}\ ,$$

con λ_2 definida por (67).

Análogamente a lo realizado en el caso flujo, integrando (62) se tiene que

$$\varphi(\xi) = D_2 \operatorname{erf}(\xi - r) + C_2$$

con D_2 y C_2 constantes a determinar de las condiciones (63) y (64) :

$$\varphi(0) = D_2 \operatorname{erf}(-r) + C_2 \tag{73}$$

$$\varphi(\Lambda_2) = D_2 \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r) + C_2\ . \tag{74}$$

Restando (73) con (74) se tiene

$$\frac{1}{a + b\theta_0} - \frac{1}{a + b\theta_f} = D_2\left(\operatorname{erf}(-r) - \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r)\right)$$

$$\frac{b(\theta_f - \theta_0)}{(a + b\theta_0)(a + b\theta_f)} = D_2(-1)\left(\operatorname{erf}(\Lambda_2 - r) + \operatorname{erf}(r)\right)\ ,$$

entonces se tiene (70).

Reemplazando el valor obtenido para D_2 en (70) se tiene (71).

Falta obtener (72). Para ello basta sustituir los valores de C_2 y D_2 en (69). ■

Ahora si se consideran las ecuaciones (65) y (68) para determinar las incógnitas Λ_2 y r se tiene el siguiente Lema.

Lema 6. *Existe una única solución r de la siguiente ecuación*

$$W_3(x) = W_4(x) \qquad , \qquad x > r_1 = F^{-1}(1) \tag{75}$$

donde

$$W_3(x) = \operatorname{erf}^{-1}(F(x)) \exp\left(\left(\operatorname{erf}^{-1}(F(x))\right)^2\right) , \tag{76}$$

$$W_4(x) = \left(\frac{c}{bl}(a + b\theta_f) - 1\right) \frac{(a + b\theta_f)\, x \exp(x^2)}{(a + b\theta_0)} , \tag{77}$$

y

$$F(x) = -\operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{b(\theta_0 - \theta_f)}{(a + b\theta_f)} \frac{\exp(-x^2)}{x} , \; x > 0 . \tag{78}$$

Además resulta

$$\Lambda_2 = r + \operatorname{erf}^{-1}[F(r)] \; , \; \textit{con } r > r_1 = F^{-1}(1) .$$

Demostración. Se tiene que

$$r = \frac{\varphi'(0)(a + b\theta_0)}{2} = \frac{(a + b\theta_0)}{2} D_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-r^2\right) =$$

$$\frac{a + b\theta_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-r^2)\, b(\theta_0 - \theta_f)}{(a + b\theta_f)(a + b\theta_0)(\operatorname{erf}(r) + \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r))}$$

entonces

$$\operatorname{erf}(r) + \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r) = \frac{b(\theta_0 - \theta_f)}{\sqrt{\pi} r (a + b\theta_f) \exp(r^2)} , \tag{79}$$

luego

$$\operatorname{erf}(\Lambda_2 - r) = -\operatorname{erf}(r) + \frac{b(\theta_0 - \theta_f)}{\sqrt{\pi} r (a + b\theta_f) \exp(r^2)} \Longleftrightarrow \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r) = F(r) ,$$

con F definida en (78) .

De [6] se sabe que $F(0^+) = +\infty, F(+\infty) = -1$ y que F es una función decreciente, entonces existe $r_1 = F^{-1}(1) > 0$ tal que
$F(r) \in (-1, 1)$ para todo $r > r_1$, es decir

$$\Lambda_2 - r = \operatorname{erf}^{-1}[F(r)] \; , \text{ con } r > r_1 = F^{-1}(1) . \tag{80}$$

Se debe demostrar ahora la existencia y unicidad de r.

Teniendo en cuenta (65) se tiene que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} D_2 \exp\left(-\left(\Lambda_2 - r\right)^2\right) = \frac{2\left(\Lambda_2 - r\right)}{\left(a + b\theta_f\right)\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{b\left(\theta_0 - \theta_f\right)\exp\left(-\left(\Lambda_2 - r\right)^2\right)}{\sqrt{\pi}\left(a + b\theta_f\right)\left(a + b\theta_0\right)\left(\operatorname{erf}(r) + \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r)\right)} = \frac{\left(\Lambda_2 - r\right)}{\left(a + b\theta_f\right)\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{b\left(\theta_0 - \theta_f\right)\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)}{\sqrt{\pi}\left(a + b\theta_0\right)\left(\operatorname{erf}(r) + \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r)\right)} = \left(\Lambda_2 - r\right)\exp\left(\left(\Lambda_2 - r\right)^2\right) \ .$$

Ahora, teniendo en cuenta (79) se tiene

$$\frac{b\left(\theta_0 - \theta_f\right)\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)}{\sqrt{\pi}\left(a + b\theta_0\right)\dfrac{b\left(\theta_0 - \theta_f\right)}{\sqrt{\pi}r\left(a + b\theta_f\right)\exp(r^2)}} = \left(\Lambda_2 - r\right)\exp\left(\left(\Lambda_2 - r\right)^2\right) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)\left(a + b\theta_f\right)}{\left(a + b\theta_0\right)} r\exp(r^2) = \left(\Lambda_2 - r\right)\exp\left(\left(\Lambda_2 - r\right)^2\right) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{c}{bl}\left(a + b\theta_f\right) - 1\right)\left(a + b\theta_f\right)}{\left(a + b\theta_0\right)} r\exp(r^2) \underset{(80)}{=} \operatorname{erf}^{-1}(F(r))\exp\left(\left(\operatorname{erf}^{-1}(F(r))\right)^2\right) \ .$$

Entonces r debe ser solución de (75).

Es fácil ver que $W_3(r_1) = +\infty, W_3(r_0) = 0, W_3(+\infty) = -\infty$ y que W_3 es una función decreciente para todo $x > r_1$. Además, de (10) se tiene que $W_4(0^+) = 0, W_4(+\infty) = +\infty$ y que W_4 es una función creciente. Por lo tanto, existe una única solución $r \in (r_1, r_0)$ $(F(r) \in (0,1))$ de la ecuación (75) donde $r_0 = F^{-1}(0)$ y entonces

$$\Lambda_2 = r + \operatorname{erf}^{-1}\left[-\operatorname{erf}(r) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{b\left(\theta_0 - \theta_f\right)}{\left(a + b\theta_f\right)}\frac{\exp(-r^2)}{r}\right] > r \ , \qquad (81)$$

con lo cual se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 5. *Se supone válida la hipótesis* (10)*.*

(i) Si (Θ, s) *es una solución del problema de frontera libre* $(12),(14)-(16)$ *y* (56) *entonces* $\Theta = \Theta(x,t)$ *es una solución, en la variable* x*, de la ecuación integral:*

$$\Theta(x,t) = \frac{1}{a+b\theta_f}\left[1 - \frac{b(\theta_0-\theta_f)}{(a+b\theta_0)} \frac{\left(\operatorname{erf}(\Lambda_2 - r) - \operatorname{erf}\left(\frac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}}{2\sqrt{t}} - r\right)\right)}{\operatorname{erf}(r) + \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r)}\right], 0 \leq x \leq s(t), \tag{82}$$

donde $t > 0$ *es un parámetro y* $s(t)$ *está dada por* (66) , Λ_2 *está dada por* (81) *y* $r \in (F^{-1}(1), F^{-1}(0))$ *es la única solución de la ecuación* (75) *donde la función* F *está definida por* (78)*.*
Además la función $Y(x,t)$ *definida por*

$$Y(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)} - r\ ,\ 0 \leq x \leq s(t)\ ,\ t > 0 \tag{83}$$

satisface las siguientes condiciones

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\Theta(x,t)}\ ;\ \ ,\ 0 < x < s(t)\ ,\ t > 0 \tag{84}$$

$$Y(0,t) = -r\ ,\ t > 0 \tag{85}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{2t}\left(Y(x,t) + \frac{D_2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)}\right)\ ,\ \ ,\ 0 \leq x \leq s(t)\ ,\ t > 0 \tag{86}$$

$$Y\left(s(t), t\right) = \Lambda_2 - r\ ,\ t > 0 \tag{87}$$

donde D_2 *está definida por* (70)*.*

(ii) Recíprocamente, si Θ *es una solución de la ecuación integral* (82) *con* s *dada por* (66) *y la función* Y*, definida por* (83) *satisface las condiciones* $(84)-(87)$, r *es la única solución de la ecuación* (75)*,* D_2 *está definida por* (70)*, y* Λ_2 *dada por* (81) *entonces* (Θ, s) *es una solución del problema de frontera libre* $(12),(14)-(16)$ *y* (56)*.*

(iii) La ecuación integral (82) *tiene una única solución para* $t \geq t_0 > 0$ *con* t_0 *un tiempo positivo y arbitrario.*

(iv) El problema de de frontera libre $(2), (4) - (6)$ *y* (55) *satisfaciendo la hipótesis* (10) *tiene una única solución del tipo similaridad generalizada* (θ, s) *para* $t \geq t_0 > 0$ *(con* t_0 *un tiempo positivo arbitrario), la cual está dada por*

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta(x,t)} - a\right] \\ s(t) &= \frac{2(\Lambda_2 - r)}{a + b\theta_f - \dfrac{bl}{c}}\sqrt{t} \end{aligned} \tag{88}$$

donde Θ *es la única solución de la ecuación integral* (82), Λ_2 *dada por* (81) *y* r *es la única solución de la ecuación* (75).

Demostración. (i) De los cálculos previos se tiene que

$$\Theta(x,t) = \varphi(\xi) = C_2 + D_2 \operatorname{erf}(\xi - r) = C_2 + D_2 \operatorname{erf}\left(\frac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}}{2\sqrt{t}} - r\right),$$

es decir, Θ es solución de la ecuación integral (82). La función Y, definida por (83), satisface las condiciones $(84), (85)$, y

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{4t\sqrt{t}}\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^x \Theta_{xx}(\eta,t)d\eta =$$

$$= -\frac{1}{2t}\left(Y(x,t) + r\right) - \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\Theta_x(x,t) - \Theta_x(0,t)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{Y(x,t)}{\sqrt{t}} + \Theta_x(x,t)\right) = -\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{Y(x,t)}{\sqrt{t}} + \frac{D_2}{\sqrt{\pi t}}\frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)}\right)$$

esto es (86). Finalmente se tiene

$$Y\left(s(t),t\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^{s(t)} \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)} - r = \frac{\chi\left(s(t),t\right)}{2\sqrt{t}} - r = \frac{S\left(t\right)}{2\sqrt{t}} - r = \Lambda_2 - r$$

que es (87).

(ii) Para probar que (Θ, s) es una solución del problema de frontera libre $(12),(14)-(16)$ y (56), bajo la hipótesis (10), se tiene que:

a)

$$\Theta_{xx}(x,t) = \left(\frac{D_2}{\sqrt{\pi t}} \frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)} \right)_x =$$

$$= -\frac{D_2}{\sqrt{\pi t}} \frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta^2(x,t)} \left(Y(x,t) + \frac{D_2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)} \right);$$

b)

$$\Theta_t(x,t) = \frac{2D_2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-Y^2(x,t)\right) Y_t(x,t) =$$

$$= -\frac{D_2}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-Y^2(x,t)\right) \left(Y(x,t) + \frac{D_2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-Y^2(x,t)\right)}{\Theta(x,t)} \right)$$

esto es (12);

c)

$$\Theta(0,t) = C_2 - D_2 \operatorname{erf}(r) = \frac{1}{a+b\theta_f} - \frac{b\left(\theta_0 - \theta_f\right)}{(a+b\theta_f)(a+b\theta_0)} = \frac{1}{a+b\theta_0}$$

esto es (56);

e)

$$\Theta(s(t),t) = C_2 + D_2 \operatorname{erf}(\Lambda_2 - r) = \frac{1}{a+b\theta_f}\ , \text{ esto es } (15);$$

f)

$$\Theta_x(s(t),t) = \frac{D_2}{\sqrt{\pi t}} \frac{\exp\left(-Y^2(s(t),t)\right)}{\Theta(s(t),t)} = \frac{(a+b\theta_f)\, D_2}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-(\Lambda_2 - r)^2\right) =$$

$$= \frac{a+b\theta_f}{a+b\theta_0} \frac{1}{\sqrt{t}} r \exp(r^2) \exp\left(-\left(\Lambda_2 - r\right)^2\right) = \frac{a+b\theta_f}{a+b\theta_0} \frac{1}{\sqrt{t}} r \exp(r^2) \frac{\operatorname{erf}^{-1}\left(F\left(r\right)\right)}{W_3(r)} =$$

$$= \frac{a+b\theta_f}{a+b\theta_0} \frac{1}{\sqrt{t}} r \exp(r^2) \frac{\operatorname{erf}^{-1}\left(F\left(r\right)\right)}{W_4(r)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{bl}{c(a+b\theta_f)-bl}(\Lambda_2 - r) = \frac{bl\lambda_2}{c\sqrt{t}} = \frac{bl}{c}\overset{\bullet}{s}(t)\ , \text{ esto es } (14)\,.$$

(iii) Ahora para completar la demostración, se debe probar la existencia de solución de la ecuación integral (82) . Si se define $Y(x,t)$ por (83) entonces, la ecuación (82) es equivalente al siguiente problema diferencial de Cauchy

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Y}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{(C_2 + D_2 \operatorname{erf}(Y(x,t)))} \equiv G_2(x,t,Y(x,t)) \quad , \quad 0 < x < s(t)\ ,\ t > 0 \\ &Y(0,t) = -r\ , \end{aligned} \tag{89}$$

con $t > 0$ parámetro. Se tiene que $\left|\frac{\partial G_2}{\partial Y}\right| \leq \frac{D_2}{C_2^2\sqrt{\pi t}}$ la cual es acotada para todo $t \geqslant t_0 > 0$, $0 \leq x \leq s(t)$, para un tiempo arbitrario positivo t_0. Entonces, el problema (89) (i.e. la ecuación integral (82)) tiene una única solución para $t \geq t_0 > 0$, para un tiempo arbitrario positivo t_0.

(iv) Se demuestra a través de cálculos elementales, tediosos y análogos al caso flujo.■

Observación 2. *Si* Θ *es solución de la ecuación integral* (82) *entonces* Θ *es estrictamente monótona en la variable* x.

