Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021

EXISTENCIA, COMPARACIÓN, Y CONVERGENCIA PARA UNA CLASE DE INECUACIONES HEMIVARIACIONALES ELÍPTICAS

Claudia M. Gariboldi[1], Stanisław Migórski[2], Anna Ochal[3] y Domingo A. Tarzia[4 5]

[1]Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina cgariboldi@exa.unrc.edu.ar
[2]Jagiellonian University in Krakow, ul. Lojasiewicza 6, 30348 Krakow, Poland. stanislaw.migorski@uj.edu.pl
[3]Jagiellonian University in Krakow, ul. Lojasiewicza 6, 30348 Krakow, Poland. anna.ochal@uj.edu.pl
[4]Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.
[5]CONICET, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se estudia una clase de inecuaciones hemivariacionales elípticas, las cuales originan un problema estacionario de conducción del calor con condición de frontera con subdiferencial multivaluado no monótono sobre una porción de la frontera descripta por el gradiente generalizado de Clarke de una función localmente Lipschitz. Se prueba un resultado de existencia de solución empleando la teoría de operadores pseudomonótonos. Se estudia la comparación de soluciones y se obtienen condiciones suficientes que garantizan el comportamiento asintótico de la solución, cuando el coeficiente de transferencia de calor tiende a infinito.

Palabras clave: *Inecuación hemivariacional elíptica, comportamiento asintótico, gradiente generalizado de Clarke, problema mixto, ecuación elíptica no lineal.*
2000 AMS Subject Classification: 35J05, 35J65, 35J87, 49J45.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^d$ cuya frontera regular Γ consiste de la unión de tres porciones disjuntas Γ_i, $i = 1, 2, 3$ con $|\Gamma_i| > 0$, donde $|\Gamma_i|$ denota la medida de Hausdorff $(d-1)$-dimensional de la porción Γ_i sobre Γ. Se formulan los siguientes problemas elípticos mixtos:

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \qquad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q, \qquad u\big|_{\Gamma_3} = b, \tag{1}$$

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \qquad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q, \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_3} \in \alpha\, \partial j(u). \tag{2}$$

donde $g \in L^2(\Omega)$, $q \in L^2(\Gamma_2)$ y $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$, α es una constante positiva y la función $j\colon \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada superpotencial (potencial no convexo), es tal que $j(x,\cdot)$ es localmente Lipschitz para c.t.p. $x \in \Gamma_3$ y no necesariamente diferenciable. Puesto que en general $j(x,\cdot)$ no es convexo, la condición multivaluada sobre Γ_3 en (2) es descripta por una relación no monótona expresada por el gradiente generalizado de Clarke. Esta relación multivaluada se cumple en ciertos problemas estacionarios de conducción de calor (el comportamiento de una membrana semipermeable de espesor finito, problemas de control de temperatura, etc.). Problemas análogos con relaciones de frontera multivaluadas monótonas maximales (cuando $j(x,\cdot)$ es una función convexa) fueron considerados en [1, 4].

Se usa la siguiente notación

$$V = H^1(\Omega), \quad V_0 = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\},$$

$$K = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1,\ v = b \text{ sobre } \Gamma_3\}, \quad K_0 = \{v \in V \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_3\},$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, dx, \quad a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_3} \gamma(u)\gamma(v) d\Gamma,$$

$$L(v) = \int_\Omega gv\, dx - \int_{\Gamma_2} q\gamma(v)\, d\Gamma, \quad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha \int_{\Gamma_3} b\gamma(v)\, d\Gamma,$$

donde $\gamma\colon V \to L^2(\Gamma)$ denota el operador traza sobre Γ. En lo que sigue, se escribe u para la traza de una función $u \in V$ sobre la frontera. De una forma estándar, se obtiene la siguiente formulación variacional del problema (1):

$$\text{hallar } \ u_\infty \in K \ \text{ tal que } \ a(u_\infty, v) = L(v) \ \text{ para todo } \ v \in K_0 \tag{3}$$

con a, una forma bilineal, simétrica, continua y coerciva con constante $m_a > 0$, esto es

$$a(v,v) = \|v\|_{V_0}^2 \geq m_a \|v\|_V^2 \ \text{ para todo } \ v \in V_0 \tag{4}$$

donde $\|v\|_V$ y $\|v\|_{V_0}$ representan las normas sobre V y V_0, respectivamente.

Se destaca que el problema (3) ha sido extensivamente estudiado en papers como [5, 11, 12, 13, 14].

Bajo la anterior notación, la formulación débil del problema elíptico (2) es la siguiente inecuación hemivariacional elíptica:

$$\text{hallar } \ u \in V_0 \ \text{ tal que } \ a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_3} j^0(u; v)\, d\Gamma \geq L(v) \ \text{ para todo } \ v \in V_0. \tag{5}$$

La teoría de inecuaciones hemivariacionales ha sido propuesta en los años 80 por Panagiotopoulos, ver [7, 8, 9]. En los últimos años, nuevas clases de inecuaciones hemivariacionales, variacionales y variacional-hemivariacional han sido investigadas, ver [2, 6, 10], y esta teoría emerge como una nueva e interesante rama de la matemática aplicada.

