EXISTENCIA Y UNICIDAD LOCAL DE UNA SOLUCIÓN CLÁSICA PARA EL PROBLEMA ACOPLADO DE CALOR Y MATERIA DURANTE LA SOLIDIFICACIÓN DE UN MATERIAL DE ALTO CONTENIDO DE AGUA

Roberto Gianni *, Domingo A. Tarzia †‡
* Dipartimento Me.Mo.Mat., Univ. di Roma "La Sapienza", Via Antonio Scarpa 16, 00161 Roma, Italia.
E-mail: verdandister@gmail.com
† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.
‡ CONICET, Argentina.
E-mail: DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: La solidificación de materiales con alto contenido de agua (alimentos, suelos y tejidos) implica dos procesos simultáneos de transferencia dentro del sistema: transferencia de calor por conducción (formación de hielo) y transferencia de masa por difusión (sublimación de la superficie de hielo). En Olguin-Salvadori-Mascheroni-Tarzia, Int. J. Heat Mass Transfer, 51 (2008), pp. 4379-4391, se propuso un modelo físico-matemático expresado como un problema de cambio de fase con dos fronteras libres. El objetivo del presente trabajo es el de obtener la existencia y unicidad de una solución clásica local en el tiempo para el correspondiente problema de frontera libre acoplado a dos fases en un adecuado espacio funcional.

Palabras clave: Problema de frontera libre, Problema de Stefan, Materiales con alto contenido de agua, Frente de sublimación, Frente de solidificación, Existencia y unicidad de solución clásica.

2000 AMS Subjects Classification: 35R35, 80A22, 35A07, 35K50.

1. INTRODUCCIÓN

Durante la solidificación del agua de materiales de alto contenido acuoso tales como suelos, tejidos animales o vegetales y alimentos, que no se encuentren cubiertos por un material impermeable y perfectamente adherido, ocurre simultáneamente la sublimación del hielo que se forma durante el proceso. La velocidad de ambos fenómenos (solidificación y sublimación) está determinada tanto por características del material (fundamentalmente su composición, estructura y forma), como por las condiciones de enfriamiento (temperatura, humedad y tipo de medio que rodea al material). El proceso de sublimación, aunque su magnitud es mucho menor que la de la congelación, determina aspectos fundamentales de la calidad final en el caso de alimentos y afecta la estructura y utilidad de los tejidos congelados. El modelado de estos procesos simultáneos es muy difícil debido a que los balances de materia y energía están acoplados, que existen dos frentes móviles de cambio de fase que se desplazan a velocidades muy diferentes y que las propiedades físicas involucradas son en la mayoría de los casos variables con la temperatura y el contenido de agua.

El proceso de congelación (sin sublimación) ha sido extensamente estudiado por [4], [13] y [14]. El sistema ha sido modelado en forma analítica por [14] y [18], y a través de métodos numéricos por [4], [14] y [15]. Teniendo en cuenta solamente la sublimación del hielo el proceso ha sido estudiado en [2], [3], [6], [11] y [16]. Debido a la no linealidad del problema, es dificultoso dar una solución analítica al mismo. En cambio, es factible resolverlo para sistemas idealizados o de composición y estructura simple. Una extensa bibliografía sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor-difusión fue dada en [19].

Al someter a un material de alto contenido acuoso a una temperatura inferior a su temperatura de solidificación, a la que se supone está inicialmente, se observan simultáneamente dos fenómenos: a) el líquido se congela; b) la superficie del hielo sublima. Por lo tanto, se pueden definir claramente tres zonas: una deshidratada, otra congelada y una tercera no congelada. La congelación comienza a partir de la superficie refrigerada, a una temperatura T_{if} que es menor que la temperatura de solidificación del agua pura, debido a la presencia de materiales disueltos y continúa a lo largo de una línea de equilibro (frontera libre) que es desconocida. Simultáneamente comienza la sublimación del hielo en la superficie congelada y aparece un frente de deshidratación cuya velocidad de avance debe determinarse también. Normalmente, esta velocidad es mucho menor que la velocidad del frente de congelación [1]. Por lo anterior, el problema consiste en resolver simultáneamente un problema de transferencia de calor (congelación) y un problema de transferencia de masa (pérdida de peso) y se desconocen los bordes que separan las zonas deshidratada de la congelada y ésta de la aún sin congelar.