Se obtiene que $\theta(x,t) = (1/\Theta(x,t) - a)/b$ *no tiene límite cuando* $(x,t) \to (0,0)$ *pero* $\theta(x,t)$ *es acotada en un entorno de* $(0,0)$ *y verifica que*

$$\theta_f = \lim_{(\eta,\tau)\mapsto(0,0)} \inf\ \theta(\eta,\tau) \leq \theta(x,t) \leq \theta_0 = \lim_{(\eta,\tau)\mapsto(0,0)} \sup\ \theta(\eta,\tau)\ ,$$

para $0 \leq x \leq s(t), t > 0$.■

El resultado del Teorema 5 también es válido si se reemplaza la condición (10) por $a + b\theta_f = bl/c$.

Teorema 6. *Si se satisface la condición* $a + b\theta_f = bl/c$ *entonces la solución del problema* (2), (4) − (6) *y* (55) *está dada por*

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta(x,t)} - a\right] \\ s(t) &= \frac{2\Lambda_3 \exp(\Lambda_3^2)}{a + b\theta_0}\sqrt{t} \end{aligned} \tag{90}$$

donde Θ es la única solución en la variable x de la siguiente ecuación integral

$$\Theta(x,t)=\frac{1}{a+b\theta_f}\left(1+\frac{b\,(\theta_0-\theta_f)}{(a+b\theta_0)}\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}}{2\sqrt{t}}-\Lambda_3\right)}{\operatorname{erf}(\Lambda_3)}\right)\ ,\ 0\le x\le s(t) \tag{91}$$

para $t\geq t_0>0$ con t_0 un tiempo arbitrario positivo y Λ_3 es la única solución de la ecuación

$$x\exp(x^2)\operatorname{erf}(x)=\frac{b\,(\theta_0-\theta_f)}{\sqrt{\pi}\,(a+b\theta_f)}\quad ,\quad x>0\ \ . \tag{92}$$

Demostración. Si se define (11) entonces, el problema (2), $(4)-(6)$ y (55) se transforma en $(12),(14)-(16)$ y (56). También se define (18) y (19) y se obtiene $(23),(24),(57),(58)$ y

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}(S(t),t)=\overset{\bullet}{s}(t). \tag{93}$$

Ahora, introduciendo (26) y (27) se obtiene $(28),(31),(62)$ y (63). De (19) se tiene

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{S}(t) &= \frac{\partial\chi}{\partial x}(s(t),t)\,\overset{\bullet}{s}(t)+\frac{\partial\chi}{\partial t}(s(t),t)= \\ &= \frac{1}{\Theta\,(s(t),t)}\,\overset{\bullet}{s}(t)+\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial\Theta}{\partial x}(s(t),t)= \\ &= (a+b\theta_f)\,\overset{\bullet}{s}(t)+\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)-\frac{lb}{c}\,\overset{\bullet}{s}(t)=\frac{\partial\Theta}{\partial x}(0,t)\end{aligned} \tag{94}$$

por lo tanto

$$\overset{\bullet}{S}(t)=\varphi'(0)\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{1}{\Theta\,(0,t)}=\varphi'(0)\frac{1}{2\sqrt{t}}\,(a+b\theta_0)\,, \tag{95}$$

luego

$$S(t)=2\Lambda_3\sqrt{t}$$

con

$$\Lambda_3 = \frac{\varphi'(0)\,(a+b\theta_0)}{2}\ . \tag{96}$$

Teniendo en cuenta $(14)\,,(15)$ y (19) se tiene

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,(s(t),t) = \frac{lb}{c}\overset{\bullet}{s}\,(t) \Leftrightarrow \varphi'\left(\tfrac{\varphi'(0)(a+b\theta_0)}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}(a+b\theta_f) = \frac{lb}{c}\overset{\bullet}{s}\,(t) \Leftrightarrow$$

$$\overset{\bullet}{s}\,(t) = \varphi'\left(\tfrac{\varphi'(0)(a+b\theta_0)}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}\ ,\ \forall t>0\ .$$

entonces $s(t)=\lambda_3\sqrt{t}$ donde

$$\lambda_3 = \varphi'\left(\tfrac{\varphi'(0)(a+b\theta_0)}{2}\right). \tag{97}$$

Como $\varphi\,(0) = \frac{1}{a+b\theta_0}$ y $\varphi\,(\Lambda_3) = \frac{1}{a+b\theta_f}$, si se integra (62) se obtiene

$$\varphi\,(\xi) = K_3\exp\left(\Lambda_3^2\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\,(\xi-\Lambda_3) + C_3 \tag{98}$$

donde

$$K_3 = \frac{2b\,(\theta_0-\theta_f)\exp(-\Lambda_3^2)}{\sqrt{\pi}\,(a+b\theta_0)\,(a+b\theta_f)\operatorname{erf}(\Lambda_3)}\ ,\ C_3 = \frac{1}{a+b\theta_f}\ . \tag{99}$$

Se tiene que $\varphi'(0)=K_3$ y teniendo en cuenta (96) resulta

$$\Lambda_3 = \frac{\varphi'(0)\,(a+b\theta_0)}{2} = \frac{(a+b\theta_0)}{2}K_3 =$$

$$\frac{(a+b\theta_0)}{2}\frac{2b\,(\theta_0-\theta_f)\exp\left(-\Lambda_3^2\right)}{\sqrt{\pi}\,(a+b\theta_0)\,(a+b\theta_f)\operatorname{erf}\,(\Lambda_3)} = \frac{b\,(\theta_0-\theta_f)\exp\left(-\Lambda_3^2\right)}{\sqrt{\pi}\,(a+b\theta_f)\operatorname{erf}\,(\Lambda_3)}\ ,$$

luego Λ_3 debe satisfacer la ecuación $(92)\,,$ o bien

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{b\,(\theta_0-\theta_f)}{\sqrt{\pi}\,(a+b\theta_f)}\frac{\exp\left(-x^2\right)}{x}$$

la cual tiene una única solución $\Lambda_3>0$ cualesquiera sean los datos.

Además, teniendo en cuenta $(96)-(98)$ se tiene

$$\lambda_3 = \varphi'(\Lambda_3) = K_3 \exp(\Lambda_3^2) = \frac{2b(\theta_0-\theta_f)\exp(-\Lambda_3^2)\exp(\Lambda_3^2)}{\sqrt{\pi}(a+b\theta_0)(a+b\theta_f)\operatorname{erf}(\Lambda_3)} \underset{(92)}{=} \frac{2\Lambda_3\exp(\Lambda_3^2)}{(a+b\theta_0)}$$

y entonces la frontera libre $s(t)$ está dada por (90).

Además θ y s son la solución del problema $(2),(4)-(6)$ y (55) con la condición $a+b\theta_f = \dfrac{bl}{c}$ si y sólo si Θ (definida por (11)) y s son la solución de $(12),(14)-(16)$ y (56). Entonces, Θ debe satisfacer la ecuación integral (91). Esta ecuación integral es del mismo tipo que (82), entonces tiene una única solución para todo $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo positivo arbitrario. Se concluye la tesis siguiendo un argumento similar al desarrollado en el Teorema 5.■

Por último se estudia el caso

$$a+b\theta_f < \frac{bl}{c}. \tag{100}$$

Haciendo las mismas transformaciones que en el caso $a+b\theta_f > \frac{bl}{c}$ se obtiene $(60),(62)-(69)$ con coeficientes λ_4, Λ_4 y $\widetilde{r}$ en lugar de λ_2, Λ_2 y r siendo

$$\Lambda_4 = \widetilde{r} + \operatorname{erf}^{-1}[F(\widetilde{r})] \quad , \quad \text{con } \widetilde{r} > r_1 = F^{-1}(1) \tag{101}$$

y F definida por (78). Además como ahora se tiene la hipótesis (100) debe ser $\Lambda_4 - \widetilde{r} < 0$:

$$\Lambda_4 < \widetilde{r} \Leftrightarrow \operatorname{erf}^{-1}(F(\widetilde{r})) < 0 \Leftrightarrow F(\widetilde{r}) < 0 \Leftrightarrow \widetilde{r} > F^{-1}(0) = r_0 \,(> r_1)$$

donde $r_1 = F^{-1}(1)$.

También se obtiene

$$\varphi(\xi) = K_4 \operatorname{erf}(\xi - \widetilde{r}) + C_4 \,.$$

Como

$$\varphi(0) = \frac{1}{a+b\theta_0} \Longrightarrow \frac{1}{a+b\theta_0} = K_4 \operatorname{erf}(-\widetilde{r}) + C_4 \,,$$

$$\varphi(\Lambda_4) = \frac{1}{a+b\theta_f} \Longrightarrow \frac{1}{a+b\theta_f} = K_4 \operatorname{erf}(\Lambda_4 - \widetilde{r}) + C_4$$

entonces

$$K_4 = \frac{b\,(\theta_0 - \theta_f)}{(a+b\theta_f)\,(a+b\theta_0)\,(\operatorname{erf}(\widetilde{r}) - \operatorname{erf}(\widetilde{r}-\Lambda_4))} > 0\ , \tag{102}$$

$$C_4 = \frac{1}{a+b\theta_f}\left(1 + \frac{b\,(\theta_0-\theta_f)\operatorname{erf}(\widetilde{r}-\Lambda_4)}{(a+b\theta_0)\,(\operatorname{erf}(\widetilde{r}) - \operatorname{erf}(\widetilde{r}-\Lambda_4))}\right) > 0\ , \tag{103}$$

y análogamente al Lema 6 se puede demostrar que $\widetilde{r}$ debe verificar la siguiente ecuación

$$W_3(x) = W_4(x),\ x > r_0 \tag{104}$$

con W_3 y W_4 definidas por (76) y (77).

Sea $\eta^* = \left(\frac{c}{bl}(a+b\theta_f) - 1\right)\frac{(a+b\theta_f)}{(a+b\theta_0)}$ y $P(x) = x\exp(x^2)$, $x > 0$ entonces

$$(104) \Longleftrightarrow \operatorname{erf}^{-1}(F(x))\exp\left(\left(\operatorname{erf}^{-1}(F(x))\right)^2\right) = \eta^* x\exp(x^2)$$

$$\Longleftrightarrow P\left(\operatorname{erf}^{-1}(F(x))\right) = \eta^* P(x) \Longleftrightarrow \frac{P\left(\operatorname{erf}^{-1}(F(x))\right)}{\eta^* P(x)} = 1. \tag{105}$$

Como

$$F(x) = -\left(\operatorname{erf}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{b\,(\theta_0-\theta_f)}{a+b\theta_f}\frac{\exp(-x^2)}{x}\right) = -g\,(x,p) \tag{106}$$

con $p = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{b\left(\theta_0-\theta_f\right)}{a+b\theta_f} < 0$ y g definida en el Capítulo 2.

Además como las funciones P y erf^{-1} son funciones impares resulta

$$(105) \Leftrightarrow \frac{P\left(\operatorname{erf}^{-1}(g(x,p))\right)}{-\eta^* P(x)} = 1\ , \tag{107}$$

con g definida por (106).

Además $-\eta^* \in (0,1)$ pues

$$-\eta^* - 1 = \left(1 - \frac{c}{bl}(a+b\theta_f)\right)\frac{(a+b\theta_f)}{(a+b\theta_0)} - 1 =$$

$$\frac{(bl - c\,(a + b\theta_f))\,(a + b\theta_f) - bl\,(a + b\theta_0)}{bl\,(a + b\theta_0)} =$$

$$\frac{-c\,(a + b\theta_f)^2 + bl\,(a + b\theta_f) - bl\,(a + b\theta_0)}{bl\,(a + b\theta_0)} = \frac{-c\,(a + b\theta_f)^2 + b^2 l\,(\theta_f - \theta_0)}{bl\,(a + b\theta_0)} < 0 \ ,$$

y $-\eta^* > 0$ pues $a + b\theta_f < \dfrac{bl}{c}$.

Por lo tanto (107) puede reescribirse como

$$\widetilde{W}(x) \equiv \tilde{\eta}\ \frac{P\left(\mathrm{erf}^{\ -1}\left(g(x,p)\right)\right)}{P(x)} = 1 \ \ , \ \ x > r_0 \ \text{ y } \ \tilde{\eta} > 1 \ . \tag{108}$$

Se tiene que $\widetilde{W}(r_0) = 0$ y

$$\lim_{x \to +\infty} \widetilde{W}(x) = \tilde{\eta}\ \frac{1}{1 - p\sqrt{\pi}} = \tilde{\eta}\ \frac{a + b\theta_f}{a + b\theta_0} = -\frac{1}{\eta^*}\frac{a + b\theta_f}{a + b\theta_0} = \frac{1}{1 - \frac{c}{bl}\,(a + b\theta_f)} > 1 \ .$$

Por lo tanto, la ecuación (108) tiene al menos una solución $\widetilde{r} > r_0$ (la función $\widetilde{W}$ es del mismo tipo que la función W estudiada en el capítulo 2). Luego, se tiene el siguiente teorema

Teorema 7. *Si* $a + b\theta_f < \dfrac{bl}{c}$ *entonces el problema de frontera libre* $(2)\,,(4) - (6)$ *y* (55) *tiene al menos una solución* (θ, s) *para* $t \geq t_0 > 0$ *(con* t_0 *un tiempo arbitrario positivo) dadas por*

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\Theta(x,t)} - a\right] \\ s(t) &= \frac{2\,(\widetilde{r} - \Lambda_4)\sqrt{t}}{\dfrac{bl}{c} - (a + b\theta_f)} \end{aligned} \tag{109}$$

con Λ_4 *dada por* $(101)\,,$ $\widetilde{r}$ *solución de la ecuación* (104)*, y* $\Theta(x,t)$ *es la correspondiente solución de la siguiente ecuación integral*

$$\Theta(x,t) = \frac{1}{a + b\theta_f}\left[1 + \frac{b\,(\theta_0 - \theta_f)}{(a + b\theta_0)}\frac{\left(\mathrm{erf}\,(\widetilde{r} - \Lambda_4) + \mathrm{erf}\left(\dfrac{\int_0^x \frac{d\eta}{\Theta(\eta,t)}}{2\sqrt{t}} - \widetilde{r}\right)\right)}{\mathrm{erf}(\widetilde{r}) - \mathrm{erf}(\widetilde{r} - \Lambda_4)}\right] \ , \ 0 \leq x \leq s(t) \ ; \tag{110}$$

con $t \geq t_0 > 0$ *parámetro.*

CONCLUSION.

Se obtuvo una solución explícita de un problema de Stefan a una fase para un material semi-infinito con conductividad térmica dependiente de la temperatura (1) con flujo de calor (3) o con una condición de temperatura constante (55).

