CONTROLES ÓPTIMOS SIMULTÁNEOS DISTRIBUIDO-FRONTERA EN SISTEMAS GOBERNADOS POR ECUACIONES VARIACIONALES ELÍPTICAS

Claudia M. Gariboldi[†] y Domingo A. Tarzia[‡]

[†]*Departamento de Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina.*
cgariboldi@exa.unrc.edu.ar
[‡]*Departamento de Matemática-CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se considera un problema estacionario P de conducción del calor con condiciones de frontera mixtas para la ecuación de Poisson y problemas P_α, con $\alpha > 0$, definido sobre una porción Γ_1 de la frontera de un dominio multidimensional acotado Ω. Se formulan problemas de control óptimo *distribuido* en Ω sobre la fuente de energía g y *frontera* de tipo Neumann sobre el flujo del calor q, definido sobre una porción Γ_2 de la frontera de Ω. Se obtienen resultados de existencia, unicidad y se dan las condiciones de optimalidad. Se obtienen estimaciones entre las soluciones de estos problemas y otros estudiados anteriormente por los mismos autores. Se prueba la convergencia fuerte, en determinados espacios de Sobolev, de los controles óptimos del problema P_α a los controles óptimos del problema P y de los estados del sistema y estados adjuntos del problema P_α a los correspondientes del problema P, cuando α tiende a infinito.

Palabras clave: *Control óptimo, inecuaciones variacionales elípticas, problemas elípticos mixtos, condición de optimalidad.*
2000 AMS Subject Classification: 49J20-35J85-35R35

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera regular Γ consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $med(\Gamma_1) > 0$ and $med(\Gamma_2) > 0$. Se consideran los siguientes problemas estacionarios de conducción del calor P and P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$) respectivamente con condiciones de frontera mixtas:

$$\Delta u = g \text{ in } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{1}$$

$$-\Delta u = g \text{ in } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{2}$$

donde g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y la temperatura del entorno externo de Γ_1 para (2), q es el flujo de calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor sobre Γ_1 (Ley de Newton o condición de Robin sobre Γ_1), que satisfacen las hipótesis: $g \in H = L^2(\Omega)$, $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$ y $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$.

Se denota por $u_{(g,q)}$ y $u_{(\alpha,g,q)}$ a las únicas soluciones de los problemas elípticos (1) and (2), respectivamente, cuyas formulaciones variacionales están dadas por:

$$a(u_{(g,q)}, v) = L_{(g,q)}(v), \ \forall v \in V_0, \ u_{(g,q)} \in K \tag{3}$$

$$a_\alpha(u_{(\alpha,g,q)}, v) = L_{(\alpha,g,q)}(v), \ \forall v \in V, \ u_{(\alpha,g,q)} \in V \tag{4}$$

donde

$$V = H^1(\Omega)\,; \qquad V_0 = \{v \in V / \, v\big|_{\Gamma_1} = 0\} \quad \text{y} \quad K = v_0 + V_0$$

para $v_0 \in V$ dado, con $v_0\big|_{\Gamma_1} = b$, $(g,h)_H = \int_\Omega gh\,dx$ y $(q,\eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta\,d\gamma$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx; \quad a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha(u,v)_{L^2(\Gamma_1)}$$

$$L_{(g,q)}(v) = (g,v)_H - (q,v)_Q; \quad L_{(\alpha,g,q)}(v) = L_{(g,q)}(v) + \alpha(b,v)_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Se formulan los siguientes problemas de control óptimo simultáneo: *distribuido* sobre el dominio Ω y *frontera* de tipo Neumann sobre la porción Γ_2 [3, 4]:

$$\text{Hallar} \quad (g_{op}, q_{op}) \in H \times U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J(g_{op}, q_{op}) = \min_{g \in H, q \in U_{ad}} J(g,q), \tag{5}$$

$$\text{Hallar} \quad (g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha}) \in H \times U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_\alpha(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha}) = \min_{g \in H, q \in U_{ad}} J_\alpha(g,q), \tag{6}$$

con $U_{ad} = \{q \in Q : q \geq 0 \text{ en } \Gamma_2\}$ y los funcionales de costo $J : H \times Q \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_\alpha : H \times Q \to \mathbb{R}_0^+$ dados por:

$$J(g,q) = \frac{1}{2} \left\| u_{(g,q)} - z_d \right\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2 \tag{7}$$

$$J_\alpha(g,q) = \frac{1}{2} \left\| u_{(\alpha,g,q)} - z_d \right\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2 \tag{8}$$

donde $z_d \in H$ y las constantes positivas M_1 y M_2 están dadas.