El trabajo es estructurado como sigue. En la Sección 2 se da un nuevo resultado de existencia para el problema (5) y en la Sección 3, se establecen propiedades de comparación y resultados de convergencia de las soluciones del problema (5) a la solución del problema (3), cuando el parámetro α tiende a infinito.

2. Existencia de solución

En esta sección se dan conceptos preliminares y se proporciona un nuevo resultado de existencia de solución de la inecuación hemivariacional elíptica (5).

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach reflexivo, X^* es su dual, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad. Para una función real definida sobre X, se tiene la siguiente definicion [3, Section 2.1] y [6].

Definición 1 *Una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz, si para todo $x \in X$ existe U_x un entorno de x y una constante $L_x > 0$ tal que*

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq L_x \|y - z\|_X \ \text{ para todo } \ y, z \in U_x.$$

Para una tal función, la derivada direccional (Clarke) generalizada de φ en un punto $x \in X$ en la dirección $v \in X$ está definida por

$$\varphi^0(x; v) = \limsup_{y \to x,\, \lambda \to 0^+} \frac{\varphi(y + \lambda v) - \varphi(y)}{\lambda}.$$

El gradiente generalizado (subdiferencial) de φ en x es un subconjunto de X^* dado por

$$\partial\varphi(x) = \{\zeta \in X^* \mid \varphi^0(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \ \text{ para todo } \ v \in X\}.$$

Ahora, se considera la siguiente hipótesis:

$\underline{H(j)}$: $j\colon \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que

(a) $j(\cdot, r)$ es medible para todo $r \in \mathbb{R}$,

(b) $j(x, \cdot)$ is localmente Lipschitz para c.t.p. $x \in \Gamma_3$,

(c) existe $c_0, c_1 \geq 0$ tal que $|\partial j(x,r)| \leq c_0 + c_1|r|$ para todo $r \in \mathbb{R}$, a.e. $x \in \Gamma_3$,

(d) $j^0(x, r; b - r) \leq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, c.t.p. $x \in \Gamma_3$ con una constante $b \in \mathbb{R}$.

Se obtiene existencia de solución de la inecuación hemivariational elíptica:

$$\text{Hallar } \ u \in V_0 \ \text{ tal que } \ a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_3} j^0(u; v)\, d\Gamma \geq f(v) \ \text{ para todo } \ v \in V_0. \tag{6}$$

Este resultado se prueba en el teorema que se da a continuación.

Teorema 2 *Si $H(j)$ se satisface, $f \in V_0^*$ y $\alpha > 0$, entonces la inecuación hemivariacional* (6) *tiene una solución.*

Prueba. Se dará solo una idea de la prueba. Se considera $A\colon V_0 \to V_0^*$ definido por $\langle Au, v\rangle = a(u, v)$ para $u, v \in V_0$, el cual es un operador lineal, acotado y coercivo. Se define $J\colon L^2(\Gamma_3) \to \mathbb{R}$ por

$$J(w) = \int_{\Gamma_3} j(x, w(x))\, d\Gamma \ \text{ para todo } \ w \in L^2(\Gamma_3)$$

y de $H(j)$(a)-(c), por [6, Corollary 4.15], se infiere que el funcional J satisface:

(p1) J está bien definido y es Lipschitz continuo sobre subconjuntos acotados de $L^2(\Gamma_3)$, más aún es localmente Lipschitz,

(p2) $J^0(w; z) \leq \displaystyle\int_{\Gamma_3} j^0(x, w(x); z(x))\, d\Gamma$ para todo w, $z \in L^2(\Gamma_3)$,

(p3) $\|\partial J(w)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \|w\|_{L^2(\Gamma_3)}$ para todo $w \in L^2(\Gamma_3)$ con $\bar{c}_0, \bar{c}_1 \geq 0$.

Luego, se introduce el operador $B\colon V_0 \to 2^{V_0^*}$ definido por $Bv = \alpha\, \gamma^* \partial J(\gamma v)$ para todo $v \in V_0$, donde $\gamma^*\colon L^2(\Gamma) \to V_0^*$ denota el adjunto del operador traza γ.

Se muestra que B es pseudomonótono y acotado de V_0 a $2^{V_0^*}$, ver [6, Definition 3.57]. En orden a establecer pseudomonotonicidad del operador B, se considera [6, Proposition 3.58(ii)], y se prueba que B es pseudomonótono generalizado.

Por otro lado, el operador $A\colon V_0 \to V_0^*$ es pseudomonótono, ver [6, Theorem 3.69], dado que es lineal, acotado y no negativo. Por lo tanto, A es pseudomonótono y acotado como un operador multivaluado de V_0 a $2^{V_0^*}$, ver [6, Section 3.4]. Así, dado que la suma de operadores multivaluados pseudomonótonos es pseudomonótono, ver [6, Proposition 3.59 (ii)], se infiere que $A + B$ es acotado y pseudomonótono.

Luego, se prueba que el operador $A + B$ es coercivo y se concluye que el operador multivaluado $A + B$ es acotado, pseudomonótono, y coercivo, y por lo tanto suryectivo, ver [6, Proposition 3.61]. Se infiere que existe $u \in V_0$ tal que $(A + B)u \ni f$.