Se probó la existencia y unicidad de solución del tipo similaridad para el problema de frontera libre $(2)-(6)$ para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f \geq bl/c$. La solución explícita para los dos casos se obtiene a través de la única solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro.

Además, para el caso $a + b\theta_f < bl/c$ se demostró que no existe solución al problema de frontera libre $(2)-(6)$.

Luego se reemplazó la condición de flujo (3) por una condición de temperatura constante sobre el borde fijo $x = 0$, dada por (55). Se probó la existencia y unicidad de una solución explícita del tipo similaridad del problema $(2), (4)-(6)$ y (55) para $t \geq t_0 > 0$ con t_0 un tiempo arbitrario y positivo cuando los datos verifican la condición $a + b\theta_f \geq bl/c$. La solución explícita para los dos casos se obtuvo también a través de única solución de una ecuación integral en la cual el tiempo es un parámetro. Finalmente se demostró que si los datos verifican la condición $a + b\theta_f < bl/c$ existe al menos una solución al problema.

References

[1] V. Alexiades and A.D. Solomon, "*Mathematical modeling of melting and freezing processes",* Hemisphere - Taylor & Francis, Washington (1983).

[2] I. Athanasopoulos, G. Makrakis and J.F. Rodrigues (Eds.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications,* CRC Press, Boca Raton (1999).

[3] J. R. Barber, "*An asymptotic solution for short-time transient heat conduction between two similar contacting bodies",* Int. J. Heat Mass Transfer *32, No 5,* 943-949 (1989).

[4] D. A. Barry and G. C. Sander, "*Exact solutions for water infiltration with an arbitrary surface flux or nonlinear solute adsorption",* Water Resources Research *27, No 10,* 2667-2680 (1991).

[5] G. Bluman, S. Kumei, "*On the remarkable nonlinear diffusion equation",* J. Math Phys. *21,* 1019-1023 (1980).

[6] A. C. Briozzo, M. F. Natale and D. A. Tarzia, "*Determination of unknown thermal coefficients for Storm's-type materials through a phase-change process",* Int. J. Non-Linear Mech. *34,* 324-340 (1999).

[7] P. Broadbridge, "*Non-integrability of non-linear diffusion-convection equations in two spatial dimensions",* J. Phys. A: Math. Gen *19,* 1245-1257 (1986).

[8] P. Broadbridge, "*Integrable forms of the one-dimensional flow equation for unsaturated heterogeneous porous media",* J. Math. Phys. *29,* 622-627 (1988).

[9] J. R. Cannon, *The one-dimensional heat equation,* Addison - Wesley, Menlo Park (1984).

[10] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids,* Oxford University Press, London (1959).

[11] J. M. Chadam and H. Rasmussen H (Eds.), *Free boundary problems involving solids.* Pitman Research Notes in Mathematics Series *281,* Longman, Essex (1993).

[12] M. N. Coelho Pinheiro, *"Liquid phase mass transfer coefficients for bubbles growing in a pressure field: a simplified analysis",* Int. Comm. Heat Mass Transfer *27 No 1,* 99-108 (2000)

[13] J. Crank J, *Free and moving boundary problems,* Clarendon Press, Oxford (1984).

[14] J. I. Diaz, M. A. Herrero, A. Liñan and J. L. Vazquez (Eds.), *Free boundary problems: theory and applications,* Pitman Research Notes in Mathematics Series *323,* Longman, Essex (1995).

[15] A. Fasano and M. Primicerio (Eds.), *Nonlinear diffusion problems,* Lecture Notes in Math. N.1224*,* Springer Verlag, Berlin (1986).

[16] A. S. Fokas and Y. C. Yortsos, *"On the exactly solvable equation* $S_t = \left[(\beta S+\gamma)^{-2} S_x\right]_x + \alpha(\beta S+\gamma)^{-2} S_x$ *occurring in two-phase flow in porous media",* SIAM J. Appl. Math., *42 No 2,* 318-331 (1982).

[17] N. Kenmochi (Ed.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications, I,II,* Gakuto International Series: Mathematical Sciences and Applications, *Vol. 13, 14,* Gakkotosho, Tokyo (2000).

[18] J. H. Knight, J. R. Philip, *"Exact solutions in nonlinear diffusion",* J. Engrg. Math., *8,* 219-227 (1974).

[19] G. Lamé and B. P. Clapeyron, *"Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide",* Annales Chimie Physique *47,* 250-256 (1831).

[20] V. J. Lunardini, *"Heat transfer with freezing and thawing",* Elsevier, Amsterdam (1991).

[21] A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierrez, E. Fijalkow and M. R. Feix, *"Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation",* SIAM J. Appl. Math., *40 No 2,* 191-207 (1981).

[22] M. F. Natale and D. A. Tarzia, *"Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials",* J. Phys. A: Math. Gen *33,* 395-404 (2000).

[23] M. F. Natale and D. A. Tarzia, "*Explicit solutions to the one-phase Stefan problem with temperature-dependent thermal conductivity and a convective term", Int. Journal of Engineering Science, 41,* 1685-1698 (2003).

[24] R. Philip, "*General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation",* Australian J. Physics, *13,* 1-12 (1960).

[25] A. D. Polyanin and V. V. Dil'man, "*The method of the 'carry over' of integral transforms in non-linear mass and heat transfer problems",* Int. J. Heat Mass Transfer *33 No 1,* 175-181 (1990)

[26] C. Rogers, "*Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem",* J. Phys. A: Math. Gen *18,* 105-109 (1985).

[27] C. Rogers, "*On a class of moving boundary problems in non-linear heat condition: Application of a Bäcklund transformation",* Int. J. Non-Linear Mech. *21,* 249-256 (1986).

[28] C. Rogers and P. Broadbridge, "*On a nonlinear moving boundary problem with heterogeneity: application of reciprocal transformation",* Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) *39,* 122-129 (1988).

[29] G. C. Sander, I. F. Cunning, W. L. Hogarth and J. Y. Parlange, "*Exact solution for nonlinear nonhysteretic redistribution in vertical soli of finite depth",* Water Resources Research *27,* 1529-1536 (1991).

[30] D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math *39,* 491-497 (1981).

[31] D. A. Tarzia, *A bibliography on moving - free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems,* MAT-Serie A #*2* (2000) (with 5869 titles on the subject, 300 pages). See www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)/

[32] P. Tritscher and P. Broadbridge, "*A similarity solution of a multiphase Stefan problem incorporating general non-linear heat conduction",* Int. J. Heat Mass Transfer, *37 No 14,* 2113-2121 (1994).

CAPITULO 4

SOLUCIONES EXPLÍCITAS PARA UN PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE LAMÉ-CLAPEYRON-STEFAN A DOS FASES CON TÉRMINOS FUENTES EN AMBAS FASES

RESUMEN. Se estudia un problema de Stefan a dos fases con fuente de calor en el interior en las fases sólida y líquida para un material semi-infinito. Se considera una temperatura inicial negativa y en el borde fijo $x = 0$ se impone una condición de temperatura constante positiva o una condición de flujo del tipo $-q_0/\sqrt{t}$ $(q_0 > 0)$. Las funciones que describen las fuentes de calor interno están dadas por $g_j(x,t) = \dfrac{\rho l}{t}\beta_j\left(\frac{x}{2a_j\sqrt{t}}\right)$ ($j = 1$ fase sólida; $j = 2$ fase líquida) donde $\beta_j = \beta_j(\eta)$ son funciones con ciertas propiedades de regularidad. Se obtienen soluciones explícitas para ambos problemas. En el caso con condición de flujo se debe imponer una restricción al coeficiente q_0 para que exista solución mientras que en el primer caso existe solución cualesquiera sean los datos iniciales del problema. Además se obtiene la equivalencia de los dos problemas de frontera libre. Finalmente, se estudia un caso particular donde β_j $(j = 1, 2)$ es del tipo exponencial dada por $\beta_j(\eta) = \exp\left(-(\eta + d_j)^2\right)$ con $d_j \in \mathbb{R}$, lo cual es interesante en procesos de sublimación-deshidratación [6, 7, 8].

I. INTRODUCCION.

En [11] se estudió un problema de Stefan con un tipo particular de fuente y se obtuvo solución explícita de Lamé Clapeyron generalizada [10]. Además fueron dadas condiciones necesarias y suficientes que caracterizan a la fuente para garantizar la unicidad de la solución.

En [14] se consideró un medio poroso semi-infinito congelado con propiedades térmicas constantes sujeto a un proceso de sublimación-deshidratación que involucra a una fuente volumétrica de calor del tipo

$$g(x,t) = \frac{const.}{t}\exp\left(-\left(x/\sqrt{t} + d\right)^2\right)$$

y también se llevó a cabo un estudio de sensibilidad en el cual fueron analizados los efectos de las propiedades inherentes del material en las soluciones.

Varios trabajos muestran la importancia de considerar fuentes internas en el material que llevan a un proceso de cambio de fase, por ejemplo [1, 4, 9, 12, 13, 14, 16].

En [3], fueron estudiadas soluciones de tipo similaridad

$$\theta(x,t) = \theta(\eta) = \theta\left(x/\sqrt{t}\right)$$

del problema

$$\begin{aligned}
&E(\theta)_t - A(\theta)_{xx} = \frac{1}{t}B(\eta),\ \eta > 0\\
&\theta(x,t) = C > 0,\ t > 0,\\
&E(\theta(x,0)) = 0,\ x > 0.
\end{aligned}$$

donde E y A son funciones monótonas crecientes, siendo A continua, con $E(0) = A(0) = 0$ y $\lambda = E(0^+) > 0$. Esta ecuación puede describir la conservación de energía térmica en un proceso de conducción del calor para un material semi-infinito con una fuente o sumidero "auto-similar" del tipo $B\left(x/\sqrt{t}\right)/t$. Además, $E(\theta)$ representa la energía por unidad de volumen a una temperatura dada θ, $A'(\theta) \geq 0$ es la conductividad térmica y $B(\eta)/t$ representa una fuente o sumidero singular dependiendo del signo de la función B. Se obtuvo una ecuación integral para la función inversa $\eta = \eta(\theta)$ equivalente al problema anterior y se probó, siguiendo [2], que bajo ciertas hipótesis sobre los datos iniciales existe al menos una solución de la correspondiente ecuación integral.

En este trabajo se considerará el siguiente problema de fusión para un material semi-infinito

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x,t) = a_2^2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_2}g_2(x,t), \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x,t) = a_1^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_1}g_1(x,t), \qquad x > s(t), \qquad t > 0 \tag{2}$$

$$T_1(s(t),t) = T_2(s(t),t) = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

$$k_1\frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t),t) - k_2\frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t),t) = \rho l\ \dot{s}\ (t), \qquad t > 0 \tag{4}$$

$$T_1(x,0) = T_1(+\infty,t) = -C < 0, \qquad x > 0, \qquad t > 0 \tag{5}$$

$$T_2\left(0,t\right)=B>0, \qquad t>0 \tag{6}$$

$$s(0)=0. \tag{7}$$

para dos fuentes internas dadas por [3, 11, 14]

$$g_j=g_j(x,t)=\frac{\rho l}{t}\beta_j\left(\frac{x}{2a_j\sqrt{t}}\right) \qquad j=1,2, \tag{8}$$

donde se supone que $\beta_1(\eta)\geq 0$ y $\beta_2(\eta)\leq 0$ y además

$\beta_j=\beta_j\left(\eta\right)$: funciones integrables en $\left(0,\epsilon\right)$, $\forall\epsilon>0$,

$\beta_j\left(\eta\right)\exp(\eta^2)$: funciones integrables en $\left(M,+\infty\right)$, $\forall M>0$,

$B>0$: temperatura en el borde fijo $x=0$,

$-C<0$: temperatura inicial y temperatura para $x\to\infty$,

l : calor latente de fusión constante por unidad de masa,

ρ : densidad de masa constante,

c_j , $j=1,2$: calor específico constante en las dos fases, sólida y líquida respectivamente,

k_j , $j=1,2$: conductividad térmica constante en las dos fases, sólida y líquida respectivamente

$a_j^2=k_j/\rho c_j$, para $j=1,2$: cuadrado de la difusividad térmica en ambas fases.

En la sección II.1 se obtienen soluciones explícitas para el problema (1)-(7), cuando se consideran fuentes del tipo (8) y con condición de temperatura en $x=0$, y en II.2 se dan propiedades de monotonicidad de dichas soluciones.

En III.1 se resuelve el mismo problema de frontera libre pero con condición de flujo del tipo $-\frac{q_0}{\sqrt{t}}$ $(q_0>0)$ sobre el borde fijo $x=0$, y se obtienen soluciones explícitas a este problema si el coeficiente q_0 satisface una apropiada desigualdad.

En III.2, en forma análoga a la dada en II.2, se dan propiedades de monotonicidad de la solución.

En IV se prueba la equivalencia de los dos problemas de frontera libre: el primero con condición de Dirichlet constante (6) considerado en la Sección II y el segundo con condición de Neumann (58) estudiado en la Sección III.

II.1. SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON CONDICION DE TEMPERATURA EN $\mathbf{x=0}$.

A continuación se considera el problema (1)-(7) suponiendo que las fuentes están dadas por (8).

Lema 1. *Si se aplica el método de inmovilización del dominio* [5], *es decir, si se define la nueva variable espacial independiente y dada por*

$$y=\frac{x}{s(t)} \tag{9}$$

y se buscan soluciones del tipo

$$T_j(x,t)=\theta_j(y) \qquad j=1,2, \tag{10}$$

entonces el problema (1)-(8) *se lleva a*

$$\theta_2''(y)+2\lambda^2 y\theta_2'(y)=-\frac{4\lambda^2 l}{c_2}\beta_2(\lambda y),\ 0<y<1 \tag{11}$$

$$\theta_2\left(0\right)=B \tag{12}$$

$$\theta_1\left(1\right)=\theta_2\left(1\right)=0 \tag{13}$$

$$\theta_1\left(+\infty\right)=-C \tag{14}$$

$$\theta_1''(y)+2\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)^2 y\theta_1'(y)=-\frac{4l}{c_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)^2\beta_1\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda y\right),\ 1<y \tag{15}$$

$$k_1\theta_1'(1)-k_2\theta_2'(1)=2\left(\lambda a_2\right)^2\rho l \tag{16}$$

Demostración. De (10) se tiene que

$$\frac{\partial T_j}{\partial x}=\theta_j'(y)\frac{\partial y}{\partial x}=\theta_j'(y)\frac{1}{s(t)}\ ,$$

entonces la condición (4) se transforma en

$$k_1\theta_1'(1)\frac{1}{s(t)}-k_2\theta_2'(1)\frac{1}{s(t)}=\rho l\ \dot{s}\ (t),$$

luego

$$k_1\theta_1'(1)-k_2\theta_2'(1)=2\rho l s(t)\ \dot{s}\ (t), \tag{17}$$

y necesariamente debe ser $s(t)\ \dot{s}\ (t)$ =const. i.e.,

$$s(t) = 2a_2\lambda\sqrt{t}, \tag{18}$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro adimensional desconocido.