En la Sección 2 se obtienen resultados de existencia y unicidad de los controles óptimos (g_{op}, q_{op}) del problema (5) y de los controles óptimos $(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})$ del problema (6), para cada $\alpha > 0$. Se dan las condiciones de optimalidad en términos de los estados adjuntos $p_{(g_{op}, q_{op})}$ para (5) y $p_{(\alpha, g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})}$ para (6), respectivamente.

En la Sección 3 se prueban estimaciones entre los funcionales cuadráticos (7) y (8) y los dados en [1] y [2]. Se obtienen, además, estimaciones entre (g_{op}, q_{op}) y los controles óptimos $\overline{g}_{op}$ y $\overline{q}_{op}$ estudiados en [1] y [2], respectivamente. Análogamente, para cada $\alpha > 0$, se obtienen estimaciones para los controles óptimos $(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})$ del problema (6) en relación a $\overline{g}_{op_\alpha}$ y $\overline{q}_{op_\alpha}$, definidos en [1] y [2] respectivamente.

En la Sección 4 se prueba la convergencia fuerte, en determinados espacios de Sobolev, de los controles óptimos $(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})$ del problema (6) al control óptimo (g_{op}, q_{op}) del problema (5), de los estados del sistema $u_{(\alpha, g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})}$ al estado del sistema $u_{(g_{op}, q_{op})}$ y de los estados adjuntos $p_{(\alpha, g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})}$ al estado adjunto $p_{(g_{op}, q_{op})}$, cuando el parámetro α tiende a infinito.

2. Existencia y Unicidad de Controles Óptimos

2.1. Problema P y su correspondiente Problema de Control Óptimo

Para cada $(g,q) \in H \times Q$, se define el estado adjunto $p_{(g,q)}$ correspondiente al problema (1), como la única solución de la ecuación variacional:

$$a(p_{(g,q)}, v) = (u_{(g,q)} - z_d, v)_H, \ \forall v \in V_0, \ p_{(g,q)} \in K \tag{9}$$

y se obtiene el siguiente lema.

Lema 1 *a) Existe una única solución (g_{op}, q_{op}) del problema de control óptimo (5).*
b) La condición de optimalidad para el problema (5), está dada por:

$$(h - g_{op}, p_{(g_{op}, q_{op})} + M_1 g_{op})_H + (\eta - q_{op}, M_2 q_{op} - p_{(g_{op}, q_{op})})_Q \geq 0, \quad \forall (h, \eta) \in H \times Q.$$

2.2. Problema P_α y su correspondiente Problema de Control Óptimo

Para cada $(g,q) \in H \times Q$ y para cada $\alpha > 0$, se define el estado adjunto $p_{(\alpha,g,q)}$ correspondiente al problema (2) , como la única solución de la ecuación variacional:

$$a_\alpha(p_{(\alpha,g,q)}, v) = (u_{(\alpha,g,q)} - z_d, v), \ \forall v \in V, \ p_{(\alpha,g,q)} \in V \tag{10}$$

y se obtiene el siguiente lema.

Lema 2 *a) Existe una única solución $(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})$ del problema de control óptimo (6).*
b) La condición de optimalidad para el problema (6), está dada por, $\forall (h, \eta) \in H \times Q$:

$$(h - g_{op_\alpha}, p_{(\alpha, g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})} + M_1 g_{op_\alpha})_H + (\eta - q_{op_\alpha}, M_2 q_{op_\alpha} - p_{(\alpha, g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})})_Q \geq 0.$$

3. Estimaciones

3.1. Estimaciones en relación al problema P

Se consideran los problemas de control óptimo, estudiados en [1] y [2], esto es:

$$\text{Hallar} \quad \overline{g}_{op} \in H \quad \text{tal que} \quad J_1(\overline{g}_{op}) = \min_{g \in H} J_1(g), \tag{11}$$

$$\text{Hallar} \quad \overline{q}_{op} \in U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_2(\overline{q}_{op}) = \min_{q \in U_{ad}} J_2(q), \tag{12}$$

con $J_1 : H \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_2 : Q \to \mathbb{R}_0^+$, dados por:

$$J_1(g) = \frac{1}{2} \|u_g - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 \qquad \text{y} \qquad J_2(q) = \frac{1}{2} \|u_q - z_d\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2$$

donde u_g y u_q son las únicas soluciones del problema (1) para datos q y g fijos, respectivamente.

