ANÁLISIS NUMÉRICO EN PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO PARA LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

Claudia M. Gariboldi[1], Paulo A. Pascal[2] y Domingo A. Tarzia[3,4]

[1]*Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina.* *cgariboldi@exa.unrc.edu.ar*
[2]*FCyT, Univ. Autónoma de Entre Ríos, 25 de mayo 385, 3260 Concepción del Uruguay, Argentina.* *pascal3360@gmail.com*
[3]*Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
[4]*CONICET, Argentina.* *DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se consideran problemas de control óptimo distribuido sobre la energía interna, denotados por C_α^λ, C^λ, C_α y C en un dominio n-dimensional Ω, donde $\lambda > 0$ es un parámetro en la ecuación de Helmholtz y $\alpha > 0$ representa el coeficiente de transferencia del calor sobre una porción de la frontera. Se formulan aproximaciones discretas $C_{h\alpha}^\lambda$, C_h^λ, $C_{h\alpha}$ y C_h de los problemas de control óptimo mencionados, utilizando el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1, con parámetro de discretización $h > 0$. Se estudia el comportamiento asintótico de los controles óptimos, estados directos y estados adjuntos de los problemas de control óptimo formulados. Más precisamente, se prueba que las soluciones óptimas de los problemas discretos $C_{h\alpha}^\lambda$ convergen a las soluciones óptimas de los problemas discretos C_h^λ, cuando $\alpha \to +\infty$. Luego, se demuestra que éstas convergen a las soluciones óptimas de los problemas continuos C^λ cuando $h \to 0^+$ y finalmente, se prueba la convergencia a las soluciones del problema C, cuando $\lambda \to 0^+$.

Palabras clave: *Control óptimo distribuido, problemas elípticos, análisis numérico, método de elementos finitos, convergencia.*
2020 AMS Subject Classification: 35J88, 35R35, 49J40, 49J45, 65K15, 65N30.

1. INTRODUCCIÓN

Sea un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$, cuya frontera regular Γ consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $|\Gamma_i| > 0$ (para $i = 1, 2$). Se denota con $|\Gamma_i|$, la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional de la porción Γ_i en Γ. Se presentan los siguientes problemas elípticos mixtos:

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{1}$$

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{2}$$

$$-\Delta u + \lambda u = g \quad \text{en } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{3}$$

$$-\Delta u + \lambda u = g \quad \text{en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha(u-b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \tag{4}$$

donde u es la temperatura en Ω, g es la energía interna en Ω, $b = cte. > 0$ es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y (3) y la temperatura en un entorno externo de Γ_1 para (2) y (4), q es el flujo de calor en Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor en Γ_1, que satisfacen: $g \in H = L^2(\Omega)$ y $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$.
Se denotan con u, u_α, u^λ y u_α^λ a las únicas soluciones de los problemas elípticos (1), (2), (3) y (4) respectivamente, cuyas ecuaciones variacionales estan dadas por [5, 7]:

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad u \in K, \tag{5}$$

$$a_\alpha(u,v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, \quad u \in V, \tag{6}$$

$$a^\lambda(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad u \in K, \tag{7}$$

$$a_\alpha^\lambda(u,v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, \quad u \in V, \tag{8}$$

donde

$$V = H^1(\Omega),\ V_0 = \{v \in V : v\big|_{\Gamma_1} = 0\};\quad K = v_0 + V_0,\ \text{para dado } v_0 \in V,\ v_0\big|_{\Gamma_1} = b;$$

$$(g,h)_H = \int_\Omega gh\,dx;\quad (q,\eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta\,d\gamma;\quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx;\quad a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uvd\gamma$$

$$a^\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda \int_\Omega uvdx;\quad a_\alpha^\lambda(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv\,d\gamma + \lambda \int_\Omega uv\,dx.$$

$$L(v) = (g,v)_H - (q,v)_Q;\quad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha \int_{\Gamma_1} bvd\gamma.$$