Además

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \theta_j'(y)\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{x}{4t\lambda a_2\sqrt{t}}\theta_j'(y) = -\frac{y}{2t}\theta_j'(y)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} = \frac{1}{4\lambda^2 a_2^2 t}\theta_j''(y)\ ,$$

$$g_1(x,t) = \frac{\rho l}{t}\beta_1\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda y\right)\ ,\ y > 1\ ,$$

$$g_2(x,t) = \frac{\rho l}{t}\beta_2\left(\lambda y\right)\ ,\ 0 < y < 1\ ,$$

entonces para $0 < y < 1$ se tiene

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{y}{2t}\theta_2'(y) = \frac{a_2^2}{4\lambda^2 a_2^2 t}\theta_2''(y) + \frac{1}{\rho c_2}\frac{\rho l}{t}\beta_2\left(\lambda y\right) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{l}{c_2}\beta_2\left(\lambda y\right) = \frac{1}{4\lambda^2}\theta_2''(y) + \frac{y}{2}\theta_2'(y) \Leftrightarrow -\frac{4\lambda^2 l}{c_2}\beta_2\left(\lambda y\right) = \theta_2''(y) + 2\lambda^2 y\theta_2'(y)\ .$$

Las condiciones (12), (13) y (14) se deducen en forma inmediata de (6), (3) y (5) respectivamente.

Además, sustituyendo (18) en (17) se obtiene (16). Por último:

$$(2) \Leftrightarrow -\frac{y}{2t}\theta_1'(y) = \frac{a_1^2}{4\lambda^2 a_2^2 t}\theta_1''(y) + \frac{1}{\rho c_1}\frac{\rho l}{t}\beta_1\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda y\right) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{4\lambda^2 l}{c_1}\beta_1\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda y\right) = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)\theta_1''(y) + 2\lambda^2 y\theta_1'(y)\ ,\ y > 1 \Leftrightarrow (15)\ .\blacksquare$$

Lema 2. *Si se define*

$$R_j(\eta) = \theta_j\left(\frac{\eta}{\lambda}\right), \qquad j = 1,2, \qquad \eta = \lambda y, \tag{19}$$

entonces el problema (11)-(16) *es equivalente al que sigue:*

$$R_2''(\eta) + 2\eta R_2'(\eta) = -\frac{4l}{c_2}\beta_2(\eta), \qquad 0 < \eta < \lambda \tag{20}$$

$$R_1''(\eta) + 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\eta R_1'(\eta) = -\frac{4a_2^2 l}{a_1^2 c_2}\beta_1(\frac{a_2}{a_1}\eta), \qquad \eta > \lambda \tag{21}$$

$$R_1(\lambda) = R_2(\lambda) = 0 \tag{22}$$

$$k_1 R_1'(\lambda) - k_2 R_2'(\lambda) = 2\rho l \lambda a_2^2 \tag{23}$$

$$R_1(+\infty) = -C \tag{24}$$

$$R_2(0) = B. \tag{25}$$

Lema 3. *La solución del problema* $(20) - (25)$ *está dada por*

$$\begin{aligned} R_2(\eta) &= B - (B + \varphi_2(\lambda))\frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\lambda)} + \varphi_2(\eta), \;\; 0 < \eta < \lambda\;, \\ \varphi_2(\eta) &= \frac{2l\sqrt{\pi}}{c_2}\int_0^{\eta}\beta_2(u)\exp(u^2)\left(\operatorname{erf}(u) - \operatorname{erf}(\eta)\right)du \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} R_1(\eta) &= -\frac{(C + \varphi_1(+\infty))}{\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}\left[\operatorname{erf}\left(\tfrac{a_2}{a_1}\eta\right) - \operatorname{erf}\left(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\right)\right] + \varphi_1(\eta), \qquad \eta > \lambda, \\ \varphi_1(\eta) &= \frac{2l\sqrt{\pi}}{c_1}\int_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{\frac{a_2}{a_1}\eta}\beta_1(u)\exp(u^2)\left[\operatorname{erf}(u) - \operatorname{erf}\left(\tfrac{a_2}{a_1}\eta\right)\right]du \end{aligned} \tag{27}$$

donde λ *es un coeficiente incógnita el cual debe verificar la condición*

$$f_1(x, \beta_1) = f_2(x, \beta_2)\;, \;\; x > 0 \tag{28}$$

donde

$$f_1(x, \beta_1) = F_0(x)\; h_1(x, \beta_1) \tag{29}$$

$$f_2(x,\beta_2) = Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\ h_2(x,\beta_2) \tag{30}$$

con

$$Q(x) = \sqrt{\pi}x\exp(x^2)(1-\operatorname{erf}(x))\ ,\ x>0 \tag{31}$$

$$F_0(x) = x\operatorname{erf}(x)\exp(x^2),\ x>0 \tag{32}$$

$$h_1(x,\beta_1) = Ste_1 - 2\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty}\operatorname{erf}c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du, \tag{33}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-u^2)du,\ \ \operatorname{erf}c(x) = 1-\operatorname{erf}(x)\ ,\ x\geq 0, \tag{34}$$

$$h_2(x,\beta_2) = \frac{Ste_2}{\sqrt{\pi}} - F(x,\beta_2),\ x>0 \tag{35}$$

y

$$Ste_1 = \frac{Cc_1}{l}\ ,\ Ste_2 = \frac{Bc_2}{l} \tag{36}$$

son los números de Stefan para las fases $j=1$ *y* $j=2$ *respectivamente, y*

$$F(x,\beta_2) = F_0(x) - 2\int_0^x \operatorname{erf}(u)\beta_2(u)\exp(u^2)du,\ \ x>0\ . \tag{37}$$

Demostración. Luego de hacer cálculos elementales, de (20), (22) y (25) se obtiene (26) y de (21), (22) y (24) se tiene (27).

Falta ver que la ecuación (23) es equivalente a (28).

Teniendo en cuenta (26) y (27) se tiene que

$$R_1'(\eta) = -\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{\frac{a_1}{a_2}\operatorname{erf}c\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{a_2}{a_1}\eta\right)^2\right) - \frac{4l}{c_1}\exp(-\eta^2)\int_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{\frac{a_2}{a_1}\eta}\beta_1(u)\exp(u^2)du,$$

$$R_2'(\eta) = -\frac{(B+\varphi_2(\lambda))}{\operatorname{erf}(\lambda)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-\eta^2) - \frac{4l}{c_2}\exp(-\eta^2)\int_0^{\eta}\beta_2(u)\exp(u^2)du$$

entonces

$$R_1'(\lambda) = -\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{\frac{a_1}{a_2}\operatorname{erf}c\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)^2\right), \tag{38}$$

$$R_2'(\lambda) = -\frac{(B+\varphi_2(\lambda))}{\operatorname{erf}(\lambda)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-\lambda^2) - \frac{4l}{c_2}\exp(-\lambda^2)\int_0^\lambda \beta_2(u)\exp(u^2)du \tag{39}$$

Se sabe que $k_i = a_i^2\rho c_i$ entonces la ecuación (23) puede escribirse del siguiente modo:

$$\frac{k_1}{k_2}R_1'(\lambda) - R_2'(\lambda) = \frac{2l\lambda}{c_2}\ .$$

Se sustituye ahora en la última ecuación las expresiones obtenidas en (38) y (39) :

$$-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\frac{c_1}{c_2}\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{\frac{a_1}{a_2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}c\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)\exp\left(\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)^2\right)} + \frac{(B+\varphi_2(\lambda))}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(\lambda)\exp\left(\lambda^2\right)} +$$

$$+\frac{4l}{c_2}\exp(-\lambda^2)\int_0^\lambda \beta_2(u)\exp(u^2)du = \frac{2l\lambda}{c_2} \Leftrightarrow$$

$$-2\frac{c_1}{c_2}\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)} + \frac{(B+\varphi_2(\lambda))}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}F_0(\lambda)} + \frac{4l}{c_2\lambda\exp(\lambda^2)}\int_0^\lambda \beta_2(u)\exp(u^2)du = \frac{2l}{c_2} \Leftrightarrow$$

$$-2\frac{c_1}{c_2}\frac{\left(C - \frac{2l}{c_1}\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{+\infty}\beta_1(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}c(u)du\right)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)} +$$

$$+\frac{\left(B + \frac{2l\sqrt{\pi}}{c_2}\int_0^\lambda \beta_2(u)\exp(u^2)\left(\operatorname{erf}(u)-\operatorname{erf}(\lambda)\right)du\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}F_0(\lambda)} + \frac{4l\operatorname{erf}(\lambda)}{c_2F_0(\lambda)}\int_0^\lambda \beta_2(u)\exp(u^2)du = \frac{2l}{c_2} \Leftrightarrow$$

$$-2\frac{c_1}{c_2}\frac{\left(C-\frac{2l}{c_1}\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{+\infty}\beta_1\left(u\right)\exp(u^2)\operatorname{erf}c(u)du\right)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}+\frac{2B}{F_0(\lambda)\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{4l}{c_2F_0(\lambda)}\int\limits_0^\lambda\beta_2(u)\exp(u^2)\left(\operatorname{erf}(u)-\operatorname{erf}(\lambda)\right)du+\frac{4l\operatorname{erf}(\lambda)}{c_2F_0(\lambda)}\int\limits_0^\lambda\beta_2(u)\exp(u^2)du=\frac{2l}{c_2}\Leftrightarrow$$

$$-2\frac{c_1}{c_2}\left(C-\frac{2l}{c_1}\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{+\infty}\beta_1\left(u\right)\exp(u^2)\operatorname{erf}c(u)du\right)\frac{F_0(\lambda)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}=$$

$$=\frac{2l}{c_2}F_0(\lambda)-\frac{2B}{\sqrt{\pi}}-\frac{4l}{c_2}\int\limits_0^\lambda\beta_2(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}(u)du\Leftrightarrow$$

$$-2\frac{c_1}{c_2}\left(C-\frac{2l}{c_1}\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{+\infty}\beta_1\left(u\right)\exp(u^2)\operatorname{erf}c(u)du\right)\frac{F_0(\lambda)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}=$$

$$=\frac{2l}{c_2}\left(F_0(\lambda)-\frac{Ste_2}{\sqrt{\pi}}-2\int\limits_0^\lambda\beta_2(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}(u)du\right)\Leftrightarrow$$

$$F_0(\lambda)\left(-Ste_1+2\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{+\infty}\beta_1\left(u\right)\exp(u^2)\operatorname{erf}c(u)du\right)=$$

$$=Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)\left(F_0(\lambda)-2\int\limits_0^\lambda\beta_2(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}(u)du-\frac{Ste_2}{\sqrt{\pi}}\right)\Leftrightarrow$$

$$F_0(\lambda)\left(-h_1\left(x,\beta_1\right)\right)=Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)\left(F(x,\beta_2)-\frac{Ste_2}{\sqrt{\pi}}\right)\Leftrightarrow$$

$$F_0(\lambda)h_1\left(x,\beta_1\right)=Q\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)h_2\left(x,\beta_2\right),$$

esto es (28) .■

Lema 4. *Las funciones* $Q(x), F_0(x)$ *y* $F(x,\beta_2)$ *satisfacen las siguientes propiedades:*

$$(i)\ \ Q(0)=0,\ Q(+\infty)=1,\ Q^{'}(x)>0,\ \forall x>0,\ Q'(0)=\sqrt{\pi}.$$

$$(ii)\ F_0(0)=0\ \ ,\ \ F_0(+\infty)=+\infty\ \ ,\ \ F_0'(x)>0,\ \forall x>0\ \ ,\ \ F_0'(0)=0$$

$$(iii)\ F(0,\beta_2)=0\ \ ,\ \ F(+\infty,\beta_2)=+\infty\ \ ,\ \ \frac{\partial F}{\partial x}(x,\beta_2)>0,\ \forall x>0. \tag{40}$$

Demostración. Las propiedades de F_0 *y* Q son elementales y la función F se estudió en [11] donde se consideró el caso unidimensional.■

Lema 5. *Las funciones* $h_j(x,\beta_j),(j=1,2)$ *satisfacen las siguientes propiedades:*

$(i)\ \ h_1(0^+,\beta_1)=Ste_1-2\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\operatorname{erf}c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du,$

$(ii)\ h_1(+\infty,\beta_1)=Ste_1,$

$(iii)\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x}(x,\beta_1)=2\sqrt{\pi}\dfrac{a_2}{a_1}\operatorname{erf}c\left(\tfrac{a_2}{a_1}x\right)\exp\left(\tfrac{a_2}{a_1}x\right)^2\beta_1\left(\tfrac{a_2}{a_1}x\right)>0,\ \forall x>0,$

(iv) Si

$$\int_0^{+\infty}\operatorname{erf}c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)\,du\le\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} \tag{41}$$

entonces $h_1(x,\beta_1)>0,\ \forall x>0,$

(v) Si

$$\int_0^{+\infty}\operatorname{erf}c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)\,du>\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} \tag{42}$$

entonces existe una única constante $\xi_1>0$, *tal que* $h_1(\xi_1,\beta_1)=0$ *y* $h_1(x,\beta_1)$ *es negativa en* $(0,\xi_1)$, y *es positiva* en $(\xi_1,+\infty)$.