Se considera un material semi-infinito con características similares a las de un gel muy diluido cuyas propiedades se suponen iguales a las del agua pura. El sistema tiene una temperatura inicial constante T_{if} y al tiempo $t=0$ la superficie $x=0$ se expone a un medio exterior con temperatura constante T_s (< T_{if}) y coeficientes de transferencia de calor h_0 y de masa K_m constantes. Se asume que $T_s < T_0(t) < T_{if}$, $t>0$ donde $T_0(t)$ representa la temperatura de sublimación desconocida. Para calcular la evolución de la temperatura y del contenido de agua en el tiempo, se presenta en [17] el siguiente problema de frontera libre acoplado a dos fases: Hallar las temperaturas $T_d = T_d(x,t)$ (de la región deshidratada) y $T_f = T_f(x,t)$ (de la región congelada), la concentración $C_v = C_v(x,t)$ (de la región deshidratada), las dos fronteras libres $x = s_d(t)$ (frente de sublimación) y $x = s_f(t)$ (frente de congelación), y la temperatura $T_0 = T_0(t)$ en $x = s_d(t)$ que deben satisfacer las ecuaciones diferenciales y condiciones siguientes:

$$\rho_d c_d \frac{\partial T_d}{\partial t} = k_d \frac{\partial^2 T_d}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad Q_{1T} \equiv \left\{(x,t): 0<x<s_d(t), \quad 0<t<T\right\}, \tag{1}$$

$$\varepsilon \frac{\partial C_v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_v}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad Q_{1T}, \tag{2}$$

$$\rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad Q_{2T} \equiv \left\{(x,t): s_d(t)<x<s_f(t), \quad 0<t<T\right\}, \tag{3}$$

$$k_d \frac{\partial T_d}{\partial x}(0,t) = h_0\left[T_d(0,t) - T_s\right] \quad \text{sobre} \quad x=0, \quad 0<t<T, \tag{4}$$

$$D \frac{\partial C_v}{\partial x}(0,t) = k_m\left[C_v(0,t) - C_a\right] \quad \text{sobre} \quad x=0, \quad 0<t<T, \tag{5}$$

$$T_d\left(s_d(t),t\right) = T_f\left(s_d(t),t\right) = T_0(t) \quad \text{sobre} \quad x = s_d(t), \quad 0<t<T, \tag{6}$$

$$k_f \frac{\partial T_f}{\partial x}\left(s_d(t),t\right) - k_d \frac{\partial T_d}{\partial x}\left(s_d(t),t\right) = L_s m_s \frac{ds_d}{dt}(t) \quad \text{sobre} \quad x = s_d(t), \quad 0<t<T, \tag{7}$$

$$D \frac{\partial C_v}{\partial x}\left(s_d(t),t\right) = m_s \frac{ds_d}{dt}(t) \quad \text{sobre} \quad x = s_d(t), \quad 0<t<T, \tag{8}$$

$$C_v\left(s_d(t),t\right) = F\left(T_0(t)\right) \quad \text{sobre} \quad x = s_d(t), \quad 0<t<T, \tag{9}$$

$$T_f\left(s_f(t),t\right) = T_{if} \quad \text{sobre} \quad x = s_f(t), \quad 0<t<T, \tag{10}$$

$$k_f \frac{\partial T_f}{\partial x}\left(s_f(t),t\right) = m_f L_f \frac{ds_f}{dt}(t) \quad \text{sobre} \quad x = s_f(t), \quad 0<t<T, \tag{11}$$

$$s_d(0) = s_{0d}, \quad s_f(0) = s_{0f}, \tag{12}$$

$$T_d(x,0) = T_{0d}(x), \quad 0 \le x \le s_{0d}, \tag{13}$$

$$C_v(x,0) = C_{0v}(x), \quad 0 \le x \le s_{0d}, \tag{14}$$

$$T_f(x,0) = T_{0f}(x), \quad s_{0d} \le x \le s_{0f}. \tag{15}$$

Se asume que $T_s < T_0(t) < T_{if}$, $t>0$. Los coeficientes del problema son: C_a : concentración másica de vapor de agua en el aire; *c:* calor específico; *D:* coeficiente de difusión efectivo del agua; h_0*:* coeficiente de transferencia de calor; *k:* conductividad térmica; k_m : coeficiente de transferencia de masa; L_s*:* calor latente de sublimación del agua; L_f : calor latente de solidificación del agua; m_s *:* masa sublimada por unidad de volumen; *ε:* porosidad; *ρ:* densidad de masa; *T:* temperatura. El subíndice *f* se refiere a la zona congelada, el subíndice *d* a la zona deshidratada y el subíndice *o* a las condiciones iniciales. Se asumen las hipótesis siguientes:

$$H_1: \quad \rho_d, c_d, k_d, \varepsilon, D, \rho_f, c_f, k_f, h_0, k_m, L_s, M_s, T_{if}, C_a, T_s > 0, \quad T_s < T_{if}, \quad s_{0f} > s_{0d} > 0 .$$