Es bien conocido, ver [7], que las ecuaciones variacionales (5), (6), (7) y (8) tienen únicas soluciones.
Se formulan los siguientes problemas de control óptimo distribuido continuos [6, 10]:
Problema C [4]:

$$\text{hallar}\quad \overline{g} \in H \quad \text{tal que}\quad J(\overline{g}) = \min_{g\in H} J(g) \tag{9}$$

donde $J(g) = \frac{1}{2}||u_g - z_d||_H^2 + \frac{M}{2}||g||_H^2$, con u_g la única solución de (5), para cada $g \in H$.
Problema C_α, para cada $\alpha > 0$, [4]:

$$\text{hallar } \overline{g}_\alpha \in H \text{ tal que } J_\alpha(\overline{g}_\alpha) = \min_{g\in H} J_\alpha(g) \tag{10}$$

donde $J_\alpha(g) = \frac{1}{2}||u_{\alpha g} - z_d||_H^2 + \frac{M}{2}||g||_H^2$, con $u_{\alpha g}$ la única solución de (6), para cada $g \in H$.
Problema C^λ, para cada $\lambda > 0$, [3]:

$$\text{hallar } \overline{g}^\lambda \in H \text{ tal que } J^\lambda(\overline{g}^\lambda) = \min_{g\in H} J^\lambda(g) \tag{11}$$

donde $J^\lambda(g) = \frac{1}{2}||u_g^\lambda - z_d||_H^2 + \frac{M}{2}||g||_H^2$, con u_g^λ la única solución de (7), para cada $g \in H$.
Problema C_α^λ, para cada $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$, [3]:

$$\text{hallar}\quad \overline{g}_\alpha^\lambda \in H \quad \text{tal que}\quad J_\alpha^\lambda(\overline{g}_\alpha^\lambda) = \min_{g\in H} J_\alpha^\lambda(g) \tag{12}$$

donde $J_\alpha^\lambda(g) = \frac{1}{2}||u_{\alpha g}^\lambda - z_d||_H^2 + \frac{M}{2}||g||_H^2$, con $u_{\alpha g}^\lambda$ la única solución de (8), para cada $g \in H$.

Notar que los problemas C, C_α (para cada $\alpha > 0$) tienen única solución $\overline{g}$ y $\overline{g}_\alpha$ respectivamente, cuyas pruebas se pueden ver en [4]. De manera similar, siguiendo [3], se prueba que los problemas C^λ (para cada $\lambda > 0$) y C_α^λ (para cada $\lambda > 0$, $\alpha > 0$) tienen única solución $\overline{g}^\lambda$ y $\overline{g}_\alpha^\lambda$, respectivamente.

En relación a los problemas de control óptimo formulados anteriormente, se definen los estados adjuntos, como las únicas soluciones de las siguientes ecuaciones variacionales [3, 4]:

$$p_g \in V_0:\quad a\left(p_g, v\right) = \left(u_g - z_d, v\right)_H,\quad \forall v \in V_0 \tag{13}$$

$$p_{\alpha g} \in V:\quad a_\alpha^\lambda\left(p_{\alpha g}, v\right) = \left(u_{\alpha g} - z_d, v\right)_H,\quad \forall v \in V \tag{14}$$

$$p_g^\lambda \in V_0:\quad a^\lambda\left(p_g^\lambda, v\right) = \left(u_g^\lambda - z_d, v\right)_H,\quad \forall v \in V_0 \tag{15}$$

$$p_{\alpha g}^\lambda \in V:\quad a_\alpha^\lambda\left(p_{\alpha g}^\lambda, v\right) = \left(u_{\alpha g}^\lambda - z_d, v\right)_H,\quad \forall v \in V. \tag{16}$$

Siguiendo [1, 2], se considera el método de elementos finitos y un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una triangulación regular con triángulos de Lagrange de tipo 1, constituido por elementos finitos afines equivalentes de clase C^0, siendo h el parámetro de aproximación que tiende a cero. Luego, se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas para los estados del sistema, los estados adjuntos y los funcionales costo. En general, la solución de un problema elíptico mixto pertenece a $H^r(\Omega)$ con $1 < r \leq 3/2 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$), pero existen ejemplos cuyas soluciones pertenecen $H^r(\Omega)$ con $2 \leq r$. Siguiendo [8, 9], se formulan problemas de control óptimo discretos, denotados por $C_{h\alpha}^\lambda$, $C_{h\alpha}$, C_h^λ y C_h.