$(vi)\ h_2(0^+,\beta_2)=\dfrac{Ste_2}{\sqrt{\pi}},$

$(vii)\ h_2(+\infty,\beta_2)=-\infty,$

(*viii*) $\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x, \beta_2) = -\left\{ \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} + \exp(x^2)\,\mathrm{erf}(x)\,[1 + 2x^2 - 2\beta_2(x)] \right\} < 0,$

(*ix*) *Existe una única constante* $\xi_2 > 0$ *tal que* $h_2(\xi_2, \beta_2) = 0.$

Demostración. Las propiedades de las funciones $h_j(x, \beta_j)$ $(j = 1, 2)$ se obtienen a partir de sus definiciones (33)-(35), del Lema 4 y también de [11].■

Lema 6. *(a) La función* $f_1(x, \beta_1)$*, satisface las siguientes propiedades:*

(*i*) $f_1(0^+, \beta_1) = 0$, (*ii*) $f_1(+\infty, \beta_1) = +\infty,$

(*iii*) *Si la condición* (41) *se verifica entonces* $f_1(x, \beta_1) > 0,\ \forall x > 0,$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, \beta_1) > 0$ *y* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0^+, \beta_1) = 0^+,$

(*iv*) *Si la condición* (42) *se verifica entonces* $f_1(\xi_1, \beta_1) = 0$, $f_1(x, \beta_1)$ *es negativa en* $(0, \xi_1)$ *y es positiva en* $(\xi_1, +\infty)$; *entonces existe* $x_1 \in (0, \xi_1)$ *tal que* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_1, \beta_1) = 0$. *Además se tiene* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, \beta_1) > 0 \ \ \forall\, x > \xi_1.$ (43)

(b) La función $f_2(x, \beta_2)$ *satisface las siguientes propiedades:*

(*i*) $f_2(0^+, \beta_2) = 0$, (*ii*) $f_2(+\infty, \beta_2) = -\infty$, (*iii*) $f_2(\xi_2, \beta_2) = 0,$

(*iii*) $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, \beta_2) = \dfrac{a_2}{a_1} Q'\left(\tfrac{a_2}{a_1} x\right)\ h_2(x, \beta_2) + Q\left(\tfrac{a_2}{a_1} x\right)\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x, \beta_2),$

(*iv*) $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0^+, \beta_2) = \dfrac{a_2}{a_1} Ste_2 > 0,$ (44)

(*v*) *Existe* $x_2 \in (0, \xi_2)$ *tal que* $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_2, \beta_2) = 0,$

(*vi*) $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, \beta_2) < 0$, $\forall\, x > \xi_2.$

Demostración. Se usan las definiciones de las correspondientes funciones reales y los lemas 4 y 5.

Nótese que en (a)(iv) se tiene $f_1(x,\beta_1) < 0 \ \forall x \in (0,\xi_1)$ y en (b)(v) se tiene $f_2(x,\beta_2) > 0$ en $(0,\xi_2)$.■

Teorema 1. *La ecuación* (28) *tiene una única solución* $\lambda > 0$. *Más aún el problema de frontera libre con fuentes internas* (1)-(7) *tiene una solución explícita dada por*

$$\begin{aligned}
&T_1(x,t) = \frac{-\left(C+\varphi_1(+\infty)\right)}{\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)\right] + \varphi_1\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),\\
&\textit{para} \ \ x > s(t), \qquad t > 0;\\
&T_2(x,t) = B - \left(B+\varphi_2(\lambda)\right)\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} +\\
&+\frac{2l\sqrt{\pi}}{c_2}\int_0^{\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}}\beta_2(u)\exp(u^2)\left(\operatorname{erf}(u)-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)\right)du,\\
&\textit{para} \ \ 0 < x < s(t), \qquad t > 0;
\end{aligned} \tag{45}$$

donde $\varphi_1(\eta)$ *y* $\varphi_2(\eta)$ *están definidas en* (27), (26) *respectivamente y la frontera libre* $s(t)$ *está dada por* (18) *donde el coeficiente* λ *es la única solución de la ecuación* (28).

Demostración. De (9), (10) y (19) se tiene

$$T_j\left(x,t\right) = \theta_j\left(y\right) = R_j\left(\eta\right)$$

$$y = \frac{x}{s(t)} = \frac{x}{2\lambda a_2\sqrt{t}}\ , \ \eta = \lambda y = \frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\ ,$$

además de (27) y (26) resulta que

$$T_1\left(x,t\right) = R_1\left(\lambda y\right) = R_1\left(\frac{\lambda x}{s(t)}\right) = R_1\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \frac{-\left(C+\varphi_1(+\infty)\right)}{\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{a_2}{a_1}\lambda}^{\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}} \exp(-u^2)du + \varphi_1\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),\ x > s(t)$$

lo cual, teniendo en cuenta (34), es lo que se quería probar.

De igual manera se tiene

$$T_2(x,t) = R_2(\lambda y) = R_2\left(\frac{\lambda x}{s(t)}\right) = R_2\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= B - \left(B + \varphi_2(\lambda)\right) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} + \varphi_2\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)\ ,\ 0 < x < s(t)\ ,$$

donde φ_2,φ_1, $s(t)$ están definidas por (27), (26) y (18) respectivamente y λ es solución de la ecuación (28).■

Observación 1. *Si la temperatura inicial es $C = 0$ y la fuente de la fase sólida es $\beta_1 = 0$ entonces se tiene el problema de Stefan a una fase con temperatura constante B en el borde fijo $x = 0$ el cual es el problema considerado en* [11].

La solución está dada por

$$\begin{cases} T(x,t) = T_2(x,t) = B - \left(B+\varphi_2(\lambda)\right) \dfrac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} + \\ \\ + \dfrac{2l\sqrt{\pi}}{c_2} \int_0^{\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}} \beta_2(u)\exp(u^2)\left(\operatorname{erf}(u) - \operatorname{erf}(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}})\right) du\ \ ,\ 0 < x < s(t),\ t > 0; \\ \\ s(t) = 2\lambda a_2\sqrt{t} \end{cases} \tag{46}$$

donde λ es la única solución de la ecuación $F(x, \beta_2) = \dfrac{Ste_2}{\sqrt{\pi}}$, $x > 0$.

Observación 2. *En el caso particular $\beta_1 = \beta_2 = 0$ se tiene la clásica solución de Neumann* [4].

II.2. PROPIEDADES DE MONOTONIA.

Se denota con $T_{\beta_1\beta_2,1}(x,t)$, $T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t)$ *y* $s_{\beta_1,\beta_2}(t)$ (i.e $\lambda_{\beta_1,\beta_2}$) la solución del problema (1)-(7) para los datos β_1 y β_2. Se comparará está solución con la correspondiente al caso $\beta_1 = 0$ *y* $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Lema 7. *Si $\beta_1 \geq 0$ y $\beta_2 \leq 0$ entonces se tienen las siguientes propiedades de monotonicidad*

$$(i)\ s_{0,\beta_2}(t) \ \leq \ s_{\beta_1,\beta_2}(t) \leq s_{\beta_1,0}(t) \ , \ t>0 \ , \tag{47}$$

$$(ii)\ s_{0,\beta_2}(t) \ \leq \ s_{0,0}(t) \leq s_{\beta_1,0}(t) \ , \ t>0 \ .$$

Demostración. Para probar (47) es suficiente probar la misma desigualdad para el coeficiente λ, es decir

$$\begin{array}{rcl} (i)\ \lambda_{0,\beta_2} & \leq & \lambda_{\beta_1,\beta_2} \leq \lambda_{\beta_1,0} \\ (ii)\ \lambda_{0,\beta_2} & \leq & \lambda_{0,0} \leq \lambda_{\beta_1,0}. \end{array} \tag{48}$$

La ecuación (28) puede reescribirse de la siguiente forma

$$F_0(x)\left(Ste_1 - 2\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty} \beta_1(u)\exp(u^2)\operatorname{erf} c(u)du \right) =$$

$$= Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\left(\frac{Ste_2}{\sqrt{\pi}} - F_0(x) + 2\int_0^x \beta_2(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}(u)du\right) \Leftrightarrow$$

$$F_0(x)\left(Ste_1 + Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) - 2\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty} \beta_1(u)\exp(u^2)\operatorname{erf} c(u)du \right) =$$

$$= Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\left(\frac{Ste_2}{\sqrt{\pi}} + 2\int_0^x \beta_2(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}(u)du\right),$$

es decir, la ecuación (28) para λ es equivalente a

$$G_1(x,\beta_1) = G_2(x,\beta_2) \tag{49}$$

donde las funciones reales G_1 y G_2 están definidas como sigue

$$G_1(x,\beta_1) = F_0(x)\left[Ste_1 + Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}x\right) - 2\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du\right] \tag{50}$$

$$G_2(x,\beta_2) = Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\left[\frac{Ste_2}{\sqrt{\pi}} + 2\int\limits_0^x \operatorname{erf}(u)\beta_2(u)\exp(u^2)du\right], \tag{51}$$

y satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $G_1(0,\beta_1)=0$, $\quad (ii)$ $G_1(+\infty,\beta_1)=+\infty$, $\quad (iii)$ $\dfrac{\partial G_1}{\partial x}(0,\beta_1)=0$

(iv) Si la condición (41) se verifica entonces $G_1(x,\beta_1) > 0,\ \forall x > 0$,

(v) Si la condición (42) se verifica entonces existe un único

$\xi > 0$ tal que $G_1(\xi,\beta_1)=0$ y

$G_1(x,\beta_1)$ es negativa en $(0,\xi)$ y G_1 es positiva en $(\xi,+\infty)$,

(vi) $G_1(0,0)=0$, $\quad (vii)$ $G_1(+\infty,0)=+\infty$,

$(viii)$ $\dfrac{\partial G_1}{\partial x}(x,0) > 0 \ ,\ \forall x > 0$ y $\dfrac{\partial G_1}{\partial x}(0,0)=0.$

La función G_2 tiene las siguientes propiedades:

(i) $G_2(0,\beta_2)=0$,

(ii) $G_2(+\infty,\beta_2) = \dfrac{Ste_2}{\sqrt{\pi}} + 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{erf}(u)\beta_2(u)\exp(u^2)\,du$,

El signo de $G_2(+\infty,\beta_2)$ depende de la función β_2, a pesar de ello, se tiene en cualquier caso que la solución $\lambda_{\beta_{1,}\beta_2}$, es decir, la solución de $G_1(x,\beta_1) = G_2(x,\beta_2)$, es mayor o igual que $\lambda_{0\beta_2}$, solución de $G_1(x,0) = G_2(x,\beta_2)$, debido a que $G_1(x,\beta_1) \le G_1(x,0)$ por ser $\beta_1 \ge 0$. Con lo cual se tiene la primer desigualdad de (48) (i).

Para demostrar la segunda desigualdad de (48) (i) se debe comparar la solución de $G_1(x,\beta_1) = G_2(x,\beta_2)$, es decir $\lambda_{\beta_1,\beta_2}$, con $\lambda_{\beta_1,0}$ que es solución de $G_1(x,\beta_1) = G_2(x,0)$.

Se tiene que

(i) $G_2(x,0) = Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\dfrac{Ste_2}{\sqrt{\pi}}$,

(ii) $G_2(0,0) = 0$, $\quad (iii)$ $G_2(+\infty,0) = \dfrac{Ste_2}{\sqrt{\pi}}$,

(iv) $\dfrac{\partial G_2}{\partial x}(x,0) > 0$, $\forall x > 0$.

Como $\beta_2 \leq 0$ resulta $G_2(x,\beta_2) \leq G_2(x,0)$, $\forall x \geq 0$ entonces se tiene que $\lambda_{\beta_1,\beta_2} \leq \lambda_{\beta_1,0}$.

La demostración de (48) (ii) es análoga a la dada.■

Teorema 2. *Las soluciones al problema* (1)-(7) *para los datos* $\beta_1 \geq 0$ *y* $\beta_2 \leq 0$ *satisfacen las siguientes propiedades de monotonicidad*

$$
\begin{array}{lll}
(i)\ T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t) \leq T_{\beta_1 0,2}(x,t), & 0 \leq x \leq s_{\beta_1,\beta_2}(t)\ ,\ t>0, \\
(ii)\ T_{00,2}(x,t) \leq T_{\beta_1 0,2}(x,t), & 0 \leq x \leq s_{0,0}(t)\ ,\ t>0, \\
(iii)\ T_{0\beta_2,2}(x,t) \leq T_{00,2}(x,t), & 0 \leq x \leq s_{0,\beta_2,}(t)\ ,\ t>0, \\
(iv)\ T_{0\beta_2,1}(x,t) \leq T_{00,1}(x,t), & x > s_{0,0}(t)\ ,\ t>0, \\
(v)\ \ T_{0\beta_2,2}(x,t) \leq T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t), & 0 \leq x \leq s_{0,\beta_2,}(t)\ ,\ t>0, \\
(vi)\ T_{0\beta_2,1}(x,t) \leq T_{\beta_1\beta_2,1}(x,t) & x > s_{\beta_1,\beta_2,}(t)\ ,\ t>0, \\
(vii)\ T_{00,1}(x,t) \leq T_{\beta_1 0,1}(x,t), & x > s_{\beta_1,0}(t)\ ,\ t>0, \\
(viii)\ T_{\beta_1\beta_2,1}(x,t) \leq T_{\beta_1 0,1}(x,t), & x > s_{\beta_1,0}(t)\ ,\ t>0,
\end{array}
\tag{52}
$$

Demostración. Todas las propiedades (52) surgen por aplicación del principio del máximo para la ecuación del calor. Se dará a continuación la demostración de las propiedades (i) , (v) y (vii) .

Para probar 52 $i)$ se define $w(x,t) = T_{\beta_1 0,2}(x,t) - T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t)$.
La función w satisface las siguientes condiciones

$$u_t - a_2^2 u_{xx} = -\frac{l}{tc_2}\beta_2\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \geq 0\ ,\ 0 \leq x \leq s_{\beta_1\beta_2}(t)\ ,\ t > 0$$

$$u(s_{\beta_1\beta_2}(t),t) = T_{\beta_1 0,2}(s_{\beta_1\beta_2}(t),t) \geq 0$$

$$u(x,0) = 0.$$

Entonces, por principio del máximo se tiene que $w(x,t) \geq 0$ para $0 \leq x \leq s_{\beta_1\beta_2}(t)$, $t > 0$, es decir $(52)(i)$.
Sea $v(x,t) = T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t) - T_{0\beta_2,2}(x,t)$.
La función v satisface las siguientes condiciones

$$v_t - a_2^2 v_{xx} = 0\ ,\ 0 \leq x \leq s_{0\beta_2}(t),\ t > 0$$

$$v(s_{0\beta_2}(t),t) = T_{\beta_1\beta_2,2}(s_{0\beta_2}(t),t) \geq 0$$

$$v(0,t) = 0.$$

Luego, por el principio del máximo resulta $v(x,t) \geq 0$, es decir $(52)(v)$.

