ESTIMACIONES EN PROBLEMAS ELÍPTICOS RELACIONADOS CON CONTROLES ÓPTIMOS

Claudia M. Gariboldi[♭] y Domingo A. Tarzia[†]

[♭]*Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina. E-mail: cgariboldi@exa.unrc.edu.ar.*
[†]*Depto. Matemática-CONICET, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina. E-mail: DTarzia@austral.edu.ar.*

Resumen: Se considera un problema estacionario de conducción del calor P_α con condiciones de frontera mixtas para la ecuación de Poisson dependiendo de un parámetro positivo α, el cual representa el coeficiente de transferencia del calor sobre una porción Γ_1 de la frontera de un dominio acotado multidimensional Ω en $\mathbb{R}^n$. Se formulan problemas de control óptimo frontera con restricciones sobre el flujo del calor q en una porción complementaria Γ_2 de la frontera de Ω. Para cada q fijo, se obtienen estimaciones en términos del parámetro α, a los efectos de estudiar el orden de convergencia de las soluciones de los problemas P_α a la solución de otro problema elíptico P para la misma ecuación de Poisson con una condición de frontera diferente sobre la porción Γ_1. Este tipo de estimaciones son también obtenidas para los estados adjuntos correspondientes a los problemas planteados.

Palabras clave: *Control óptimo, problemas elípticos mixtos, estado adjunto, orden de convergencia, problema de Stefan estacionario.*
2000 AMS Subject Classification: 49J20, 35J85, 35R35.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera Γ es de clase C^2 y consiste de la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2, con $med(\Gamma_i) > 0$ para $i = 1, 2$. Se consideran los problemas estacionarios de conducción del calor P y P_α (para cada parámetro $\alpha > 0$) respectivamente, con condiciones de frontera mixtas, como en [3] y [4]:

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega; \quad u\big|_{\Gamma_1} = b; \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \tag{1}$$

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega; \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b); \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \tag{2}$$

donde g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y la temperatura del entorno externo de Γ_1 para (2), q es el flujo del calor sobre Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia del calor en Γ_1.

En [4] se denotaron por u_q y $u_{q\alpha}$ a las únicas soluciones de los problemas elípticos mixtos (1) y (2) respectivamente, para cada $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$ y $\alpha > 0$, cuyas ecuaciones variacionales están dadas por:

$$a(u_q, v) = L_q(v),\ \forall v \in V_0,\ u_q \in K \tag{3}$$

$$a_\alpha(u_{q\alpha}, v) = L_{q\alpha}(v),\ \forall v \in V,\ u_{q\alpha} \in V \tag{4}$$

donde

$$V = H^1(\Omega);\ V_0 = \{v \in V / v\big|_{\Gamma_1} = 0\}; \quad K \doteq v_0 + V_0$$

$$a(u,v) \doteq \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx;\ a_\alpha(u,v) \doteq a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv\, d\gamma$$

$$L_q(v) \doteq \int_\Omega gv\, dx - \int_{\Gamma_2} qv\, d\gamma;\ L_{q\alpha}(v) \doteq L_q(v) + \alpha \int_{\Gamma_1} bv\ d\gamma$$

para $v_0 \in V$ dado, tal que $v_0\big|_{\Gamma_1} = b$.

Además, en [4] se formularon los problemas de control óptimo frontera siguientes:

$$\text{hallar } q_{op} \in Q \text{ tal que } J(q_{op}) = \min_{q \in U_{ad}} J(q), \tag{5}$$

$$\text{hallar } q_{op_\alpha} \in Q \text{ tal que } J_\alpha(q_{op_\alpha}) = \min_{q \in U_{ad}} J_\alpha(q), \tag{6}$$

respectivamente, con $U_{ad} = \{q \in Q : q \geq 0 \text{ en } \Gamma_2\}$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de Q y los funcionales costo $J : Q \to \mathbb{R}_0^+$ y $J_\alpha : Q \to \mathbb{R}_0^+$ dados por:

$$J(q) = \frac{1}{2} \|u_q - z_d\|_H^2 + \frac{M}{2} \|q\|_Q^2 \tag{7}$$

$$J_\alpha(q) = \frac{1}{2} \|u_{q\alpha} - z_d\|_H^2 + \frac{M}{2} \|q\|_Q^2 \tag{8}$$

donde $z_d \in H = L^2(\Omega)$ y $M = cte. > 0$ están dadas.