$$H_2: F(\eta) \in C^3(\mathbb{R}).$$

La condición (9) es una condición que generaliza la dada en [17] pues en el caso físico se tiene:

$$F(\eta) := \frac{M\,a\,e^{b-\frac{c}{\eta}}}{R\eta}, \tag{16}$$

donde los coeficientes b, M, a, R, c son constantes. Por otra parte, $C_v(s_d(t),t)$ representa la concentración de vapor de equilibrio a la temperatura $T_0(t)$, y la correspondiente presión de saturación se evalúa según [7]. In [17], se utiliza el método cuasi-estacionario y el sistema (1) – (15) se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas par las fronteras libres $x = s_d(t)$ y $x = s_f(t)$ y la temperatura $T_0 = T_0(t)$. Estos resultados se usan para predecir las temperaturas $T_d(x,t)$ y $T_f(x,t)$, y la concentración C_v.

El objetivo del presente trabajo es el de obtener en la Sección II la existencia y la unicidad de una solución clásica local del problema de frontera libre acoplado a dos fases (1) – (15) en un adecuado espacio funcional. Se usa el trabajo fundamental [12]; otras referencias útiles sobre el tema son [5], [8], [9] y [10].

2. Existencia y Unicidad de una Solución Clásica Local

El sistema (1) – (15) es equivalente a uno nuevo en el cual las condiciones (8) y (9) son reemplazadas por:

$$k_f \frac{\partial T_f}{\partial x}(s_d(t),t) - k_d \frac{\partial T_d}{\partial x}(s_d(t),t) = \beta \frac{\partial C_v}{\partial x}(s_d(t),t) \text{ sobre } x = s_d(t),\ 0 < t < T \tag{8bis}$$

$$C_v(s_d(t),t) = F(T_d(s_d(t),t)) \quad \text{sobre} \quad x = s_d(t), \quad 0 < t < T \tag{9bis}$$

donde $\beta = L_s D$. Luego, se re-escribe el sistema (1)–(15) en una forma más conveniente a través de un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales parabólicas en el mismo dominio cilíndrico proponiendo el siguiente cambio de coordenadas y de funciones (17) definido por:

$$y = \frac{x}{Ax+B} \quad , \quad t = t\,, \tag{17a}$$

$$\theta_d(y,t) = T_d(x,t) = T_d\left(\frac{B(t)y}{1-A(t)y}, t\right), \quad \theta_f(y,t) = T_f(x,t) = T_f\left(\frac{B(t)y}{1-A(t)y}, t\right), \tag{17b}$$

$$\mathrm{W}(y,t) = C_v(x,t) = C_v\left(\frac{B(t)y}{1-A(t)y}, t\right), \tag{17c}$$

donde:

$$A = A(t) = \frac{2s_d(t) - s_f(t)}{2(s_d(t) - s_f(t))}, \qquad B = B(t) = \frac{s_d(t)s_f(t)}{2(s_f(t) - s_d(t))}. \tag{18}$$

Finalmente, se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales parciales (S), todas están definidas en el mismo dominio Ω_{1T}, introduciendo las nuevas funciones incógnitas:

$$u_1(z,t) = \theta_d(z,t), \quad u_2(z,t) = \theta_f(2-z,t), \quad u_3(z,t) = W(z,t). \tag{19}$$

Observación *La original temperatura desconocida $T_0(t)$ puede ser calculada por $u_1(1,t)$ ó $u_2(1,t)$.*

Se asumen las siguientes hipótesis:

$$H_3: \quad T_{0d}, C_{0v} \in H^{2+\alpha}([0, s_{0d}]), \quad T_{0f} \in H^{2+\alpha}([s_{0d}, s_{0f}]), \qquad \alpha \in (0,1),$$

H_4: se satisfacen las condiciones de compatibilidad de primer orden cuando se imponen condiciones de contorno de tipo Robin y las condiciones de compatibilidad de segundo orden cuando se imponen condiciones de contorno de tipo Dirichlet.

El problem (S) es equivalente al problema (1)–(15) en el sentido que toda solución clásica de (S) es una solución clásica (1) – (15) y recíprocamente. Para el sistema de ecuaciones (S) se prueba que existe una única solución clásica siempre que *T* sea elegido suficientemente pequeño.

Teorema *Bajo las hipótesis* $H_1 - H_4$ *existe un tiempo* $\hat{T} > 0$ *de manera que el problema (S) admite una única solución clásica en* $\Omega_{1\hat{T}}$ *, i.e. existe un quintuple de funciones* $\left(u_1(z,t),\, u_2(z,t),\, u_3(z,t),\, s_d(t),\, s_f(t)\right)$ *tal que* $u_i \in H^{2+\beta}\left(\overline{\Omega}_{1\hat{T}}\right)$ $(i=1,2,3)$, $s_d, s_f \in H^{1+\beta/2}\left(\left[0,\hat{T}\right]\right), \forall \beta < \dfrac{\alpha}{2}$, *que satisfacen el problema* (S).