Sea $u(x,t) = T_{\beta_1 0,1}(x,t) - T_{00,1}(x,t)$.
La función u satisface las siguientes condiciones

$$u_t - a_1^2 u_{xx} = \frac{l}{c_1 t}\beta_1\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \geq 0\ ,\ x > s_{\beta_1 0}(t)\ ,\ t > 0$$

$$u(s_{\beta_1 0}(t),t) = -T_{00,1}(s_{\beta_1 0}(t),t) \geq 0$$

$$u(x,0) = T_{\beta_1 0,1}(x,0) - T_{00,1}(x,0) = -C - (-C) = 0.$$

Entonces, por principio del máximo se tiene que $u(x,t) \leq 0$, es decir $(52)(vii)$.$\blacksquare$

III. SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE CON UNA CONDICION DE FLUJO SOBRE EL BORDE FIJO x=0.

En esta sección se considera el siguiente problema de frontera libre:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x,t) = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_2} g_2(x,t), \qquad 0 < x < s(t), \qquad t > 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x,t) = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho c_1} g_1(x,t), \qquad x > s(t), \qquad t > 0 \tag{54}$$

$$T_1\left(s(t),t\right) = T_2\left(s(t),t\right) = 0, \qquad t > 0 \tag{55}$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\left(s(t),t\right) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\left(s(t),t\right) = \rho l \, \dot{s}\,(t), \qquad t > 0 \tag{56}$$

$$T_1(x,0) = T_1(+\infty,t) = -C < 0, \qquad x > 0, \qquad t > 0 \tag{57}$$

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t) = \frac{-q_0}{\sqrt{t}}, \qquad t > 0 \tag{58}$$

$$s(0) = 0. \tag{59}$$

el cual es en realidad el problema (1)-(7) pero la condición (6) es reemplazada por la dada en (58), que es una condición de flujo de calor donde q_0 es una constante positiva.

Lema 8. *Si se definen las mismas transformaciones* (9) *y* (10) *dadas en la sección* II.1.*, el problema* (53) − (59) *se transforma en*

$$\theta_2''(y) + 2\mu^2 y \theta_2'(y) = -\frac{4\mu^2 l}{c_2}\beta_2(\mu y), \qquad 0 < y < 1 \tag{60}$$

$$\theta_2'(0) = -\frac{2\mu q_0}{\rho c_2 a_2} \tag{61}$$

$$\theta_1(1) = \theta_2(1) = 0 \tag{62}$$

$$\theta_1(+\infty) = -C \tag{63}$$

$$\theta_1''(y) + 2\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)^2 y\theta_1'(y) = -\frac{4l}{c_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)^2 \beta_1\left(\frac{a_2}{a_1}\mu y\right), \qquad 1 < y \tag{64}$$

$$k_1\theta_1'(1) - k_2\theta_2'(1) = 2\left(\mu a_2\right)^2 \rho l\ . \tag{65}$$

Además

$$s(t) = 2a_2\mu\sqrt{t} \tag{66}$$

donde μ es una constante adimensional a ser determinada.

Demostración. Las ecuaciones $(60), (62)-(65)$ se obtienen a partir de $(53), (54)-(57)$ de la misma forma que en la sección II.1.

Además como

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}(x,t) = \frac{\theta_2'(y)}{2\mu a_2 \sqrt{t}} \ ,$$

resulta

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t) = \frac{-q_0}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow k_2 \frac{\theta_2'(0)}{2\mu a_2 \sqrt{t}} = \frac{-q_0}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \theta_2'(0) = \frac{-2\mu a_2 q_0}{k_2} \Leftrightarrow \theta_2'(0) = \frac{-2\mu q_0}{\rho c_2 a_2} \ .$$

Por último, como el problema anterior es un problema de tipo Stefan, las condiciones sobre la frontera libre implican necesariamente que dicha frontera debe ser de la forma dada en (66) donde μ es una constante adimensional que debe ser determinada.■

Lema 9. *Si se define*

$$R_j(\eta) = \theta_j\left(\frac{\eta}{\mu}\right), \qquad j = 1,2, \qquad \eta = \mu y, \tag{67}$$

entonces el problema $(60)-(65)$ *se lleva a*

$$R_2''(\eta) + 2\eta R_2'(\eta) = -\frac{4l}{c_2}\beta_2(\eta), \qquad 0 < \eta < \mu \tag{68}$$

$$R_1''(\eta) + 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\eta R_1'(\eta) = -\frac{4a_2^2 l}{a_1^2 c_2}\beta_1(\frac{a_2}{a_1}\eta), \qquad \eta > \mu \tag{69}$$

$$R_1(\mu) = R_2(\mu) = 0 \tag{70}$$

$$k_1 R_1'(\mu) - k_2 R_2'(\mu) = 2\rho l \mu a_2^2 \tag{71}$$

$$R_1(+\infty) = -C \tag{72}$$

$$R_2'(0) = \frac{-2q_0}{\rho c_2 a_2} \tag{73}$$

Lema 10. *La solución al problema* (68)-(73) *está dada por*

$$R_1(\eta) = -\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a_2}{a_1}\eta\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)\right] + \varphi_3(\eta), \quad \eta > \mu,$$

$$\varphi_3(\eta) = \frac{2l\sqrt{\pi}}{c_1}\int_{\frac{a_2}{a_1}\mu}^{\frac{a_2}{a_1}\eta} \beta_1(u)\exp(u^2)\left[\operatorname{erf}(u) - \operatorname{erf}\left(\frac{a_2}{a_1}\eta\right)\right] du \tag{74}$$

y

$$R_2(\eta) = \frac{q_0\sqrt{\pi}}{\rho c_2 a_2}(\operatorname{erf}(\mu) - \operatorname{erf}(\eta)) + \varphi_2(\eta) - \varphi_2(\mu),\ 0 < \eta < \mu\ , \tag{75}$$

donde φ_2 *fue definida en* (26) *y la incógnita* μ *debe satisfacer la siguiente ecuación*

$$W(x,\beta_1) = V(x,\beta_2)\ \ ,\ \ x > 0 \tag{76}$$

siendo

$$W(x,\beta_1) = \frac{x\exp(x^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)}[Ste_1 - 2\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty}\operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du], \tag{77}$$

$$V(x,\beta_2) = \frac{q_0}{\rho l a_2} - x\exp(x^2) + 2\int_0^x \beta_2(u)\exp(u^2)du.$$

Demostración. Luego de realizar cálculos elementales, de $(69), (70)$ y (72) se obtiene (74) y de $(68), (70)$ y (73) se tiene (75).

Falta ver que la ecuación (71) es equivalente a (76).

Teniendo en cuenta (74) y (75) se tiene que

$$R_1'(\eta) = -\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{\frac{a_1}{a_2}\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{a_2}{a_1}\eta\right)^2\right) - \frac{4l}{c_1}\exp(-\eta^2)\int_{\frac{a_2}{a_1}\mu}^{\frac{a_2}{a_1}\eta}\beta_1(u)\exp(u^2)du,$$

$$R_2'(\eta) = -\frac{2q_0}{\rho c_2 a_2}\exp(-\eta^2) - \frac{4l}{c_2}\exp(-\mu^2)\int_0^\eta \beta_2(u)\exp(u^2)du$$

entonces

$$R_1'(\mu) = -\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{\frac{a_1}{a_2}\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)^2\right), \tag{78}$$

$$R_2'(\mu) = -\frac{2q_0}{\rho c_2 a_2}\exp(-\mu^2) - \frac{4l}{c_2}\exp(-\mu^2)\int_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du \tag{79}$$

Se sabe que $k_i = a_i^2\rho c_i$ entonces la ecuación (71) puede escribirse del siguiente modo:

$$\frac{c_1}{c_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 R_1'(\mu) - R_2'(\mu) = \frac{2l\mu}{c_2}\ .$$

Se sustituye ahora en la última ecuación las expresiones obtenidas en (78) y (79) y se tiene que:

$$-\left(\tfrac{a_1}{a_2}\right)^2\frac{c_1}{c_2}\frac{2(C+\varphi_1(+\infty))}{\sqrt{\pi}\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)\exp\left(\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)^2\right)} + \exp(-\mu^2)\left(\tfrac{2q_0}{\rho c_2 a_2} + \tfrac{4l}{c_2}\int_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right) = \frac{2l\mu}{c_2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{c_1}{c_2}\frac{(C+\varphi_1(+\infty))}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)} + \frac{1}{\mu}\exp(-\mu^2)\left(\tfrac{q_0}{\rho c_2 a_2} + \tfrac{2l}{c_2}\int_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right) = \frac{l}{c_2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{c_1\,(C+\varphi_1(+\infty))}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)l} + \frac{1}{\mu\exp(\mu^2)}\left(\tfrac{q_0}{\rho l a_2} + 2\int_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\frac{c_1 C}{l} - \frac{c_1\varphi_1(+\infty)}{l}}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)} = 1 - \frac{1}{\mu\exp(\mu^2)}\left(\tfrac{q_0}{\rho l a_2} + 2\int_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{-Ste_1 + 2\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}\mu}^{+\infty}\beta_1(u)\exp(u^2)\operatorname{erf} c(u)du}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)} = 1 - \tfrac{1}{\mu\exp(\mu^2)}\left(\tfrac{q_0}{\rho l a_2} + 2\int_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right) \Leftrightarrow$$

$$-Ste_1 + 2\sqrt{\pi}\int_{\frac{a_2}{a_1}\mu}^{+\infty}\beta_1(u)\exp(u^2)\operatorname{erf} c(u)du =$$

$$= Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}\mu\right)\left(1-\tfrac{1}{\mu\exp(\mu^2)}\left(\tfrac{q_0}{\rho l a_2}+2\int\limits_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$-Ste_1+2\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{a_2}{a_1}\mu}^{+\infty}\beta_1(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}c(u)du=$$

$$=\frac{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}{\mu\exp(\mu^2)}\left(\mu\exp(\mu^2)-\tfrac{q_0}{\rho l a_2}-2\int\limits_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu\exp(\mu^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}\left(-Ste_1+2\sqrt{\pi}\int\limits_{\frac{a_2}{a_1}\mu}^{+\infty}\beta_1(u)\exp(u^2)\operatorname{erf}c(u)du\right)$$

$$=\quad\left(\mu\exp(\mu^2)-\tfrac{q_0}{\rho l a_2}-2\int\limits_0^{\mu}\beta_2(u)\exp(u^2)du\right)\Leftrightarrow$$

$$W(\mu,\beta_1)=V(\mu,\beta_2),$$

lo cual prueba que μ es solución de (76) .■

Lema 11. *(a) La función $W(x,\beta_1)$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $W(0,\beta_1)=\dfrac{a_1}{a_2\sqrt{\pi}}[Ste_1-2\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\operatorname{erf}c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du],$

(ii) $W(+\infty,\beta_1)=+\infty,$

(iii) Si la condición (41) *se verifica entonces* $W(0,\beta_1)\geq 0$ *y* $\dfrac{\partial W}{\partial x}(x,\beta_1)>0,\ \forall x>0,$

(iv) Si la condición (42) *se verifica entonces* $W(0,\beta_1)<0.$

(b) La función $V(x,\beta_2)$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $V(0,\beta_2)=\dfrac{q_0}{\rho l a_2}$, *(ii)* $V(+\infty,\beta_2)=-\infty$,

(iii) $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,\beta_2)=-\exp(x^2)\left(1+2x^2\right)+\beta_2(x)\exp(x^2)<0,\ \forall x>0$.

Demostración. Se prueba (a)(iii). Las propiedades restantes se demuestran a través de cálculos elementales.

$$W(0,\beta_1) = [Ste_1 - 2\sqrt{\pi} \int\limits_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du] \lim_{x\to 0} \frac{x\exp(x^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)} =$$

$$= [Ste_1 - 2\sqrt{\pi} \int\limits_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du] \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)\,(1+2x^2)}{Q'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\frac{a_2}{a_1}} =$$

$$= [Ste_1 - 2\sqrt{\pi} \int\limits_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du] \frac{a_1}{a_2\sqrt{\pi}} \underset{(41)}{\geq} 0 \ .$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x}(x,\beta_1) &= \left(\frac{x\exp(x^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)}\right)' [Ste_1 - 2\sqrt{\pi} \int\limits_{\frac{a_2}{a_1}x}^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du] + \\ &+ \left(\frac{x\exp(x^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)}\right) 2\sqrt{\pi}\beta_1\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\exp\left(\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2\right)\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\frac{a_2}{a_1} \quad , \end{aligned}$$

para demostrar (a)(iii) basta ver que

$$\left(\frac{x\exp(x^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)}\right)' \geq 0 \ .$$

Se tiene que

$$Q'(x) = \frac{Q(x)(1+2x^2) - 2x^2}{x}$$

entonces

$$\left(\frac{x\exp(x^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)}\right)' = \frac{\exp(x^2)\,(1+2x^2)\,Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) - x\exp\left(x^2\right)Q'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\frac{a_2}{a_1}}{Q^2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)} =$$

$$= \frac{\exp(x^2)\,(1+2x^2)\,Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) - \exp\left(x^2\right)\left(Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\left(1+2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2\right) - 2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2\right)}{Q^2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)} =$$

$$= \frac{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\exp(x^2)2x^2 - 2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2 Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\exp\left(x^2\right) - 2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2\exp\left(x^2\right)}{Q^2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)} =$$

$$= \frac{Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\exp(x^2)2x^2 + 2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)^2\exp\left(x^2\right)\left(1 - Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\right)}{Q^2\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)} \geq 0. \blacksquare$$

Teorema 3. *(a) Si la condición* (41) *se verifica entonces la ecuación* (76) *tiene una única solución* $\mu > 0$ *si y sólo si* q_0 *satisface la siguiente desigualdad*

$$q_0 \geq 2a_1\rho l\left[\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du\right] \tag{80}$$

(b) Si (42) *se verifica, entonces la ecuación* (76) *tiene al menos una solución* $\mu > 0$, $\forall q_0 > 0$.
(c) Si β_i $(i = 1, 2)$ *satisfacen las hipótesis dadas en la introducción entonces el problema de frontera libre* (53)-(59) *tiene una solución explícita dada por*

$$T_1(x,t) = \frac{-\left(C + \varphi_1(+\infty)\right)}{\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)\right] + \varphi_3\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)$$

para $x > s(t), \qquad t > 0;$ (81)

$$T_2(x,t) = \frac{q_0\sqrt{\pi}}{\rho c_2 a_2}\left[\operatorname{erf}(\mu) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)\right] + \varphi_2\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) - \varphi_2\left(\mu\right) \tag{82}$$

para $0 < x < s(t), \qquad t > 0;$

donde φ_2 *y* φ_3 *están definidas en* (26) *y* (74) *respectivamente, la frontera libre está dada por*

$$s(t) = 2a_2\mu\sqrt{t},$$

y μ es la única solución de la ecuación (76) .

Demostración.

