Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021

ASOCIACION ARGENTINA DE MATEMATICA APLICADA COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

UN PROBLEMA DE CONDUCCIÓN NO CLÁSICO PARA UNA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA

Demian N. Goos[† ‡], Sabrina D. Roscani[† ‡] y Domingo A. Tarzia[† ‡]

[†] *CONICET, Argentina.*
[‡]*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argetnina.DGoos@austral.edu.ar, SRoscani@austral.edu.ar, DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se estudia un problema unidimensional de conducción del calor no-clásico para un material semi-infinito a través de una ecuación de difusión fraccionaria de tipo Caputo en el cual la fuente de calor depende del flujo en el extremo $x = 0$. Se obtiene una solución a través de una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Se demuestra la convergencia a la solución clásica cuando el orden de derivación fraccionario tiende a 1. Además, para el caso particular de fuente lineal y de dato de temperatura inicial constante se obtiene la solución explícita a través de las funciones de Mittag–Leffler y de Wright.

Palabras clave: *Conducción del calor no-clásico, ecuación de difusión fraccionaria, Derivada de Caputo, Funciones de Mittag–Leffler, Funciones de Wright*
2000 AMS Subject Classification: 26A33; 33E12; 35R11; 35Q79

1. INTRODUCCCIÓN

En este trabajo se considera un problema de valores iniciales y de contorno en el primer cuadrante gobernado por una ecuación de difusión fraccionaria no clásica, dada por

$$ {}_0^C D_t^\alpha u\,(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\,(x,t) = -F(u_x(0,t)), \quad x > 0,\, t > 0, \tag{1} $$

donde el operador de derivación fraccionario es la derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha \in (0, 1)$ y el término "no clásico" se refiere al hecho de que no se dispone información explícita sobre la fuente, sino que se conoce la relación entre la fuente y el flujo entrante, suponiendo conocida la temperatura en la frontera.

Este tipo de problemas para la ecuación de difusión clásica (o ecuación del calor) fue estudiado previamente en [1, 2, 3, 7], entre otros.

En este trabajo se presenta la solución a dicho problema, la consistencia de los resultados obtenidos con respecto al caso clásico $\alpha = 1$ y resultados explícitos para el caso particular de poseer como datos una temperatura inicial constante y un término de fuente lineal.

2. DEFINICIONES PRELIMINARES

En esta sección se presentan definiciones y notaciones preliminares ([4, 5, 6, 8]).

Definición 1 *Operadores fraccionarios. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$.*

1. *Se define la integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α sobre $L^1(a, b)$ como*

$$ {}_aI_s^\alpha f(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau. \tag{2} $$

2. *Sobre $W^{n,1}([a, b]) = \left\{f \in L^1([a, b])/f^{(m)} \in L^1([a, b]) \forall m \in \mathbb{N} : m \le n\right\}$ se define la derivada fraccionaria de Caputo de orden α como*

$$ {}_a^C D_s^\alpha f(s) = \begin{cases} I^{n-\alpha}[f^{(n)}](s) & si\ n-1 < \alpha < n \\ f^{(n)}(s) & si\ \alpha = n \end{cases} \tag{3} $$

Definición 2 *Funciones especiales*

1. *La función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$ de parámetros $\alpha, \beta > 0$ viene definida para $s \in \mathbb{C}$ como*

$$E_{\alpha,\beta}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{4}$$

Si $\beta = 1$, se usa la notación $E_{\alpha,1} = E_\alpha$.