El objetivo de este trabajo es probar la convergencia de las soluciones óptimas de los problemas $C_{h\alpha}^\lambda$ a las soluciones óptimas de los problemas C_h^λ, cuando $\alpha \to +\infty$, de éstas a las soluciones óptimas de los problemas C^λ cuando $h \to 0^+$ y finalmente, a las soluciones del problema C, cuando $\lambda \to 0^+$.

2. Discretización por el método de elementos finitos

En esta sección se considera el método de elementos finitos, siendo h el parámetro de aproximación que se puede tomar igual al lado más largo de los triángulos $T \in \tau_h$ y se aproximan V, V_0 y K por:

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega})/v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h \right\}, \quad V_{0h} = \{ v_h \in V_h/v_h = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \}, \quad K_h = b + V_{0h}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1. Sea $\pi_h : C^0(\bar{\Omega}) \to V_h$ el operador de interpolación lineal correspondiente. Entonces, existe una constante $c_0 > 0$ (independiente de h) tal que $\forall v \in H^r(\Omega)$, $1 < r \le 2$, [1]:

$$\|v - \pi_h(v)\|_H \le c_0 h^r \|v\|_r \quad \text{y} \quad \|v - \pi_h(v)\|_V \le c_0 h^{r-1} \|v\|_r. \tag{17}$$

Se formulan los siguientes problemas de control óptimo discretos.
Problema C_h, para cada $h > 0$, [9]:

$$\text{hallar} \quad \overline{g}_h \in H \quad \text{tal que} \quad J_h(\overline{g}_h) = \min_{g \in H} J_h(g) \tag{18}$$

donde $J_h(g) = \frac{1}{2}||u_{hg} - z_d||_H^2 + \frac{M}{2}||g||_H^2$, con u_{hg}, para cada $g \in H$, la única solución de

$$u_{hg} \in K_h : \quad a(u_{hg}, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{0h}.$$

Problema $C_{h\alpha}$, para cada $h > 0$, $\alpha > 0$, [9]:

$$\text{hallar } \overline{g}_{h\alpha} \in H \text{ tal que } J_{h\alpha}(\overline{g}_{h\alpha}) = \min_{g \in H} J_{h\alpha}(g) \tag{19}$$

donde $J_{h\alpha}(g) = \frac{1}{2}||u_{h\alpha g} - z_d||_H^2 + \frac{M}{2}||g||_H^2$ con $u_{h\alpha g}$, para cada $g \in H$, la única solución de

$$u_{h\alpha g} \in V_h : \quad a_\alpha(u_{h\alpha g}, v_h) = L_\alpha(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Problema C_h^λ, para $\lambda > 0,\ h > 0$:

$$\text{hallar} \quad \overline{g}_h^\lambda \in H \quad \text{tal que} \quad J_h^\lambda(\overline{g}_h) = \min_{g \in H} J_h^\lambda(g) \tag{20}$$

donde $J_h^\lambda(g) = \frac{1}{2}\left\|u_{hg}^\lambda - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2$, con u_{hg}^λ, para cada $g \in H$, la única solución de

$$u_{hg}^\lambda \in V_h : \quad a^\lambda\left(u_{hg}^\lambda, v_h\right) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{21}$$

