MAT

Serie A

Conferencias, seminarios
y trabajos de Matemática

ISSN:1515-4904

14

Terceras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico

María C. Maciel
Domingo A. Tarzia (Eds.)

Departamento
de Matemática,
Rosario,
Argentina
Marzo 2007

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

ISSN 1515-4904

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 14

TERCERAS JORNADAS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES, OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Maria Cristina Maciel - Domingo Alberto Tarzia (Eds.)

INDICE

Rosario, Marzo 2007

Determinación de dos coeficientes térmicos a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad. *

María Fernanda NATALE [(1)] - Eduardo A. SANTILLAN MARCUS [(1)]

Domingo A. TARZIA [(1)(2)]

[(1)]Depto. de Matemática, F.C.E.,Universidad Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA
[(2)] CONICET, ARGENTINA
E-mail: Maria.Natale@fce.austral.edu.ar;
Eduardo.Santillan@fce.austral.edu.ar; Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Resumen

Se considera un modelo de flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante congelamiento, con sobrecondición de temperatura y de flujo de calor en el borde fijo para la determinación de dos coeficientes desconocidos del material semi-infinito de cambio de fase. Se trata de un problema de frontera móvil con acoplamiento de las funciones temperatura y concentración (ecuaciones de tipo Luikov) con ocho parámetros. Para dos de los casos de determinación posibles, se hallan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución y las fórmulas correspondientes para las temperaturas y concentraciones de ambas fases, como también para los coeficientes desconocidos.

Nomenclatura

a_m	difusividad de humedad
$c_i, i = 1, 2$	calor específico en la fase-i
$k_i,\ i = 1, 2$	conductividad térmica de la fase-i
q_0	coeficiente que caracteriza el flujo de calor en $x = 0$
r	calor latente
$s(t)$	posición del frente de evaporación
t	tiempo
$T_i,\ i = 1, 2$	temperatura en la fase-i.
t_0	temperatura inicial
t_s	temperatura en el borde fijo $x = 0$

*MAT - Serie A, 14 (2007), 25-30.

t_v	temperatura de cambio de fase $(t_s < t_v < t_0)$
u	potencial de transferencia de masa
u_0	potencial inicial de transferencia de masa
ρ	densidad de masa
δ	coeficiente de gradiente térmico
σ	constante que caracteriza la frontera móvil $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$
$\mathcal{L}u = \frac{\rho a_m c_2}{k_2}$	número de Luikov
$\mathcal{K}o = \frac{r u_o}{c_2(t_0 - t_v)}$	número de Kossovitch
$\mathcal{P}n = \frac{\delta(t_0 - t_v)}{u_o}$	número de Posnov

1. Introducción.

Los problemas de transferencia de calor y masa con cambio de fase que se llevan a cabo en un medio poroso, tales como evaporación, condensación, congelamiento, derretimiento, sublimación y desublimación, tienen una gran aplicación en procesos de separación, tecnología de alimentos, migración de calor en terrenos y suelos, etc. Debido a que este tipo de problemas es no lineal, el resolverlos usualmente tiene dificultades matemáticas. Sólo se han encontrado unas pocas soluciones exactas para casos ideales (ver [2],[3],[4] por ejemplo). Una extensa bibliografía sobre problemas de frontera libre y móvil para la ecuación de calor-difusión está dada en [12].

La formulación matemática de la transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos fue establecida por Luikov ([5],[6]). Mikhailov [7] presentó dos modelos diferentes para resolver el problema de la evaporación de humedad líquida desde un medio poroso. Para el problema del congelamiento (desublimación) de un semiespacio poroso húmedo, Mikhailov también presentó una solución exacta [8] para una condición de temperatura constante en el borde fijo $x = 0$. En el trabajo [9] fue presentada una solución explícita para las distribuciones de temperatura y humedad en un semiespacio poroso con una condición de flujo de calor en el borde fijo $x = 0$ del tipo $\frac{q_0}{\sqrt{t}}$.

Ahora se considerará el modelo presentado en [8]-[9] como un problema de frontera móvil, esto es $x = s(t)$ es conocida (dada por la expresión $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ con $\sigma > 0$ una constante dada) con una sobrecondición en el borde fijo. Esto nos permite considerar dos coeficientes térmicos desconocidos y calcularlos bajo ciertas restricciones sobre los datos iniciales del problema siguiendo la idea de [13] para una fase y de [11] para dos fases.