2. *La función de Wright de parámetros $\alpha > -1$ y $\beta \in \mathbb{R}$ viene definida para $s \in \mathbb{C}$ como*

$$\mathcal{W}(s; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{5}$$

3. *Un caso particular de la función de Wright es la función de Mainardi $\mathcal{M}_\nu$ de parámetro $\nu \in (0,1)$ viene definida para $s \in \mathbb{C}$ como*

$$\mathcal{M}_\nu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!\,\Gamma(-\nu k + 1 - \nu)} = W(-s; -\nu, 1-\nu). \tag{6}$$

Tenemos los siguientes casos particulares de funciones especiales

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{s^2}{4}}, \tag{7}$$

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \left[1 - W\left(-2s; -\frac{\alpha}{2}, \alpha\right)\right] = \operatorname{erf}(s). \tag{8}$$

Proposición 1 *Las siguientes propiedades son válidas para constantes $\rho \in (0,1)$, $\eta \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. $\mathcal{L}\{t^{\eta-1}E_{\rho,\eta}(-\lambda t^\rho)\} = \frac{s^{\rho-\eta}}{s^\rho+\lambda}$, *donde $\mathcal{L}$ es la transformada de Laplace.*
2. $$\frac{d}{ds} W(s;\rho,\eta) = W(s;\rho,\eta+\rho). \tag{9}$$
3. $W(-s;-\rho,\eta)$ *es una función positiva decreciente en $\mathbb{R}^+$.*

3. Solución del problema de conducción no-clásico

A continuación se presenta el resultado principal del trabajo.

Teorema 1 *Sea F una función continua en $\mathbb{R}$. Entonces una solución al siguiente problema de valores iniciales y de contorno*

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = -F(u_x(0,t)) & x, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{10}$$

viene dada por

$$u(x,t) = u_0(x,t) + f(x,t) + g(x,t), \tag{11}$$

donde

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(|x-\xi| t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) - \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}\left(|x+\xi| t^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\right] h(\xi) d\xi, \tag{12}$$

$$f(x,t) = I_t^{\alpha}\left(-F(V)\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(-F(V)\right)(\tau)d\tau \tag{13}$$

y

$$g(x,t) = -\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} W\left(-x(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}, -\frac{\alpha}{2}, \alpha\right)\left(-F(V)\right)(\tau)d\tau, \tag{14}$$

siendo $V(t) := u_x(0,t)$ la única solución de la ecuación de Volterra de segunda especie

$$V(t) = V_0(t) - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} F(V)(\tau)d\tau \tag{15}$$

donde

$$V_0(t) = \int_0^\infty t^{-\alpha} W\left(-\xi t^{-\frac{\alpha}{2}}, -\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right) h(\xi)d\xi. \tag{16}$$

Prueba. La prueba consiste en sustituir $u_x(0,\cdot)$ por una función $V(\cdot)$ que se supone conocida y dividir el problema en tres subproblemas cuyas soluciones vienen dadas por u_0, f y g, respectivamente. Mientras que las soluciones de los primeros dos subproblemas son inmediatas, la tercera solución se obtiene utilizando convoluciones con núcleos particulares que pueden asociarse a la ecuación de difusión fraccionaria.
Finalmente, una vez obtenida la expresión para la solución u en función de la función V, se define $V(t) := u_x(0,t)$ y se obtiene la ecuación integral de Volterra de segunda especie (15). □

Ahora bien, se supone que se tiene una temperatura inicial constante $h(x) = h_0$ y que la fuente viene dada en términos de una dependencia lineal respecto del flujo en el extremo $x = 0$. Esto es, se tiene el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha} u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = -\lambda u_x(0,t) & x,t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = h_0 & x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{17}$$

Utilizando el resultado del Teorema 1 se puede ver que una solución del problema (17) está dada por

$$u(x,t) = h_0 \int_0^{xt^{-\frac{\alpha}{2}}} \mathcal{M}_{\frac{\alpha}{2}}(r)\,dr - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\psi\left(x(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) F(V)(\tau)d\tau, \tag{18}$$

donde $\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} - W\left(-x, -\frac{\alpha}{2}, \alpha\right)$ y ahora la función $V(\cdot)$ debe verificar la siguiente ecuación integral

$$V(t) = h_0 \frac{t^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} - \lambda I_t^{\frac{\alpha}{2}} V(t) \tag{19}$$

La ecuación (19) se puede resolver aplicando transformada de Laplace y utilizando la Proposición 1 para concluir que

$$V(t) = h_0 t^{-\frac{\alpha}{2}} E_{\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}}\left(-\lambda t^{\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{20}$$

El siguiente resultado brindará una cota para el flujo $V(t)$, solución de la ecuación de Volterra (15) en función de $V_0(t)$ y por lo tanto en función del dato inicial h.