Prueba. Tanto para la existencia como para la unicidad de una solución clásica del problema (S) se utilizan, en forma reiterada, diferentes resultados de [12, pp. 601-616]. Para la existencia de solución local se utiliza además el método del argumento retardado. □

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos “Problemi matematici di diffusione in biologia” y “Modelli differenziali in matematica applicata” de la Sapienza Univ. di Roma para el primer autor, y por los Proyectos PIP Nº 0460 de CONICET-UA, Rosario, Argentina y Grant FA9550-10-1-0023 para el segundo autor.

REFERENCIAS

[1] L.A. CAMPAÑONE, *Transferencia de calor en congelación y almacenamiento de alimentos. Sublimación de hielo, calidad, optimización de condiciones de proceso*, Tesis Doctorado en Ingeniería, Univ. Nac. de La Plata, La Plata (2001).

[2] L.A. CAMPAÑONE, V.O. SALVADORI, AND R.H. MASCHERONI, *Weight loss during freezing and storage of unpackaged foods*, J. Food Eng., 47 (2001), pp. 69-79.

[3] L.A. CAMPAÑONE, V.O. SALVADORI, AND R.H. MASCHERONI, *Food freezing with simultaneous surface dehydration. Approximate prediction of weight loss during freezing and storage*, Int. J. Heat Mass Transfer, 48 (2005), pp. 1195-1204.

[4] A.C. CLELAND, *Food Refrigeration Processes. Analysis, Design and Simulation*, Elsevier, London (1990).

[5] A. FASANO, AND R. GIANNI, *Freezing of a two component liquid-liquid dispersion*, Nonlinear Anal., 1 (2000), pp. 435-448.

[6] M. FARID, *The moving boundary problems from melting and freezing to drying and frying of food*, Chem. Eng. Processing, 41 (2002), pp. 1-10.

[7] O. FENNEMA, AND L.A. BERNY, *Equilibrium vapour pressure and water activity of food at subfreezing temperature*, In Proc. IV Int. Congress of Food Sci. and Technology, 2 (1974), pp. 27-35.

[8] R. GIANNI, *Global existence of a classical solution for a large class of free boundary problems*, Nonlinear Diff. Eq. Appl., 2 (1995), pp. 291-321.

[9] R. GIANNI, AND P. MANNUCCI, *A free boundary problem in an absorbing porous material with saturation dependent permeability*, Nonlinear Diff. Eq. Appl., 8 (2001), pp. 219-235.

[10] R. GIANNI, AND P. MANNUCCI, *A filtration problem in a composite porous material with two free boundaries advances*, Adv. Math. Sci. Appl., 11 (2001), pp. 603-622.

[11] M. KOCHS, CH. KÖRBER, B. NUNNER, AND I. HESCHEL, *The influence of the freezing process on vapour transport during sublimation in vacuum-freeze-drying*, Int. J. Heat Mass Transfer, 34 (1991), pp. 2395-2408.

[12] O.A. LADYZENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV, AND N.N. URAL’CEVA, *Linear and Quasilinear Equations of ParabolicTtype*, American Math. Society, Providence (1968).

[13] A.V. LUIKOV, *Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies (review)*, Int. J. Heat Mass Transfer, 18 (1975), pp. 1-14.

[14] V.J. LUNARDINI, *Heat Transfer with Freezing and Thawing*, Elsevier, London (1991).

[15] R.H. MASCHERONI, AND A. CALVELO, *Relationship between heat transfer parameters and the characteristic damage variables for the freezing of beef*, Meat Sci., 4 (1980), pp. 267-285.

[16] J. D. MELLOR, *Fundamentals of Freeze Drying*, Academic Press, London, (1978).

[17] M.C. OLGUIN, V.O. SALVADORI, R.H. MASCHERONI, AND D.A. TARZIA, *An analytical solution for the coupled heat and mass transfer during the freezing of high-water content materials*, Int. J. Heat Mass Transfer, 51 (2008), pp. 4379-4391.

[18] E.A. SANTILLAN MARCUS, AND D.A. TARZIA, *Explicit solution for freezing of humid porous half-space with heat flux condition*, Int. J. Eng. Sci., 38 (2000), pp. 1651-1665.

[19] D.A. TARZIA, *A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT - Serie A, 2 (2000), pp. 1-297. See http://web.austral.edu.ar/descargas/facultad-cienciasEmpresariales/mat/Tarzia-MAT-SerieA-2(2000).pdf