En el teorema 11 de [4], se probaron resultados de convergencia de las soluciones $u_{q\alpha}$ de los problemas P_α a la solución u_q del problema P y de los estados adjuntos $p_{q\alpha}$ de los problemas P_α al estado adjunto p_q del problema P en $H^1(\Omega)$, para un fijo $q \in Q$, cuando $\alpha \to \infty$. En [4] (ver Teorema 12) además, se probaron resultados de convergencia de los estados del sistema y estados adjuntos de los problemas P_α a los correspondientes del problema P vinculados a los controles óptimos, como así también la convergencia de los controles óptimos q_{op_α} de los problemas (6) al control óptimo q_{op} de (5), cuando $\alpha \to \infty$.

En este trabajo se realizan estimaciones en función del parámetro α, con el objeto de estudiar el orden de convergencia de los resultados obtenidos en el teorema 11 antes mencionado, esto es, para q y α fijos. Más aún, es objetivo de este trabajo generalizar los resultados de [4], en el sentido de considerar los datos de los problemas elípticos (1) y (2) en espacios de funciones con menor regularidad. Resultados sobre regularidad de problemas elípticos se pueden ver en [5] y [6].

2. Estimaciones Respecto del Parmetro α

Se consideran las siguientes hipótesis: sea $\sigma \in [0, 1/2)$ fijo, con

$$g \in H^{-\sigma}(\Omega), \quad b \in H^{1/2+\sigma}(\Gamma_1), \quad q \in H^{-1/2+\sigma}(\Gamma_2). \tag{9}$$

A continuación se exponen resultados y se explicitan algunas ideas de las demostraciones.

Lema 1 *Bajo las hipótesis anteriores, para q y α fijos, $w_{q\alpha} = u_q - u_{q\alpha}$ satisface que $w_{q\alpha} \in H^{1+\sigma}(\Omega)$. Además,*

$$\|w_{q\alpha}\|_{H^1(\Omega)} \leq k(1/\alpha)^\sigma,$$

con $k = cte. > 0$ independiente de α.

Prueba.

La prueba resulta utilizando el teorema 2.2 de [2] y el hecho que $w_{q\alpha}$ satisface la siguiente formulación variacional:

$$a(w_{q\alpha}, v) + \alpha \int_{\Gamma_1} w_{q\alpha} v \, d\gamma = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_q}{\partial n} v \, d\gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

□

Teorema 1 *Bajo las hipótesis (9), para q y α fijos, $w_{q\alpha}$ satisface: $\forall \rho \in (\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{1}{2} - \epsilon_0)$, $\epsilon_0 > 0$ fijo*

$$\|w_{q\alpha}\|_{H^{1+\rho}(\Omega)} \leq k'(1/\alpha)^{\frac{2\delta_0(1-\delta_0-\delta_0^2)}{1+3\sqrt{5}}},$$

con $k' = cte. > 0$ independiente de α, $\rho = \frac{1}{(1+\delta)(2+\delta^2)}$, $\delta \in (\delta_0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ y δ_0 tal que $\rho(\delta_0) = \frac{1}{2} - \epsilon_0$.

Más aún, $\forall \bar{\rho} \in [0, \frac{2}{1+\sqrt{5}}]$

$$\|w_{q\alpha}\|_{H^{1+\bar{\rho}}(\Omega)} \leq k'(1/\alpha)^{\frac{2\delta_0(1-\delta_0-\delta_0^2)}{1+3\sqrt{5}}}.$$

Prueba.

Paso 1. Se obtiene la siguiente estimación

$$\|w_{q\alpha}\|_{H^{1+\sigma}(\Omega)} \leq C_1(1/\alpha)^{2\sigma-1},$$

para $\sigma \in [0, 1/2)$ y $C_1 = cte. > 0$ independiente de α.

Paso 2. Se deduce que

$$\|w_{q\alpha}\|_{H^{1+\rho}(\Omega)} \leq C_2(1/\alpha)^{\frac{\delta(1-\delta-\delta^2)}{(1+\delta)(2+\delta^2)}},$$

para $\delta \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $\rho \in (\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{1}{2})$, $\rho = \frac{1}{(1+\delta)(2+\delta^2)}$, $\sigma = \frac{1}{2+\delta^2}$ y $C_2 = cte. > 0$ independiente de α.

Paso 3. Sea δ_0 tal que $\frac{1}{(1+\delta_0)(2+\delta_0^2)} = \frac{1}{2} - \epsilon_0$, luego

$$\frac{\delta(1-\delta-\delta^2)}{(1+\delta)(2+\delta^2)} \geq \delta(1-\delta-\delta^2)\frac{2}{1+3\sqrt{5}} \geq \frac{2\delta_0(1-\delta_0-\delta_0^2)}{1+3\sqrt{5}},$$

de donde se sigue la prueba. □

Ahora, siguiendo [4], se define el estado adjunto p_q correspondinente a (1), para cada $q \in Q$ como la única solución del siguiente problema elíptico mixto:

$$-\Delta p_q = u_q - z_d \text{ en } \Omega; \quad p_q\big|_{\Gamma_1} = 0; \quad \frac{\partial p_q}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = 0 \tag{10}$$

cuya formulación variacional está dada por:

$$a(p_q, v) = (u_q - z_d, v), \forall v \in V_0,\ p_q \in V_0. \tag{11}$$

De manera análoga, se define el estado adjunto $p_{q\alpha}$ como la única solución del siguiente problema elíptico mixto correspondiente a (2) o (4), para cada $q \in Q$ y cada $\alpha > 0$ fijo:

$$-\Delta p_{q\alpha} = u_{q\alpha} - z_d \text{ en } \Omega\,; \quad -\frac{\partial p_{q\alpha}}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha p_{q\alpha}; \quad \frac{\partial p_{q\alpha}}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = 0 \tag{12}$$

cuya formulación variacional está dada por:

$$a_\alpha(p_{q\alpha}, v) = (u_{q\alpha} - z_d, v), \forall v \in V, p_{q\alpha} \in V. \tag{13}$$

Nota 1 *Sean los espacios*

$$D = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega),\ v\big|_{\Gamma_1} = 0\}$$

$$D_\alpha = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega),\ -\frac{\partial v}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha v\}.$$

Se sabe, por [1], que si la frontera Γ es suficientemente suave (esto es, de clase C^2), el espacio funcional D coincide con $H^2(\Omega) \cap V_0$ y el espacio D_α coincide con $\{v \in H^2(\Omega) : -\frac{\partial v}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha v\}$.

Este hecho es importante en el resultado que se da a continuación.

Teorema 2 *Bajo las hipótesis (9), para q y α fijos, $r_{q\alpha} = p_q - p_{q\alpha}$ satisface: $\forall \rho \in (0, \frac{1}{2} - \epsilon_0)$, $\epsilon_0 > 0$ fijo*

$$\|r_{q\alpha}\|_{H^{1+\rho}(\Omega)} \leq k''(1/\alpha)^{\frac{2\delta_0(1-\delta_0-\delta_0^2)}{1+3\sqrt{5}}},$$

con $k'' = cte. > 0$ independiente de α y δ_0 como en el Teorema 1.

Prueba.

Paso 1. Sean $p_q \in D$ y $p_{q_\alpha} \in D_\alpha$, se considera $\widetilde{r}_{q\alpha} = r_{q\alpha} - w_{q\alpha}$ y se sabe por lo expuesto en la observación que $\widetilde{r}_{q\alpha} \in H^{1+\sigma}(\Omega)$. Además

$$-\Delta\widetilde{r}_{q\alpha} = -\Delta r_{q\alpha} + \Delta w_{q\alpha} = u_q - u_{q\alpha} = w_{q\alpha},$$

luego

$$\|\widetilde{r}_{q\alpha}\|_{H^{1+\sigma}(\Omega)} \leq C_3\|\Delta\widetilde{r}_{q\alpha}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4(1/\alpha)^\sigma, \quad \forall\, \sigma \in [0, 1/2),$$

con C_3 y C_4 constantes positivas independientes de α. Por lo tanto, para $\alpha > 1$

$$\|r_{q\alpha}\|_{H^{1+\sigma}(\Omega)} \leq \|\widetilde{r}_{q\alpha}\|_{H^{1+\sigma}(\Omega)} + \|w_{q\alpha}\|_{H^{1+\sigma}(\Omega)} \leq C_5(1/\alpha)^{2\sigma-1},$$

con $C_5 = cte. > 0$ independiente de α.

Pasos 2 y 3. Resultan análogos a los desarrollados en el Teorema 1. □

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP No. 0460 de CONICET-UA.

REFERENCIAS

[1] F. BEN BELGACEM, H. EL FEKIH AND H. METOUI, *Singular perturbation for the Dirichlet boundary control of elliptic problems*, ESAIM: M2AN, 37 (2003), pp. 833-850.

[2] P. COLLI FRANZONE , *Approssimazione mediante il metodo di penalizzazione di problemi misti di Dirichlet-Neumann per operatori lineari ellittici del secondo ordine*, Bollettino Un. Mat. Italiana, 4 Nro 7 (1973), pp.229-250.

[3] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim., 47 (3) (2003), pp. 213-230.

[4] C.M. GARIBOLDI AND D.A. TARZIA, *Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems*, Adv. in Diff. Eq. and Control Processes, 1 Nro 2 (2008), pp. 113-132.

[5] J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Problemes aux limites non homogenes et applications*,vol. 1 (1968), Dunod, Paris.

[6] E. SHAMIR, *Regularization of mixed second order elliptic problems*,Israel J. Math., 6 (1968), pp. 150-168.