SOLUCIONES EXPLÍCITAS PARA UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE A DOS FASES CON CONTRACCIÓN O DILATACIÓN DEL MATERIAL

María F. Natale[♭], Eduardo A. Santillan Marcus[♭] y Domingo A. Tarzia[♭,†]

[♭]*Departamento de Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, FNatale@austral.edu.ar; ESantillan@austral.edu.ar; DTarzia@austral.edu.ar*
[†]*CONICET; Argentina*

Resumen: Se considera un caso de solidificación unidimensional de una sustancia pura que inicialmente se encuentra en estado líquido en el intervalo acotado $[0, l]$. Inicialmente, el líquido se encuentra por encima de la temperatura de congelamiento, se refrigera en $x = 0$ mientras que en $x = l$ se lo mantiene adiabático. En el tiempo $t = 0$, la temperatura del líquido en $x = 0$ desciende hasta el punto de congelación y comienza la solidificación, donde $x = s(t)$ es la posición de la interfase sólido-líquida. Como el líquido se solidifica, se contrae ($0 < r < 1$) o se expande ($r < 0$) y aparece una región entre $x = 0$ y $x = rs(t)$, con $r < 1$. Se estudian las distribuciones de las temperaturas de las fases sólida y líquida y la posición de las dos fronteras libres ($x = rs(t)$ y $x = s(t)$) en el proceso de solidificación cuando se aplican tres diferentes condiciones de contorno sobre la frontera libre $x = rs(t)$ obteniéndose una solución explícita de tipo similaridad para los tres casos. Más aún, la solución del problema depende de un parámetro el cual es la única solución de una ecuación trascendental.

Palabras clave: *problema de Stefan, ecuación del calor, problema de frontera libre, problema de solidificación, expansión, solución explícita.*
2000 AMS Subject Classification: 35R35, 80A22, 35C05

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un problema similar al presentado en [13], [14] a fin de obtener soluciones explícitas para un problema de frontera libre en el cual la sustancia se contrae o se expande estando inicialmente en el intervalo acotado $[0, l]$. Inicialmente, el líquido se encuentra por encima de la temperatura de congelamiento y se refrigera en $x = 0$ mientras que en $x = l$ se mantiene adiabático. En $t = 0$ la temperatura del líquido en $x = 0$ desciende hasta el punto de congelación y comienza la solidificación donde $x = s(t)$ es la posición de la interfase sólida-líquida. Como el líquido se solidifica, la contracción o expansión aparece en la región determinada por $x = 0$ y $x = rs(t)$, donde $r = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}$ es un parámetro y ρ_i es la densidad de la región i ($i = 1$: sólido; $i = 2$: líquido). El parámetro $r < 1$ puede asumir valores negativos (si $r \in (0, 1)$ la sustancia se contrae; si $r < 0$ se expande). Eventualmente todo el líquido se solidifica, lo cual está de acuerdo con algunos experimentos. Se considera la distribución de temperatura del sólido y del líquido y la posición de las dos fronteras libres en el proceso de solidificación. Además, se supone que la fase pre-existente está en reposo y la fase que se forma está en movimiento.

Las ecuaciones que describen el problema son

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) + r\dot{s}(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t), \qquad rs(t) < x < s(t),\ t > 0. \tag{1}$$

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t), \qquad s(t) < x,\ t > 0. \tag{2}$$

donde $u_i(x, t)$ es la temperatura, α_i es la difusividad térmica, k_i es la conductividad térmica, ρ_i es la densidad en la región i ($i = 1, 2$), y r es un parámetro.

Las condiciones de borde e iniciales son

$$u_2(+\infty, t) = u_2(x, 0) = B > u^*, \tag{3}$$

$$u_1(s(t), t) = u_2(s(t), t) = u^*, \tag{4}$$

$$k_1 u_{1x}(s(t),t) - k_2 u_{2x}(s(t),t) = \rho_1 L \dot{s}(t) \tag{5}$$

donde u^* es la temperatura de solidificación, L es el calor latente de fusión por unidad de masa y B es la temperatura inicial. Además, se considerán para el problema de frontera libre $(1)-(5)$ tres condiciones de contorno diferentes en la frontera $x = rs(t)$, a saber:

Caso 1: Condición de temperatura dada por:

$$u_1(rs(t),t) = A, \qquad t > 0 \tag{6}$$

donde A es una constante tal que $A < u^* < B$.

Caso 2: Condición de flujo de calor dada por:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(rs(t),t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \qquad q_0 > 0. \tag{7}$$

Aquí $\frac{q_0}{\sqrt{t}}$ describe el flujo de calor sobre la frontera $x = rs(t)$ la cual es es una condición del tipo impuesto en [10], donde fue probado que la condición de flujo de calor (7) sobre el borde fijo $x = 0$ es equivalente a una condición de temperatura constante (6) para el problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito con coeficientes térmicos constantes en ambas fases. Este tipo de flujo de calor sobre el borde fijo $x = 0$ fue también considerado en muchos problemas, por ejemplo [1], [4], [7].