Problema $C_{h\alpha}^\lambda$, para $\lambda > 0$, $h > 0$, $\alpha > 0$:

$$\text{hallar } \overline{g}_{h\alpha}^\lambda \in H \text{ tal que } J_{h\alpha}^\lambda(\overline{g}_{h\alpha}) = \min_{g \in H} J_{h\alpha}^\lambda(g) \tag{22}$$

donde $J_{h\alpha}^\lambda(g) = \frac{1}{2}\left\|u_{h\alpha g}^\lambda - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2$ con $u_{h\alpha g}^\lambda$, para cada $g \in H$, la única solución de

$$u_{h\alpha g}^\lambda \in V_h : \quad a_\alpha^\lambda\left(u_{h\alpha g}^\lambda, v_h\right) = L_\alpha(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{23}$$

Los correspondientes estados adjuntos vinculados a los problemas de control óptimo discretos, se definen como las soluciones de las siguientes ecuaciones variacionales.

$$p_{hg} \in V_{0h} : \quad a(p_{hg}, v_h) = (u_{hg} - z_d, v_h)_H, \quad \forall v_h \in V_{0h} \tag{24}$$

$$p_{h\alpha g} \in V_h : \quad a_\alpha^\lambda(p_{h\alpha g}, v_h) = (u_{h\alpha g} - z_d, v_h)_H, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{25}$$

$$p_{hg}^\lambda \in V_{0h} : \quad a^\lambda\left(p_{hg}^\lambda, v_h\right) = \left(u_{hg}^\lambda - z_d, v_h\right)_H, \quad \forall v_h \in V_{0h} \tag{26}$$

$$p_{h\alpha g}^\lambda \in V_h : \quad a_\alpha^\lambda\left(p_{h\alpha g}^\lambda, v_h\right) = \left(u_{h\alpha g}^\lambda - z_d, v_h\right)_H, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{27}$$

Notar que las ecuaciones variacionales (24), (25), (26) y (27), tienen únicas soluciones.

Lema 1 *Los problemas de control óptimo discretos (18), (19), (20) y (22), tienen únicas soluciones* $\overline{g}_h$, $\overline{g}_{h\alpha}$, $\overline{g}_h^\lambda$ *y* $\overline{g}_{h\alpha}^\lambda$, *respectivamente.*

Prueba. La prueba resulta por un razonamiento similar al desarrollado en [4]. □

3. Comportamiento asintótico de los problemas de control óptimo

En esta sección se presentan los principales resultados de este artículo y se hace una breve referencia en relación a sus pruebas.

Teorema 1 *Sean $\lambda > 0$ y $h > 0$, se tiene que:*
(i) Si $\overline{g}_h^\lambda$ y $\overline{g}_{h\alpha}^\lambda$ son soluciones de (20) y (22), respectivamente, entonces $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} ||\overline{g}_{h\alpha}^\lambda - \overline{g}_h^\lambda||_H = 0.$
(ii) Si $u_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda$ y $u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}^\lambda}^\lambda$ son soluciones de (21) y (23), respectivamente, entonces $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} ||u_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}^\lambda}^\lambda - u_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda||_V = 0.$
(iii) Si $p_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda$ y $p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}^\lambda}^\lambda$ son soluciones de (26) y (27), respectivamente, entonces $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} ||p_{h\alpha\overline{g}_{h\alpha}^\lambda}^\lambda - p_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda||_V = 0.$

Prueba. Esta prueba resulta por un razonamiento similar al desarrollado en [4], aplicado a problemas de control óptimo discretos. □

Teorema 2 *Para $\lambda > 0$, se tiene que:*
(i) Si $\overline{g}^\lambda$ y $\overline{g}_h^\lambda$ son las soluciones de (11) y (20), respectivamente, entonces $\lim\limits_{h\to0^+} ||\overline{g}_h^\lambda - \overline{g}^\lambda||_H = 0.$
(ii) Si los estados directos $u_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda, u_{\overline{g}^\lambda}^\lambda \in H^r(\Omega)$ para $1 < r \leq 2$, entonces $\lim\limits_{h\to0^+} ||u_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda - u_{\overline{g}^\lambda}^\lambda||_V = 0.$
(iii) Si los estados adjuntos $p_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda, p_{\overline{g}^\lambda}^\lambda \in H^r(\Omega)$ para $1 < r \leq 2$, entonces $\lim\limits_{h\to0^+} ||p_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda - p_{\overline{g}^\lambda}^\lambda||_V = 0.$