Se considera el flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante el congelamiento. La posición del frente de cambio de fase al tiempo t está dada por $x = s(t)$ que divide al cuerpo poroso en dos regiones. En la región congelada, $0 < x < s(t)$, no hay movimiento de humedad y la distribución de temperatura está descripta por la ecuación del calor

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x,t) = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0, \qquad a_1 = \frac{k_1}{\rho c_1}. \tag{1}$$

La región $s(t) < x < +\infty$ es la parte húmeda del cuerpo de capilares porosos en donde fluyen acoplados el calor y la humedad. El proceso está descripto por el ya conocido sistema de Luikov [6] para el caso $\varepsilon = 0$ (ε es el factor de conversión de fase de líquido en vapor) dado por

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x,t) = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x,t), \qquad x > s(t),\ t > 0, \qquad a_2 = \frac{k_2}{\rho c_2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x > s(t), \ t > 0. \tag{3}$$

Las distribuciones iniciales de temperatura y humedad son uniformes

$$\begin{cases} T_2(x,0) = T_2(+\infty,t) = t_0, \\ u(x,0) = u(+\infty,t) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

Se supone que sobre la superficie del semiespacio la temperatura es constante

$$T_1(0,t) = t_s \tag{5}$$

donde $t_s < t_v$.

Sobre el frente de congelamiento, existe una igualdad entre las temperaturas

$$T_1(s(t),t) = T_2(s(t),t) = t_v, \qquad t > 0, \tag{6}$$

donde $t_v < t_0$.

El balance de calor y humedad en el frente de congelamiento da lo siguiente

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t),t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t),t) = \rho \ r \ u(s(t),t) \frac{ds}{dt}(t), \qquad t > 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t),t) + \delta \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t),t) = 0, \qquad t > 0. \tag{8}$$

Se considera además una sobre condición en el borde fijo $x = 0$ [1] considerando que el flujo de calor depende del tiempo de la siguiente manera

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} \tag{9}$$

donde $q_0 > 0$ es un coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$.

En este trabajo, se considerará que la frontera móvil $x = s(t)$ definida para $t > 0$ con $s(0) = 0$, está dada por

$$s(t) = 2\sigma\sqrt{t} \tag{10}$$

donde $\sigma > 0$ es una constante dada (puede ser determinada por procesos experimentales).

El conjunto de ecuaciones y condiciones (1)-(10) será llamado problema P.

Se hallarán fórmulas para la determinación de dos coeficientes térmicos desconocidos elegido entre ρ (densidad de masa), a_m (difusividad de la humedad), c_1 (calor específico de la región congelada), c_2 (calor específico de la región húmeda), k_1 (conductividad térmica de la región congelada), k_2 (conductividad térmica de la región húmeda), δ (coeficiente de gradiente térmico), r (calor latente) junto con las temperaturas T_1, T_2 y la humedad u como función de los coeficientes térmicos y los datos t_0, t_s, t_v, q_0, u_0 y σ en dos de los veintiocho casos posibles.

Siguiendo [9], para el caso general $\mathcal{L}u = \frac{\rho a_m c_2}{k_2} \neq 1$ se tiene que

$$T_1(x,t) = t_v - \frac{\sqrt{\pi} q_0}{\sqrt{\rho c_1 k_1}} \left[-\operatorname{erf}\left(\gamma_0 \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}(\gamma_0 \sigma) \right], \ 0 < x < s(t), \ t > 0 \tag{11}$$

$$T_2(x,t) = t_v + \frac{t_0 - t_v}{1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\sigma)} \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}} \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\sigma) \right], \ x > s(t), \ t > 0 \tag{12}$$

$$u\left(x,t\right)=u_0-\gamma_1\left\{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{\exp\left(\left(\frac{1}{\mathcal{L}u}-1\right)\frac{\mathcal{L}u}{a_m}\sigma^2\right)\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_m t}}\right)\right)}{\sqrt{\mathcal{L}u}}\right\},\ x>s(t),\ t>0 \tag{13}$$

con

$$\gamma_0=\sqrt{\frac{\rho c_1}{k_1}},\quad \gamma_1=\frac{\delta\rho a_m c_2(t_0-t_v)}{k_2-\rho a_m c_2}=\frac{\mathcal{P}n}{\frac{1}{\mathcal{L}u}-1}, \tag{14}$$

donde los dos coeficientes térmicos desconocidos deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones trascendentales:

$$\gamma_2\exp\left(-\left(\gamma_0\sigma\right)^2\right)-F_1\left(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\sigma\right)=\gamma_3\sigma\left\{1-\gamma_1\left(1-\frac{Q\left(\frac{\sigma}{\sqrt{a_m}}\right)}{Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\sigma\right)}\right)\right\} \tag{15}$$