Lema 3 *Los funcionales J, J_1 y J_2 satisfacen*

$$J(g_{op}, q_{op}) \le J_1(\overline{g}_{op}) + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2, \ \forall q \in Q, \quad y \quad J(g_{op}, q_{op}) \le J_2(\overline{q}_{op}) + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2, \ \forall g \in H.$$

Teorema 1 *Si (g_{op}, q_{op}) es la única solución del problema (5), $\overline{g}_{op}$ y $\overline{q}_{op}$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo (11) y (12) respectivamente, entonces:*

$$i) \quad \|\overline{q}_{op} - q_{op}\|_Q \le \frac{\|\gamma_0\|}{\lambda M_2} \|u_{(g_{op}, q_{op})} - u_{(g_{op}, \overline{q}_{op})}\|_H$$

$$ii) \quad \|\overline{g}_{op} - g_{op}\|_H \le \frac{1}{\lambda M_1} \|u_{(g_{op}, q_{op})} - u_{(\overline{g}_{op}, q_{op})}\|_H.$$

donde λ es la constante de coercividad de a y γ_0 es el operador traza.

3.2. Estimaciones en relación al problema P_α

Para cada $\alpha > 0$, se consideran los problemas de control óptimo, estudiados en [1] y [2], esto es:

$$\text{Hallar} \quad \overline{g}_{op_\alpha} \in H \quad \text{tal que} \quad J_{\alpha 1}(\overline{g}_{op_\alpha}) = \min_{g \in H} J_{\alpha 1}(g), \tag{13}$$

$$\text{Hallar} \quad \overline{q}_{op_\alpha} \in U_{ad} \quad \text{tal que} \quad J_{\alpha 2}(\overline{q}_{op_\alpha}) = \min_{q \in U_{ad}} J_{\alpha 2}(q), \tag{14}$$

con $J_{\alpha 1} : H \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_{\alpha 2} : Q \to \mathbb{R}_0^+$, dados por:

$$J_{\alpha 1}(g) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha g} - z_d\|_H^2 + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2 \qquad \text{y} \qquad J_{\alpha 2}(q) = \frac{1}{2} \|u_{\alpha q} - z_d\|_H^2 + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2$$

donde $u_{\alpha g}$ y $u_{\alpha q}$ son las únicas soluciones del problema (2) para datos q y g fijos, respectivamente.

Lema 4 *Los funcionales J_α, $J_{\alpha 1}$ y $J_{\alpha 2}$ satisfacen*

$$J_\alpha(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha}) \le J_{\alpha 1}(\overline{g}_{op_\alpha}) + \frac{M_2}{2} \|q\|_Q^2, \ \forall q \in Q, \quad y \quad J_\alpha(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha}) \le J_{\alpha 2}(\overline{q}_{op_\alpha}) + \frac{M_1}{2} \|g\|_H^2, \ \forall g \in H.$$

Teorema 2 *Si $(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})$ es la única solución del problema (6), $\overline{g}_{op_\alpha}$ y $\overline{q}_{op_\alpha}$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo (13) y (14) respectivamente, entonces:*

$$i) \quad \|\overline{q}_{op} - q_{op_\alpha}\|_Q \le \frac{\|\gamma_0\|}{\lambda M_2} \|u_{(\alpha, g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})} - u_{(\alpha, g_{op_\alpha}, \overline{q}_{op_\alpha})}\|_H$$

$$ii) \quad \|\overline{g}_{op_\alpha} - g_{op_\alpha}\|_H \le \frac{1}{\lambda M_1} \|u_{(\alpha, g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})} - u_{(\alpha, \overline{g}_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})}\|_H.$$