Caso 3: Condición de tipo convectiva dada por:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(rs(t),t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}} \left(u_1\left(rs\left(t\right),t\right) - u_0\right), \tag{8}$$

donde h_0 es el coeficiente que caracteriza la dependencia en el tiempo del coeficiente de transferencia de calor dado por $\frac{h_0}{\sqrt{t}}$ y u_0 es la temperatura externa del medio ($u_0 < u^*$). La condición de borde (8) fue considerada en [11], [12], [15] para el problema de Stefan clásico.

El objetivo de este trabajo es determinar la distribución de temperatura en las regiones líquida y sólida y la posición de las dos fronteras en el proceso de solidificación con contracción o expansión en el dominio $rs(t) < x < s(t)$, $t > 0$, con $0 < r < 1$ o $r < 0$ respectivamente, en tres casos distintos, cambiando la condición de contorno sobre la frontera $x = rs(t)$. Además, la solución de cada problema se da en función de un cierto parámetro, el cual es la única solución de una ecuación trascendental. Más aún, se estudian que condiciones deben satisfacer los parámetros de cada problema para tener un proceso de cambio de fase instantáneo. En todos los casos, la solución está dada en forma paramétrica y es del tipo similaridad. Otros problemas del mismo tipo se dan en [2], [5], [6], [8], [9].

Teorema 1 *El problema de frontera libre* $(1)-(6)$ *tiene una solución explícita dada por*

$$u_1(x,t) = A + (u^* - A)\,\frac{erf\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\lambda(\frac{x}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}} - r)\right)}{erf\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\lambda(1-r)\right)}, \quad rs(t) < x < s(t),\ t > 0 \tag{9}$$

$$u_2(x,t) = B - (B - u^*)\,\frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{erfc\left(\lambda\right)}, \quad x > s(t), \quad t > 0 \tag{10}$$

$$s\left(t\right) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}; \qquad t > 0 \tag{11}$$

donde el coeficiente λ *es la única solución de la ecuación* $\Psi_1(x) = \Phi(x)$, $x > 0$, *donde*

$$\Psi_1(x) = \frac{k_1\left(u^* - A\right)}{\rho_1 L}\sqrt{\frac{1}{\pi\alpha_1\alpha_2}}F_2\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)x\right),\ x > 0 \tag{12}$$

$$\Phi(x) = x + \frac{k_2\,(B-u^*)}{\alpha_2\rho_1 L\sqrt{\pi}} F_1(x), \qquad x>0 \tag{13}$$

$$F_1(x) = \frac{exp(-x^2)}{erfc(x)}, \qquad F_2(x) = \frac{exp(-x^2)}{erf(x)}, \qquad x>0\,. \tag{14}$$

Teorema 2 *Si el dato q_0 en la condición (7) verifica la condición:*

$$q_0 > \frac{k_2\,(B-u^*)}{\sqrt{\pi\alpha_2}} \tag{15}$$

entonces el problema de frontera libre $(1)-(5)$, (7) tiene una solución explícita dada por

$$u_1(x,t) = u^* - \tfrac{q_0\sqrt{\pi\alpha_1}}{k_1}\left(erf\left(\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\mu(1-r)\right) - erf\left(\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\mu(\tfrac{x}{2\mu\sqrt{\alpha_2 t}} - r\right)\right), \qquad rs(t)<x<s(t),\ t>0 \tag{16}$$

$$u_2(x,t) = B - (B-u^*)\,\frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{erfc\,(\mu)}, \quad x>s(t), \quad t>0 \tag{17}$$

$$s(t) = 2\mu\sqrt{\alpha_2 t} \tag{18}$$

donde el coeficiente μ es la única solución de la ecuación $\Psi_2(x)=\Phi(x)$, $x>0$, con Φ definida por (13) y

$$\Psi_2(x) = \frac{q_0}{\rho_1 L\sqrt{\alpha_2}}\exp\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2x^2\right),\ x>0\,. \tag{19}$$

Teorema 3 *Si el dato h_0 en la condición (8) verifica la condición:*

$$h_0 > \frac{k_2\,(B-u^*)}{\sqrt{\pi\alpha_2}\,(u^*-u_0)} \tag{20}$$

entonces el problema de frontera libre $(1)-(5)$, (8) tiene una solución explícita dada por

$$u_1(x,t) = u_0 + (u^*-u_0)\,\frac{k_1+\sqrt{\pi\alpha_1}\,h_0\,erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} - r\xi\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)}{k_1+\sqrt{\pi\alpha_1}\,h_0\,erf\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\xi(1-r)\right)}, \quad rs(t)<x<s(t),\ t>0 \tag{21}$$

$$u_2(x,t) = B - (B-u^*)\,\frac{erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{erfc\,(\xi)}, \quad x>s(t), \quad t>0 \tag{22}$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha_2 t}, \qquad t>0 \tag{23}$$

donde el coeficiente ξ es la única solución de la ecuación $\Psi_3(x)=\Phi(x)$, $x>0$, con Φ definida por (13), y

$$\Psi_3(x) = \frac{(u^*-u_0)\ h_0}{\rho_1 L\sqrt{\alpha_2}}\,\frac{\exp\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2x^2\right)}{1+\sqrt{\pi\alpha_1}\,\frac{h_0}{k_1}\,erf\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)x\right)},\ x>0\,. \tag{24}$$