$$\operatorname{erf}\left(\gamma_0\sigma\right)=\frac{1}{\gamma_4} \tag{16}$$

con

$$\gamma_2=\frac{\sqrt{\pi}q_0}{\sqrt{c_2k_2\rho}(t_0-t_v)},\quad \gamma_3=\sqrt{\frac{\pi\rho}{c_2k_2}}\frac{r\,u_0}{(t_0-t_v)}=\sqrt{\pi\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\mathcal{K}o,\quad \gamma_4=\frac{\sqrt{\pi}q_0}{\sqrt{c_1k_1\rho}(t_v-t_s)} \tag{17}$$

donde las funciones reales F_1 y Q están definidas por

$$F_1\left(x\right)=\frac{\exp\left(-x^2\right)}{\left(1-\operatorname{erf}(x)\right)},\qquad Q\left(x\right)=\sqrt{\pi}x\exp\left(x^2\right)\left(1-\operatorname{erf}(x)\right) \tag{18}$$

con las siguientes propiedades

$$F_1\left(0\right)=1,\qquad F_1\left(+\infty\right)=+\infty,\qquad F_1'\left(x\right)>0\quad\forall x>0 \tag{19}$$

$$Q\left(0\right)=0,\qquad Q\left(+\infty\right)=1,\qquad Q'\left(x\right)>0\quad\forall x>0. \tag{20}$$

De los 28 casos posibles en la presente comunicación sólo se considerará el caso de la determinación de los coeficientes térmicos $\{c_1,k_1\}$ y el de la determinación de los coeficientes térmicos $\{c_2,k_2\}$.

Teorema 1: (Determinación de los coeficientes térmicos $\{c_1,k_1\}$) Si

$$\gamma_5=\frac{1}{\gamma_2}\left\{F_1\left(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\sigma\right)+\gamma_3\sigma\left(1-\gamma_1\left(1-\frac{Q\left(\frac{\sigma}{\sqrt{a_m}}\right)}{Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{L}u}{a_m}}\sigma\right)}\right)\right)\right\}<1 \tag{21}$$

con γ_1,γ_2 y γ_3 definidos en (14) y (17), y F_1 y Q definidas en (18) , entonces existe una única solución al problema P dada por (11)-(13), y los coeficientes térmicos k_1 y c_1 están dados por las siguientes expresiones

$$k_1=\frac{\sqrt{\pi}q_0}{(t_v-t_s)}F_2\left(\sqrt{\frac{1}{\log\left(\frac{1}{\gamma_5}\right)}}\right),\qquad c_1=\frac{\sqrt{\pi}q_0}{\sigma\rho(t_v-t_s)}M\left(\sqrt{\frac{1}{\log\left(\frac{1}{\gamma_5}\right)}}\right) \tag{22}$$

donde las funciones reales F_2 y M están definidas por

$$F_2\left(x\right)=\frac{\operatorname{erf}\left(x\right)}{x},\qquad M\left(x\right)=x\operatorname{erf}\left(x\right). \tag{23}$$

Demostración: Considerando $x = \sqrt{\frac{\rho c_1}{k_1}}\sigma$ e $y = \frac{\sqrt{\rho c_1 k_1}(t_v - t_s)}{\sqrt{\pi} q_0}$, el sistema (15)-(16) puede escribirse como

$$\exp\left(-x^2\right) = \gamma_5 \tag{24}$$

$$\operatorname{erf}(x) = y \tag{25}$$

De (24) surge trivialmente que $x = \sqrt{-\log(\gamma_5)}$. Notemos que $x > 0$ si y solamente si $0 < \gamma_5 < 1$. Teniendo en cuenta que γ_5 siempre es un número positivo, considerando el Lema 1 de [10] acerca del signo de $\frac{m^2-1}{1-\frac{Q(mx)}{Q(x)}}$, así que sólo se debe imponer que γ_5 debe ser menor que uno, i.e. la condición (21). Entonces, de (25) se tiene que $y = \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\log(\gamma_5)}\right)$. Luego de algunos cálculos se obtiene (22).