4. CONVERGENCIA

Teorema 3 *Para todo $\alpha > 0$, $(q, g) \in H \times Q$, $b \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, se tienen los siguientes limites:*

$$i) \lim_{\alpha\to\infty} \|u_{(\alpha,g,q)} - u_{(g,q)}\|_V = 0; \quad ii) \lim_{\alpha\to\infty} \|p_{(\alpha,g,q)} - p_{(g,q)}\|_V = 0.$$

Teorema 4 *i) Si $u_{(g_{op},q_{op})}$ y $u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})}$ son los únicos estados de sistemas óptimos de los problemas (1) y (2), respectivamente, entonces*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - u_{(g_{op},q_{op})}\|_V = 0 \tag{15}$$

ii) Si $p_{(g_{op},q_{op})}$ y $p_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})}$ son los únicos estados adjuntos óptimos de los problemas (1) y (2), respectivamente, entonces

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|p_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - p_{(g_{op},q_{op})}\|_V = 0 \tag{16}$$

iii) Si (g_{op}, q_{op}) y $(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha})$ son las únicas soluciones de los problemas de control óptimo distribuido-frontera *(5) y (6), respectivamente, entonces*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|(g_{op_\alpha}, q_{op_\alpha}) - (g_{op}, q_{op})\|_{H\times Q} = 0 \tag{17}$$

Prueba. **Paso 1** Siguiendo una técnica similar a la utilizada en [1] y [2], se prueba que

$$u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} \rightharpoonup u_{(g_{op},q_{op})} \text{ débilmente en } V \quad \text{y} \quad p_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} \rightharpoonup p_{(g_{op},q_{op})} \text{ débilmente en } V. \tag{18}$$

Paso 2 Tomando $h = 0$ y $\eta = q_{op}$ en la condición de optimalidad para el problema (6), se tiene

$$(q_{op} - q_{op_\alpha}, M_2 q_{op_\alpha} - p_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})})_Q \geq 0. \tag{19}$$

y considerando $h = 0$ y $\eta = q_{op_\alpha}$ en la condición de optimalidad para el problema (5), se obtiene

$$(q_{op_\alpha} - q_{op}, M_2 q_{op} - p_{(g_{op},q_{op})})_Q \geq 0. \tag{20}$$

Sumando (19) y (20), se deduce que

$$\|q_{op} - q_{op_\alpha}\|_Q \leq \frac{\|\gamma_0\|}{M_2} \|p_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - p_{(g_{op},q_{op})}\|_V. \tag{21}$$

Luego, siguiendo un camino similar, tomando $h = g_{op}$ y $\eta = 0$ en la condición de optimalidad para el problema (6) y $h = g_{op_\alpha}$ y $\eta = 0$ en la condición de optimalidad para el problema (5), se prueba que

$$\|g_{op} - g_{op_\alpha}\|_H \leq \frac{1}{M_2} \|p_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - p_{(g_{op},q_{op})}\|_V. \tag{22}$$

Ahora, de (18) y la siguiente desigualdad, para $\alpha > 1$,

$$\lambda_1 \|u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - u_{(g_{op},q_{op})}\|_V^2 + (\alpha - 1)\|u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - u_{(g_{op},q_{op})}\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq$$

$$\leq (g, u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - u_{(g_{op},q_{op})})_H - (q, u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - u_{(g_{op},q_{op})})_Q - a(u_{(g_{op},q_{op})}, u_{(\alpha,g_{op_\alpha},q_{op_\alpha})} - u_{(g_{op},q_{op})})_H$$

se prueba (15). Desarrollando un razonamiento similar, se obtiene (16).

Finalmente, de (15), (16) y las estimaciones (21) y (22), se prueba (17). □

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los proyectos PIP No. 0460 del CONICET-Univ. Austral y AFOSR-SOARD Grant FA9550-10-1-0023.

REFERENCIAS

[1] C.M. Gariboldi - D.A. Tarzia, Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity, Appl. Math. Optim., 47 (2003), pp. 213-230.

[2] C.M. Gariboldi and D.A. Tarzia, Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, **1(2)** (2008), 113-132.

[3] J.L.Lions, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 1968.

[4] Tröltzsch, Optimal Control of Partial Differential Equations.Theory, Methods and Applications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2010).