Prueba. Se deduce que existen constantes positivas, c_1, c_2 y c_3 independientes de h, tales que

$$||u_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda||_V \leq c_1, \quad ||\overline{g}_h^\lambda||_H \leq c_2 \quad \text{y} \quad ||p_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda||_V \leq c_3.$$

Luego, de las estimaciones (17), la unicidad de solución de las ecuaciones variacionales (7) y (15), la semicontinuidad inferior débil del funcional J^λ y la unicidad de solución del problema de control óptimo (11), se tiene que

$$\overline{g}_h^\lambda \rightharpoonup g^\lambda \text{ en } H, \quad u_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda \rightharpoonup u_{\overline{g}^\lambda}^\lambda \text{ en } V \quad (\text{fuerte en } H), \quad p_{h\overline{g}_h^\lambda}^\lambda \rightharpoonup p_{\overline{g}^\lambda}^\lambda \text{ en } V \quad (\text{fuerte en } H).$$

Finalmente, las convergencias fuertes en los correspondientes espacios funcionales, resultan de las convergencias débiles, la coercividad de la forma bilineal a^λ y las condiciones de optimalidad para los problemas C^λ y C_h^λ. □

Teorema 3 *(i) Si $\overline{g}$ y $\overline{g}^\lambda$ son las soluciones de (9) y (11), respectivamente, entonces* $\lim\limits_{\lambda\to0^+} ||\overline{g}^\lambda - \overline{g}||_H = 0.$
(ii) Si $u_{\overline{g}}$ y $u_{\overline{g}^\lambda}^\lambda$ son las soluciones de (5) y (7), respectivamente, entonces $\lim\limits_{\lambda\to0^+} ||u_{\overline{g}^\lambda}^\lambda - u_{\overline{g}}||_V = 0.$
(iii) Si $p_{\overline{g}}$ y $p_{\overline{g}^\lambda}^\lambda$ son la soluciones de (13) y (15), respectivamente, entonces $\lim\limits_{\lambda\to0^+} ||p_{\overline{g}^\lambda}^\lambda - p_{\overline{g}}||_V = 0.$

Prueba. Esta prueba resulta por un razonamiento similar al desarrollado en [3]. □

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por el Proyecto PPI No. 18C/614-1 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina.

Referencias

[1] Brenner S. - Scott L.R., *The mathematical theory of finite element methods*, Springer, New York, (2008).

[2] Ciarlet P.G., *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, Philadelphia, (2002).

[3] Gariboldi C.M. Maero A. V. - Tarzia D.A., *Doble convergencia en problemas de control óptimo simultáneos para la ecuación de Helmholtz*, MACI 9, 101-104 (2023).

[4] Gariboldi C.M. - Tarzia D.A., *Convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity*, Appl. Math. Optim., 47, 213-230 (2003).

[5] Kinderlehrer D. - Stampacchia G., *An introduction to variational inequalities and their applications*, SIAM, Philadelphia (2000).

[6] Lions J. L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris (1968).

[7] Tarzia D.A., *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 288, 941-944 (1979).

[8] Tarzia D.A., *A commutative diagram among discrete and continuous boundary optimal control problems*, Adv. Diff. Eq. Control Processes, 14, 23-54 (2014).

[9] Tarzia D.A., *Double convergence of a family of discrete distributed mixed elliptic optimal control problems with a parameter*, in Proceedings of the 27th IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, CSMO 2015, IFIP AICT 494, L. Bociu and J.-A. Desideri and A. Habbal (Eds.), Springer, Berlin, 493-504 (2016).

[10] Trölstzsch F., *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence, (2010).