Teorema 2: (Determinación de los coeficientes térmicos $\{c_2, k_2\}$) Si los datos verifican la condición

$$\frac{t_v - t_s}{\sigma r u_0}\sqrt{\frac{c_1 k_1}{\rho}}\frac{\exp\left(-(\gamma_0\sigma)^2\right)}{\operatorname{erf}(\gamma_0\sigma)} < 1 \tag{26}$$

entonces existen infinitas soluciones al problema P que vienen dadas por (11-13),

$$c_2 = \frac{k_2}{\sigma^2\rho}\xi^2 \tag{27}$$

donde ξ es una solución de la ecuación

$$P(x) = R(x),\ x > 0 \tag{28}$$

para cada $k_2 \in \mathbb{R}^+$, con

$$P(x) = 1 - \frac{a_m \mathcal{P}n\ x^2}{\sigma^2 - a_m x^2}\frac{Q(\frac{\sigma}{\sqrt{a_m}})}{Q(x)}, \qquad R(x) = \frac{q_0}{\sigma\rho r u_0}\exp\left[-(\gamma_0\sigma)^2\right] + \frac{k_2(t_0 - t_v)}{\sqrt{\pi}\sigma^2\rho r u_0}xF_1(x).$$

Demostración: Primero, los datos del problema deben verificar la condición (16). Luego, de (15) y considerando $x = \sqrt{\frac{\rho c_2}{k_2}}\sigma$ se tiene que

$$\frac{q_0}{\sigma\rho r u_0}\exp\left[-(\gamma_0\sigma)^2\right] + \frac{k_2(t_0 - t_v)}{\sqrt{\pi}\sigma^2\rho r u_0}xF_1(x) = 1 - \frac{a_m\mathcal{P}n x^2}{\sigma^2 - a_m x^2}\frac{Q(\frac{\sigma}{\sqrt{a_m}})}{Q(x)},$$

es decir, la ecuación (28). La función R tiene las siguientes propiedades:

$$R(0^+) = \frac{q_0}{\sigma\rho r u_0}\exp\left[-(\gamma_0\sigma)^2\right],\ R(+\infty) = -\infty,\ R'(x) < 0\ \forall x > 0.$$

La función P tiene las siguientes propiedades:

$$P(0^+) = 1,\ P(+\infty) = 1 + \mathcal{P}n\left(1 - Q(\tfrac{\sigma}{\sqrt{a_m}})\right) > 1.$$

Por lo tanto, se tiene que ambas funciones se encontrarán en al menos un $x > 0$ si la condición $\frac{q_0}{\sigma\rho r u_0}\exp\left[-(\gamma_0\sigma)^2\right] > 1$ se verifica. Así, teniendo en cuenta (16), se halla una solución a la ecuación (28) si vale (26). Es sencillo ver que (27) surge de la definición de x. Este análisis puede hacerse para cualquier $k_2 > 0$ dado.

Los veintiseis casos restantes serán considerados en un futuro trabajo que se encuentra en etapa de preparación.

Agradecimientos.
Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo recibido del "*Fondo de Ayuda a la Investigación*" de la Universidad Austral, Rosario (Argentina).

References

[1] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.

[2] Cho, S. H., *"An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium"*, Int. J. Heat and Mass Transfer **18**, 1139-1142 (1975).

[3] Fasano, A. - Guan, Z. - Primicerio, M. - Rubinstein, I., *"Thawing in saturated porous media"*, Meccanica, **28**, 103-109 (1993).

[4] Fasano, A. - Primicerio, M. - Tarzia, D. A., *"Similarity solutions in class of thawing processes"*, Math. Models Methods Appl. **9**, 1-10 (1999).

[5] Luikov, A. V., *"Heat and mass transfer in capillary-porous bodies"*, Pergamon Press, Oxford (1966).

[6] Luikov, A. V., *"Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies",* Int. J. Heat Mass Transfer **18**, 1-14 (1975).

[7] Mikhailov, M. D., *"Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front"*, Int. J. Heat Mass Transfer **18**, 797-804 (1975).

[8] Mikhailov, M. D., *"Exact solution for freezing of humid porous half-space"*, Int. J. Heat Mass Transfer **19**, 651-655 (1976).

[9] Santillan Marcus, E. A. - Tarzia, D. A., *"Explicit solution for freezing of humid porous half-space with a heat flux condition"*, Int. J. Eng. Science **38,** 1651-1665 (2000).

[10] Santillan Marcus, E. A. - Tarzia, D. A., *"Un caso de determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material semiinfinito poroso a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad."*, MAT - Serie A **10**, 17-22 (2005).

[11] Stampella, M. B. - Tarzia, D. A., *"Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem"*, International Journal of Engineering Science **27**, 1407-1419 (1989).

[12] Tarzia, D. A., *"A bibliography on moving - free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems"*, MAT-Serie A #2 (2000) (con 5869 títulos en el tema, 300 páginas). Ver www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000).

[13] D. A. Tarzia, "*Simultaneous determination of two unknown thermal coeficients through an inverse one-phase Lame-Clapeyron Stefan problem with an overspecified condition on the fixed face*", Int. J. Heat & Mass Transfer 26 (1983) 1151 - 1157