Teorema 2 *Si $h \in C(\mathbb{R}^+)$ es una función no decreciente de modo que existen $A, B > 0$ y $\delta \in \left[0, \frac{\alpha}{2-\alpha}\right)$ de modo que*

$$|h(x)| \leq Ae^{Bx^{1+\delta}},$$

entonces la solución de la ecuación de Volterra de segunda especie (19) verifica las cotas

$$0 \leq V(t) \leq V_0(t),\ t > 0.$$

4. Continuidad con respecto al parámetro de derivación

La solución del problema clásico correspondiente al problema 10, es decir cuando consideramos $\alpha = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\bar{u}\,(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}\,(x,t) = -F(V)(t) & x, t \in \mathbb{R}^+ \\ \bar{u}\,(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ \bar{u}\,(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{21}$$

fue dada en [1] y utilizando (7) y (8) la podemos expresar de la siguiente manera

$$\bar{u}(x,t) = \bar{u}_0(x,t) + \left(\bar{f} + \bar{g}\right)(x,t), \tag{22}$$

donde

$$\bar{u}_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\pi(t-\tau))^{-\frac{1}{2}} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)\right] h(\xi)d\xi, \tag{23}$$

$$\left(\bar{f} + \bar{g}\right)(x,t) = \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{((t-\tau))}}\right)(-F(V))\,(\tau)d\tau. \tag{24}$$

Teorema 3 *Si existen $A, B > 0$ y $\delta \in (0,1)$ de modo que $0 \leq h\,(x) \leq Ae^{Bx^{1+\delta}}$ y si $V \in C\,(\mathbb{R}^+)$, entonces*

$$\lim_{\alpha \to 1^-} u_0 = \bar{u}_0, \qquad \lim_{\alpha \to 1^-} f + g = \bar{f} + \bar{g}, \tag{25}$$

donde la convergencia es uniforme sobre compactos.

5. Conclusiones

Se ha presentado la solución de un problema unidimensional de conducción del calor no-clásico para una ecuación de difusión fraccionaria de tipo Caputo en el cual la fuente de calor depende del flujo en un extremo. Se ha demostrado la convergencia a la solución clásica cuando el orden de derivación fraccionario tiende a 1 y para el caso particular de fuente lineal y de dato de temperatura inicial constante se ha obtenido la solución explícita.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por los proyectos PIP N° 0275 from CONICET–Universidad Austral, ANPCyT PICTO Austral 2016 N°0090 y European Unions Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Sklodowska-Curie Grant Agreement N° 823731 CONMECH.

Referencias

[1] L. R. Berrone, D. A. Tarzia, and L. T. Villa, *Asymptotic Behaviour of a Non-classical Heat Conduction Problem for a Semi-infinite Material*, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), pp.1161-1177.

[2] M. Boukrouche, and D. A. Tarzia, *Global solution to a non-classical heat problem in the semi-space $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$*, Quaterly of Applied Mathematics, VOL. LXXII, Nr. 2 (2014), pp.347-361.

[3] J. R. Cannon., *A class of Non-linear Non-classical Parabolic Equations*, J. Differential Equations, 79 (1989), pp.266-288.

[4] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, 2004.

[5] R. Gorenflo, J. Loutchko, and Y. Luchko, *Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}$ and its derivative*, Fract. Calc. Appl. Anal., **5** No 4 (2002), pp.491-518.

[6] H.J. Haubold, A.M. Mathai, and R.K. Saxena, *Mittag-Leffler Functions and Their Applications*, J. Appl. Math., (2011), pp.1-51.

[7] N. Kenmochi, and M. Primicerio, *One-Dimensional Heat Conduction with a Class of Automatic Heat-Source Controls*, IMA Journal of Applied Mathematics, **40** No 3 (1988), pp. 205-216.

[8] R. A. V. Pskhu, *On The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order*, Izvestiya: Mathematics, 73:2 (2009), pp.351–392.