(a) Por el Lema 11 se sabe que $W(0,\beta_1) \geq 0$ y que W es una función creciente en la variable x. Además $V(x,\beta_2)$ es una función que decrece indefinidamente desde $\dfrac{q_0}{\rho l a_2} \geq 0$, entonces existe una única solución μ de la ecuación (76) si y sólo si

$$\frac{q_0}{\rho l a_2} \geq W(0,\beta_1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{q_0}{\rho l} \geq \frac{a_1}{\sqrt{\pi}}\left[Ste_1 - 2\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du\right] \Leftrightarrow (80)\,.$$

(b) La prueba es una simple aplicación del Lema 11.

(c) De (9), (10) y (67) se tiene

$$T_j(x,t) = \theta_j(y) = R_j(\eta)$$

$$y = \frac{x}{s(t)} = \frac{x}{2\mu a_2\sqrt{t}} \quad , \quad \eta = \mu y = \frac{x}{2a_2\sqrt{t}} \ ,$$

además de (74) y (75) resulta que

$$T_1(x,t) = R_1(\mu y) = R_1\left(\frac{\mu x}{s(t)}\right) = R_1\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \frac{-\left(C+\varphi_1(+\infty)\right)}{\operatorname{erf} c\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)\right] + \varphi_3\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),\ x > s(t)\ ,$$

y

$$T_2(x,t) = R_2(\mu y) = R_2\left(\frac{\mu x}{s(t)}\right) = R_2\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \frac{q_0\sqrt{\pi}}{\rho c_2 a_2}\left[\operatorname{erf}(\mu) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)\right] + \varphi_2\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) - \varphi_2(\mu)\ ,\ 0 < x < s(t)\ ,$$

donde φ_2,$\varphi_3, s(t)$ están definidas por $(26)\,,(74)$ y (66) respectivamente y μ es solución de la ecuación (76) .■

Observación 2. *En el caso particular* $\beta_1 \equiv 0$ *y* $\beta_2 \leq 0$ *se tiene que*

$$\exists!\ \mu > 0 \text{ solución de la ecuación } (76) \Longleftrightarrow q_0 > \frac{Ck_1}{a_1\sqrt{\pi}} \ .$$

Este resultado fue obtenido en [15].

III.2. PROPIEDADES DE MONOTONIA EN EL CASO CON CONDICION DE FLUJO EN EL BORDE FIJO $\mathbf{x = 0}$.

Análogamente a lo hecho en II.2, notando con $T_{\beta_1\beta_2,1}(x,t)$, $T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t)$ y $s_{\beta_1,\beta_2}(t)$ (i.e μ_{β_1,β_2}) a la solución del problema (53)-(59) para los datos β_1 y β_2, se comparará dicha solución con la del caso correspondiente a $\beta_1 = 0$ y también con la de $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Lema 12. *Si* $\beta_1 \geq 0$ *y* $\beta_2 \leq 0$ *entonces se tienen las siguientes propiedades de monotonía*

$$(i)\ s_{0,\beta_2}(t) \ \leq \ s_{\beta_1,\beta_2}(t) \leq s_{\beta_1,0}(t) \ , \ t > 0 \ , \qquad (83)$$

$$(ii)\ s_{0,\beta_2}(t) \ \leq \ s_{0,0}(t) \leq s_{\beta_1,0}(t) \ , \ t > 0 \ .$$

Demostración. Para probar (83) es suficiente demostrar la misma desigualdad que para el coeficiente μ, es decir

$$\begin{aligned} (i)\ \mu_{0,\beta_2} \ &\leq \ \mu_{\beta_1,\beta_2} \leq \mu_{\beta_1,0}, \\ (ii)\ \mu_{0,\beta_2} \ &\leq \ \mu_{0,0} \leq \mu_{\beta_1,0}. \end{aligned} \qquad (84)$$

Para esto se consideran las propiedades de las funciones W y V dadas en el Lema 11 y también

$$
\begin{aligned}
&(i)\;\; W(0,0)=\frac{a_1}{a_2\sqrt{\pi}}Ste_1\;, \quad (ii)\; W(+\infty,0)=+\infty,\\
&(iii)\;\; \frac{\partial W}{\partial x}(x,0)>0,\;\forall\, x>0,\\
&(iv)\; W(x,\beta_1)\leq W(x,0)\;,\forall\, x>0,\;\beta_1>0,\\
&(v)\;\; V(0,0)=\frac{q_0}{\rho l a_2}\;, \quad (vi)\; V(+\infty,0)=-\infty\;\;,\\
&(vii)\; \frac{\partial V}{\partial x}(x,0)<0,\;\forall x>0,\\
&(viii)\; V(x,\beta_2)\leq V(x,0)\;,\forall\, x>0,\;\beta_2<0,
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Entonces, comparando las funciones W y V y realizando un análisis similar al realizado en el Lema 7, se obtiene (84)(i),(ii).$\blacksquare$

Teorema 4. *La solución al problema* (53)-(59) *para los datos* $\beta_1 \geq 0$ *y* $\beta_2 \leq 0$ *satisface las siguientes propiedades de monotonía*

$$
\begin{aligned}
&(i)\; T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t)\leq T_{\beta_1 0,2}(x,t), && 0\leq x\leq s_{\beta_1,\beta_2}(t)\;,\; t>0,\\
&(ii)\; T_{00,2}(x,t)\leq T_{\beta_1 0,2}(x,t), && 0\leq x\leq s_{0,0}(t)\;,\; t>0,\\
&(iii)\; T_{0\beta_2,2}(x,t)\leq T_{00,2}(x,t), && 0\leq x\leq s_{0,\beta_2,}(t)\;,\; t>0,\\
&(iv)\; T_{0\beta_2,1}(x,t)\leq T_{00,1}(x,t), && x>s_{0,0}(t)\;,\; t>0,\\
&(v)\;\; T_{0\beta_2,2}(x,t)\leq T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t), && 0\leq x\leq s_{0,\beta_2,}(t)\;,\; t>0,\\
&(vi)\; T_{0\beta_2,1}(x,t)\leq T_{\beta_1\beta_2,1}(x,t) && x>s_{\beta_1,\beta_2,}(t)\;,\; t>0,\\
&(vii)\; T_{00,1}(x,t)\leq T_{\beta_1 0,1}(x,t), && x>s_{\beta_1,0}(t)\;,\; t>0,\\
&(viii)\; T_{\beta_1\beta_2,1}(x,t)\leq T_{\beta_1 0,1}(x,t), && x>s_{\beta_1,0}(t)\;,\; t>0.
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Demostración. Todas las propiedades pueden ser probadas usando el principio del máximo para la ecuación del calor.

Solo se probará la propiedad (i) .

Sea $v(x,t) = T_{\beta_1 0,2}(x,t) - T_{\beta_1\beta_2,2}(x,t)$.

La función v satisface las siguientes condiciones:

$$v_t - a_2^2 v_{xx} = -\frac{l}{c_2 t}\beta_2\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \geq 0\ ,\ 0 \leq x \leq s_{\beta_1\beta_2}(t)\ ,\ t > 0$$

$$v(s_{\beta_1\beta_2}(t),t) = T_{\beta_1 0,2}(s_{\beta_1\beta_2}(t),t) \underset{(83)(i)}{\geq} 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial T_{\beta_1 0,2}}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial T_{\beta_1\beta_2,2}}{\partial x}(x,0) \underset{(58)}{=} 0$$

Entonces por el principio del máximo se tiene que $v(x,t) \geq 0$, esto es (86) (i).■

IV. EQUIVALENCIA DE LOS DOS PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE.

Se considera la solución $T_2(x,t)$ del problema (53)-(59) dada por (82).

Se calcula $T_2(0,t)$ y se tiene que

$$\begin{aligned} T_2(0,t) &= \frac{q_0\sqrt{\pi}}{\rho c_2 a_2}\operatorname{erf}(\mu) - \varphi_2(\mu) = \\ &= \frac{q_0\sqrt{\pi}}{\rho c_2 a_2}\operatorname{erf}(\mu) - \frac{2l\sqrt{\pi}}{c_2}\int_0^{\mu}\beta_2(z)\exp(z^2)\left(\operatorname{erf}(z) - \operatorname{erf}(\mu)\right)dz = \\ &= B_0(\mu) \end{aligned} \tag{87}$$

la cual es constante respecto del tiempo.

Si se reemplaza B por $B_0(\mu)$ en la condición (6) y se resuelve el problema (1)-(7) se obtienen las siguientes soluciones de similaridad

$$T_1^*(x,t) = \frac{-\left(C + \varphi_1(+\infty)\right)}{\operatorname{erf}c\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}(\lambda)\right] + \varphi_1\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)$$

para $x > s(t), \qquad t > 0;$

$$T_2^*(x,t) = B_0(\mu) - \left(B_0(\mu) + \varphi_2(\lambda)\right)\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} + \tag{88}$$

$$+\frac{2l\sqrt{\pi}}{c_2}\int_0^{\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}}\beta_2(u)\exp(u^2)\left(\operatorname{erf}(u) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)\right)du$$

para $0 < x < s(t), \qquad t > 0;$

donde $\varphi_1(\eta)$ y $\varphi_2(\eta)$ están definidas en (27), (26) respectivamente y la frontera libre está dada por

$$s(t) = 2\lambda a_2\sqrt{t}\ .$$

El coeficiente λ debe ser la solución de la siguiente ecuación

$$f_1(x,\beta_1) = Q\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)\left[\frac{Ste_2^*}{\sqrt{\pi}} - F(x,\beta_2)\right],\ x > 0, \tag{89}$$

$$Ste_2^* = \frac{B_0(\mu)c_2}{l} \tag{90}$$

Se observa que esta última ecuación es la ecuación (28) donde Ste_2 ha sido reemplazada por Ste_2^*.

Teorema 5. *Bajo las hipótesis* (41) *y* (80) *la solución μ de la ecuación* (76) *es también la solución de la ecuación* (89), *es decir $\mu = \lambda$.*

Demostración. Se tiene:

$$\mu \text{ solución de } (76) \Longleftrightarrow W(\mu,\beta_1) = V(\mu,\beta_2) \underset{(77)(33)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{q_0}{\rho l a_2} + 2\int_0^\mu \beta_2(z)\exp(z^2)dz - \mu\exp(\mu^2) = \frac{\mu\exp(\mu^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right)}h_1(\mu) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{q_0}{\rho l a_2} + 2\int_0^\mu \beta_2(z)\exp(z^2)dz - \mu\exp(\mu^2)\right)Q\left(\frac{a_2}{a_1}\mu\right) = \mu\exp(\mu^2)h_1(\mu) \underset{(32)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\tfrac{q_0\,\mathrm{erf}(\mu)}{\rho l a_2} + 2\int_0^\mu \beta_2(z)\,\mathrm{erf}(\mu)\exp(z^2)dz - \mu\exp(\mu^2)\,\mathrm{erf}(\mu)\right)Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}\mu\right) =$$

$$= F_0(\mu)\,h_1(\mu) \underset{(29)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\tfrac{q_0\,\mathrm{erf}(\mu)}{\rho l a_2} - 2\int_0^\mu \beta_2(z)\left(\mathrm{erf}(z) - \mathrm{erf}(\mu)\right)\exp(z^2)dz + \right.$$

$$\left. -F_0(\mu) + 2\int_0^\mu \beta_2(z)\,\mathrm{erf}(z)\exp(z^2)dz\right)Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}\mu\right) = F_0(\mu)\,h_1(\mu) \underset{(37)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\tfrac{q_0\,\mathrm{erf}(\mu)}{\rho l a_2} - F(\mu,\beta_2) - 2\int_0^\mu \beta_2(z)\left(\mathrm{erf}(z) - \mathrm{erf}(\mu)\right)\exp(z^2)dz\right)Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}\mu\right) =$$

$$= f_1(\mu,\beta_1) \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_2}{\sqrt{\pi} l} \left(\tfrac{q_0 \operatorname{erf}(\mu) \sqrt{\pi}}{\rho l a_2 c_2} - \frac{2l\sqrt{\pi}}{c_2} \int_0^{\mu} \beta_2(z) \left(\operatorname{erf}(z) - \operatorname{erf}(\mu) \right) \exp(z^2) dz - F\left(\mu, \beta_2\right) \right) \right) Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}\mu \right)$$

$$= f_1(\mu, \beta_1) \underset{(87)}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{c_2}{\sqrt{\pi} l} B_0\left(\mu\right) - F\left(\mu, \beta_2\right) \right) Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}\mu \right) = f_1(\mu, \beta_1) \underset{(90)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mu \text{ es solución de la ecuación } (89)\,,$$

es decir $\mu = \lambda$. ■

Observación 2. *Si se calcula* $\dfrac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)$ *para el problema con condición de temperatura en el borde fijo* $x = 0$ *se tiene*

$$k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t) = -\frac{k_2 \left(B + \varphi_2\left(\lambda\right) \right)}{\sqrt{\pi} a_2 \sqrt{t} \operatorname{erf}(\lambda)}$$

y como ambos problemas son equivalentes entonces

$$q_0 = \frac{k_2 \left(B + \varphi_2\left(\lambda\right) \right)}{\sqrt{\pi} a_2 \operatorname{erf}(\lambda)}\ .$$

De (80) *se sabe que*

$$\frac{B + \varphi_2(\lambda)}{\operatorname{erf}(\lambda)} k_2 \geq 2a_1 \rho l \left[\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(z) \beta_1(z) \exp(z^2) dz \right]$$

entonces

$$\frac{B + \varphi_2(\lambda)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \geq \frac{a_2 \sqrt{\pi} 2a_1 \rho l}{k_2} \left[\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(z) \beta_1(z) \exp(z^2) dz \right]$$

o bien

$$\frac{B + \varphi_2(\lambda)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \geq \frac{a_1 l}{c_2 a_2} \left[Ste_1 - 2\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(z) \beta_1(z) \exp(z^2) dz \right] \qquad (91)$$

*La desigualdad (*91*) es una generalización de la desigualdad para el coeficiente que caracteriza la frontera libre* $s(t)$ *de la solución de Neumann para el caso particular* $\beta_1 = \beta_2 = 0$ obtenida en [15], *dada por*

$$\operatorname{erf}(\lambda) < \frac{B}{C} \sqrt{\frac{c_2 k_2}{c_1 k_1}}\ .$$

V. ESTUDIO DE UN CASO PARTICULAR.

Se estudia el caso particular que fue considerado en [14] para aplicaciones a procesos térmicos, es decir,

$$\beta_1(x) = \exp(-(x+d_1)^2) \;\; , \; \beta_2(x) = -\exp(-(x+d_2)^2), \;\; d_1, d_2 \in \mathbb{R} \qquad (92)$$