Además, la temperatura sobre la frontera libre de la izquierda $x=rs(t)$ es constante para todo $t>0$ y $u_0<u_1(rs(t),t)=Const.<u^*$.

Nota 1

1. *Para el caso particular* $r = 0$ *en el Teorema 1 se tiene la solución clásica de Neumann* [*3*] *para el problema de Stefan a dos fases.*

2. *Para el caso 2., es importante destacar que la desigualdad* (15) *no depende de* $r < 1$ $(0 < r < 1$ *o* $r < 0)$. *Además, para el caso particular* $r = 0$ *en el Teorema 2 se tiene el resultado dado en* [*10*].

3. *Para el caso 3., la desigualdad* (20) *no depende de* $r < 1$ *(*$0 < r < 1$ *o* $r < 0$*). Más aún, para el caso particular* $r = 0$ *en el Teorema 3 se tienen los resultados obtenidos en* [*11*], [*12*].

4. *Se prueba la equivalencia entre los tres problemas* $(1) - (5), (6)$*;* $(1) - (5), (7)$ *y* $(1) - (5), (8)$.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por el proyecto PIP No. 0460 de CONICET-UA y por el ”Fondo de Ayuda a la Investigación”de la Univ. Austral, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

[1] J.R. BARBER, *An asymptotic solution for short-time transient heat conduction between two similar contacting bodies,* Int. J. Heat Mass Transfer 32 (1989), pp. 943-949.

[2] A.C. BRIOZZO, M.F. NATALE, D.A. TARZIA, *Determination of unknown thermal coefficients for Storm's-type materials through a phase-change process,* Int. J. Non-Linear Mech. 34 (1999), pp. 324-340.

[3] H.S. CARSLAW, J.C. JAEGER, *Conduction of heat in solids,* Clarendon Press, Oxford, 1959.

[4] M.N. COELHO PINHEIRO, *Liquid phase mass transfer coefficients for bubbles growing in a pressure field: a simplified analysis,* Int. Comm. Heat Mass Transfer 27 (2000), pp. 99-108.

[5] M.F. NATALE, E.A. SANTILLAN MARCUS, *The effect of heat convection on drying of porous semi-infinite space with a heat flux condition on the fixed face x = 0,* Appl. Math. Comput. 137 (2003), pp. 109-129.

[6] M.F. NATALE, D.A. TARZIA, *Explicit solutions to the two-phase Stefan problem for Storm-type materials,* J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000), pp. 395-404.

[7] A.D. POLYANIN, V.V. DIL'MAN, *The method of the 'carry over' of integral transforms in non-linear mass and heat transfer problems,* Int. J. Heat Mass Transfer 33 (1990), pp. 175-181.

[8] C. ROGERS, *Application of a reciprocal transformation to a two-phase Stefan problem,* J. Phys. A: Math. Gen. 18 (1985), pp. 105-109.

[9] C. ROGERS, *On a class of moving boundary problems in non-linear heat condition: application of a Backlund transformation,* Int. J. Non-Linear Mech. 21 (1986), pp. 249-256.

[10] D.A. TARZIA, *An inequality for the coefficient* σ *of the free boundary* $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ *of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem,* Quart. Appl. Math. 39 (1981), pp. 491-497.

[11] D.A. TARZIA,*An explicit solution for a two-phase unidimensional Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face,* MAT-Serie A 8 (2004), pp. 21-27.

[12] D.A. TARZIA, *Exact solution for a Stefan problem with convective boundary condition and density jump,* PAMM 7:1 (2007), pp. 1040307-1040308.

[13] D.G. WILSON, A.D. SOLOMON, *A Stefan-type problem with void formation and its explicit solution,* IMA J. Appl. Math. 37 (1986), pp. 67-76.

[14] F. YI, X. HAN, *An one-dimensional two-phase free boundary problem in an angular domain,* Nonlinear Anal.: Real World Appl. 8 (2007), pp. 959-979.

[15] S. M. ZUBAIR, M. A. CHAUDHRY, *Exact solution of solid-liquid phase-change heat transfer when subjected to convective boundary conditions,* Wärme − und Stoffübertragung (now Heat and Mass Transfer), 30 (1994), pp. 77-81.