Lema 7. *Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $\displaystyle\int \operatorname{erf}(z)\exp(-2zd_1)dz = \frac{-\exp(-2zd_1)\operatorname{erf}(z)+\exp\left(d_1^2\right)\operatorname{erf}(z+d_1)}{2d_1}, d_1 \neq 0$

(ii) $\displaystyle\int \operatorname{erf}(z)dz = z\operatorname{erf}(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-z^2\right)$

(iii) *La función φ_1 definida por la expresión* (27)*, para el caso $d_1 \neq 0$ está dada por*

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) \;\; &= \;\; \tfrac{l\sqrt{\pi}}{c_1 d_1}\exp\left(-d_1^2\right)\Big\{\exp(-2\tfrac{a_2}{a_1}\lambda d_1)\left(\operatorname{erf}(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda) - \operatorname{erf}(\tfrac{a_2}{a_1}\eta)\right) + \\ &\quad + \exp\left(d_1^2\right)\left(\operatorname{erf}(\tfrac{a_2}{a_1}\eta + d_1) - \operatorname{erf}(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda + d_1)\right)\Big\}, \end{aligned} \qquad (93)$$

y

$$\varphi_1(+\infty) = \tfrac{l\sqrt{\pi}}{c_1 d_1}\exp\left(-d_1^2\right)\left\{\operatorname{erf}c(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda + d_1)\exp\left(d_1^2\right) - \operatorname{erf}c(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda)\exp(-2\tfrac{a_2}{a_1}\lambda d_1)\right\}. \qquad (94)$$

(iv) *La función φ_1, definida por la expresión* (27)*, para el caso $d_1 = 0$ está dada por*

$$\varphi_1(\eta) = \tfrac{2l\sqrt{\pi}}{c_1}\left\{\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\left(\operatorname{erf}(\tfrac{a_2}{a_1}\eta) - \operatorname{erf}(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda)\right) + \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\exp\left(-\left(\tfrac{a_2}{a_1}\eta\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\right)^2\right)\right)\right\} \; ,$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_1(+\infty) \;\; &= \;\; \tfrac{2l\sqrt{\pi}}{c_1}\left[\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\operatorname{erf}c\left(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\right) - \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\right)^2\right)\right] = \\ &= \;\; \tfrac{2l}{c_1}\left[Q\left(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\right) - 1\right]\exp\left(-\left(\tfrac{a_2}{a_1}\lambda\right)^2\right) \; . \end{aligned}$$

(v) *La función φ_2, definida por la expresión* (26) *está dada por*

$$\varphi_2(\eta) = \frac{-l\sqrt{\pi}}{c_2 d_2}\left[-\operatorname{erf}(\eta)\exp\left(-d_2^2\right) + \operatorname{erf}(\eta + d_2) - \operatorname{erf}(d_2)\right], \text{ si } d_2 \neq 0 \quad (95)$$

$$\varphi_2(\eta) = \frac{2l}{c_2}\left[1 - \exp\left(-\eta^2\right)\right], \text{ si } d_2 = 0 \ .$$

Teorema 6. *a) La desigualdad* (41) *es equivalente a*

$$Ste_1 \geqslant 2 \ , \ \textit{para } d_1 \geqslant 0 \tag{96}$$

$$Ste_1 \geqslant 2\sqrt{\pi}P(d_1), \ \textit{para } d_1 < 0 \tag{97}$$

donde

$$P(x) = \frac{\exp(-x^2) - \operatorname{erf} c(x)}{2x} \tag{98}$$

b) La solución explícita al problema de frontera libre con fuente de calor (1)-(7) *, con* $d_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0$ *está dada por*

$$\begin{gathered} T_1(x,t) = \frac{-\left(C + \varphi_1(+\infty)\right)}{\operatorname{erf} c\left(\dfrac{a_2}{a_1}\lambda\right)}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a_2}{a_1}\lambda\right)\right) + \varphi_1\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \\ \textit{para } x > s(t), \qquad t > 0; \\ T_2(x,t) = B - \left(B + \varphi_2\left(\lambda\right)\right)\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} + \\ + \frac{2l\sqrt{\pi}}{c_2}\int_0^{\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}} \beta_2(u)\exp(u^2)\left(\operatorname{erf}(u) - \operatorname{erf}\left(\tfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)\right) du, \\ \textit{para } 0 < x < s(t), \qquad t > 0; \end{gathered} \tag{99}$$

donde φ_1*y* φ_2 *están definidas en* (93) *y* (95) *y*

$$s(t) = 2\lambda a_2\sqrt{t}$$

es la frontera libre y λ *es la única solución de la ecuación* $f_1(x,\beta_1) = f_2(x,\beta_2)$ *,* $x > 0$, con β_1 *y* β_2 *dados por* (92)*.*

c) La desigualdad (80) *es equivalente a*

$$q_0 \geq 2a_1\rho l\left[\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2d_1}\left(\exp(-d_1^2) - \operatorname{erf} c(d_1)\right)\right] \text{ si } d_1 \neq 0 \tag{100}$$

$$q_0 \geq \frac{a_1 \rho l}{\sqrt{\pi}} \left[Ste_1 - 2 \right] \text{ si } d_1 = 0$$

d) La desigualdad (91) *es equivalente a*

$$\frac{B - \frac{l\sqrt{\pi}}{c_2 d_2} \left(\operatorname{erf}(\lambda + d_2) - \operatorname{erf}(d_2) - \operatorname{erf}(\lambda) \exp\left(-d_2^2\right) \right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \geq \tag{101}$$

$$\geq \frac{la_1}{c_2 a_2} \left[Ste_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{d_1} \left(\exp(-d_1^2) - \operatorname{erf} c(d_1) \right) \right] \; si \; d_1 \neq 0 \; ,$$

y

$$\frac{B - \frac{2l}{c_2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(-\lambda^2\right) \right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \geq \frac{la_1}{c_2 a_2} \left[Ste_1 - 2 \right] \; si \; d_1 = 0 \; .$$

Demostración. a) Se tiene que

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u) \beta_1(u) \exp(u^2) du = \lim_{z \to +\infty} \int_0^z \operatorname{erf} c(u) \exp\left(-(u + d_1)^2\right) \exp(u^2) du =$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \exp\left(-d_1^2\right) \left(\int_0^z \exp\left(-2ud_1\right) du - \int_0^z \exp\left(-2ud_1\right) \operatorname{erf}(u) du \right) =$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \exp\left(-d_1^2\right) \left(-\tfrac{\exp(-2zd_1)}{2d_1} + \frac{1 + \exp\left(-2zd_1\right) \operatorname{erf}(z)}{2d_1} - \tfrac{\exp\left(d_1^2\right)}{2d_1} \left(\operatorname{erf}(z + d_1) - \operatorname{erf}(d_1) \right) \right) =$$

$$= \tfrac{\exp\left(d_1^2\right)}{2d_1} \left(1 - \exp\left(-d_1^2\right) \left(1 - \operatorname{erf}(d_1)\right) \right) = \tfrac{1}{2d_1} \left(\exp\left(-d_1^2\right) - 1 + \operatorname{erf}(d_1) \right) =$$

$$= \frac{\exp(-d_1^2) - \operatorname{erf} c(d_1)}{2d_1} \; \text{ para } d_1 \neq 0 \; .$$

Para $d_1 = 0$, aplicando el Lema 7 (ii) se tiene

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u) \beta_1(u) \exp(u^2) du = \lim_{z \to +\infty} \int_0^z \operatorname{erf} c(u) \exp\left(-u^2\right) \exp(u^2) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \; .$$

Por lo tanto

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du = \begin{cases} P(d_1) = \dfrac{\exp(-d_1^2) - \operatorname{erf} c(d_1)}{2d_1}, \text{ si } d_1 \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ , \text{ si } d_1 = 0 \end{cases} \tag{102}$$

donde la función $P(x)$ satisface las siguientes propiedades:

$P(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $P(+\infty) = 0$, $P(-\infty) = 0$, $P(x) > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Entonces se obtiene que la condición (41) para $d_1 \neq 0$ es equivalente a

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du \leq \frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} \Leftrightarrow P(d_1) \leq \frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} \Leftrightarrow Ste_1 \geq 2\sqrt{\pi}P(d_1)$$

y para $d_1 = 0$ se tiene que (41) es equivalente a

$$2 \leq Ste_1, \text{ si } d_1 = 0\ .$$

b) Teniendo en cuenta las expresiones (93), (94) y (95), se obtienen las expresiones explícitas (99) para las temperaturas T_1 y T_2.

c) Para obtener (100) se reemplaza la expresión (102) en (80), es decir, para $d_1 \neq 0$ se tiene

$$q_0 \geq 2a_1\rho l \left(\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du \right) \Leftrightarrow$$

$$q_0 \geq 2a_1\rho l \left(\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - P(d_1) \right) \Leftrightarrow$$

$$q_0 \geq 2a_1\rho l \left(\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{\exp(-d_1^2) - \operatorname{erf} c(d_1)}{2d_1} \right)\ .$$

Para el caso $d_1 = 0$ se tiene

$$q_0 \geq 2a_1\rho l \left(\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \int_0^{+\infty} \operatorname{erf} c(u)\beta_1(u)\exp(u^2)du \right) \Leftrightarrow$$

$$q_0 \geq 2a_1\rho l \left(\frac{Ste_1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \Leftrightarrow q_0 \geq \frac{a_1\rho l}{\sqrt{\pi}}\left(Ste_1 - 2\right)\ .$$

d) En (91) se sustituye $\varphi_2(\lambda)$ por la expresión

$$\varphi_2(\lambda) = \frac{-l\sqrt{\pi}}{c_2 d_2}\left(\operatorname{erf}(\lambda + d_2) - \operatorname{erf}(d_2) - \operatorname{erf}(\lambda)\right)\exp\left(-d_2^2\right)\,,\ \text{si } d_2 \neq 0 \tag{103}$$

o

$$\varphi_2(\lambda) = \frac{-2l}{c_2}\left(1 - \exp\left(-\lambda^2\right)\right),\ \text{si } d_2 = 0$$

y se obtiene (89).■

CONCLUSION.

Se estudiaron dos problemas de Stefan a dos fases con fuente de calor en el interior, tanto en las fase sólida como en la líquida para un material semi-infinito. Las funciones que describen las fuentes de calor interno fueron consideras del tipo $g_j(x,t) = \frac{\rho l}{t}\beta_j\left(\frac{x}{2a_j\sqrt{t}}\right)$ ($j = 1$ fase sólida; $j = 2$ fase líquida) donde $\beta_j = \beta_j(\eta)$ son funciones con ciertas propiedades de regularidad. Se consideró una temperatura inicial negativa y en el borde fijo $x = 0$ se impuso en uno de ellos una temperatura constante positiva y en el otro problema, una condición de flujo del tipo $-q_0/\sqrt{t}$ ($q_0 > 0$). Se obtuvieron soluciones explícitas para ambos problemas. En el caso con condición de flujo la solución existe bajo una restricción para el coeficiente q_0 mientras que en el primer caso existe solución cualesquiera sean los datos iniciales del problema. Además se demostró la equivalencia de los dos problemas de frontera libre. Finalmente, se estudió un caso particular donde $\beta_j(\eta) = \exp\left(-(\eta + d_j)^2\right)$ con $d_j \in \mathbb{R}\ \beta_j$ ($j = 1, 2$), los cuales son importantes en procesos térmicos, por ejemplo en procesos de sublimación-deshidratación.

Se demostraron propiedades de monotonicidad de las soluciones para ambos problemas.

También se logró probar la equivalencia de los dos problemas de frontera libre.

References

[1] S. Bhattacharya - S. Nandi - S. DasGupta - S. De, "A*nalytical solution of transient heat tranfer with variable source for applications in nuclear reactors*", Int. Comm. Heat Mass Transfer, **28** #7 (2001), 1005-1013.

[2] J. E. Bouillet, "*Self-similar solutions, having jumps and intervals of constancy, of a diffusion-heat conduction equation*", IMA Prepints #230, Univ. Minnesota (1986).

[3] J. E. Bouillet - D. A. Tarzia, "*An integral equation for a Stefan problem with many phases and a singular source*", Revista de la Unión Mat. Argentina, **41** #4 (2000) 1-8.

[4] H. S. Carslaw - J. C. Jaeger, "*Conduction of heat in solids*", *Oxford University Press, London* (1959).

[5] J. Crank, "*Free and Moving Boundary Problems*", Clarendon Press, Oxford (1984).

[6] D. F. Dyer - J. E. Sunderland, "*The Transient Temperature Distribution During Sublimation Dehydration*", ASME Journal of Heat Transfer, **89** (1967) 109-110.

[7] D. F. Dyer - J. E. Sunderland, "*Heat and Mass Transfer Mechanisms in Sublimation Dehydration*", ASME Journal of Heat Transfer, **90** (1968) 379-384.

[8] D. F. Dyer - J. E. Sunderland, "*Freeze-Drying of Bodies Subject to Radiation Boundary Conditions*", ASME Journal of Heat Transfer, **93** (1971) 427-431.

[9] H. Feng, "*Analysis of microwave assisted fluidized-bed drying of particulate product with a simplified heat and mass transfer model*", Int. Comm Heat Mass Transfer, **29** #8 (2002) 1021-1028.

[10] G. Lamé - B. P. Clapeyron, "*Memoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide",* Annales Chimie Physique **47**, 250-256 (1831).

[11] J. L. Menaldi - D. A. Tarzia, "*Generalized Lamé Clapeyron solution for a one-phase source Stefan problem*", Comp. Appl. Math, **12** #2 (1993) 123-142.

[12] G.A. Mercado - B. P. Luce - J. Xin, "*Modelling thermal front dynamics in microwave heating*", IMA J. Appl. Math., **67** (2002) 419-439.

[13] P. Ratanadecho - K. Aoki - M. Akahori, "*A numerical an experimental investigations of the modeling of microwave melting of frozen packed beds using a rectangular wave guide*", Int. Comm Heat Mass Transfer, **28** (2001) 751-762.

[14] E. P. Scott, "*An analytical solution and sensitivity study of sublimation-dehydration within a porous medium with volumetric heating*", Journal of Heat Transfer, **116** (1994) 686-693.

[15] D. A. Tarzia, "*An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*", Quart. Appl. Math, **39** (1981-82) 491-497.

[16] M. Ward, "*Thermal runaway and microwave heating in thin cylindrical domains*", IMA Journal of Applied Mathematics, **67** (2002) 177-200.