En la etapa final de la prueba, se observa que cualquier solución $u \in V_0$ de la inclusión $(A + B)u \ni f$ es una solución al problema (6), lo que completa la prueba. $\square$

3. Comparación y comportamiento asintótico de soluciones

En esta sección se aborda la comparación entre las soluciones al problema (5) y la solución al problema (3) y se investiga el comportamiento asintótico de soluciones al problema (5) cuando $\alpha \to \infty$.

Para estudiar la comparación, se formula la siguiente hipótesis sobre los datos

$\underline{(H_0)}$: $g \in L^2(\Omega)$, $g \leq 0$ en Ω, $q \in L^2(\Gamma_2)$, $q \geq 0$ sobre Γ_2

y se da el siguiente resultado, cuya demostración es omitida.

Teorema 3 *Si $H(j)$, (H_0) se satisfacen y $b \geq 0$, entonces*

(a) $u_\alpha \leq b$ en Ω, (b) $u_\alpha \leq u_\infty$ en Ω,

donde $u_\alpha \in V_0$ es una solución al problema (5) y $u_\infty \in K$ es la única solución al problema (3).

Para el estudio del comportamiento asintótico se considera la siguiente hipótesis adicional sobre el superpotencial j

$\underline{(H_1)}$: si $j^0(x, r; b - r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, c.t.p. $x \in \Gamma_3$, entonces $r = b$

y se prueba el teorema que se da a continuación.

Teorema 4 *Se asume $H(j)$, (H_0) y (H_1). Sea $\{u_\alpha\} \subset V_0$ una sucesión de soluciones al problema (5) y $u_\infty \in K$ la única solución al problema (3). Entonces $u_\alpha \to u_\infty$ en V, cuando $\alpha \to \infty$.*

Prueba. Se dará solo una idea de la prueba. En primer lugar, se prueba la estimación sobre la sucesión $\{u_\alpha\}$ en V, esto es

$$\|u_\alpha\|_V \leq \|v\|_V + \|u_\infty\|_V \leq \frac{1}{m_a}(M\|u_\infty\|_V + \|L\|_{V^*}) + \|u_\infty\|_V =: C, \tag{7}$$

donde $C > 0$ es independiente de α. Luego, se deduce que existe $C_1 > 0$, independiente de α, tal que

$$-\int_{\Gamma_3} j^0(u_\alpha; v)\, d\Gamma \leq \frac{C_1}{\alpha}. \tag{8}$$

Se sigue de (7) que $\{u_\alpha\}$ permanece en un subconjunto acotado de V. Luego, existe $u^* \in V$ tal que $u_\alpha \to u^*$ débil en V, cuando $\alpha \to \infty$. Luego, se muestra que $u^* = u_\infty$. Para esto, primero se prueba que

$$u^* \in V_0 \text{ satisface } L(w - u^*) \leq a(u^*, w - u^*) \text{ para todo } w \in K \tag{9}$$

y subsecuentemente, se muestra que $u^* \in K$. por lo tanto, se obtiene que $u^* = u_\infty$ y aquí $u_\alpha \to u_\infty$ débilmente en V, cuando $\alpha \to \infty$. Finalmente, se prueba la convergencia fuerte $u_\alpha \to u_\infty$ en V, cuando $\alpha \to \infty$. Para ello, de la desigualdad

$$a(u_\infty - u_\alpha, u_\infty - u_\alpha) \leq a(u_\infty, u_\infty - u_\alpha) + L(u_\alpha - u_\infty) + \alpha \int_{\Gamma_3} j^0(u_\alpha; u_\infty - u_\alpha)\, d\Gamma$$

y teniendo en cuenta que $u_\infty = b$ sobre Γ_3, por $H(j)$(d) y la coercividad de la forma a, se tiene

$$m_a \|u_\infty - u_\alpha\|_V^2 \leq a(u_\infty, u_\infty - u_\alpha) + L(u_\alpha - u_\infty).$$

Empleando la continuidad débil de ambos $a(u_\infty, \cdot)$ y L, se concluye que $u_\alpha \to u_\infty$ in V, cuando $\alpha \to \infty$, lo que completa la prueba. □

4. Agradecimientos

Este proyecto ha recibido financiación de European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 823731 CONMECH. La primera autora y el cuarto autor son parcialmente financiados por el Proyecto PIP No. 0275 de CONICET-UA, Rosario, Argentina.

Referencias

[1] Barbu V., *Boundary control problems with non linear state equation*, SIAM J. Control Optim., 20 (1982), 125-143.

[2] Carl S. - Le V.K. - Motreanu D., *Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities*, Springer, New York (2007)

[3] Clarke F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, Interscience, New York (1983).

[4] Duvaut G. - Lions J.L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris (1972).

[5] Garguichevich G.G. - Tarzia D.A., *The steady-state two-fase Stefan problem with an internal energy and some related problems*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 39 (1991), 615-634.

[6] Migorski S. - Ochal A. - Sofonea M., *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Springer, New York (2013).

[7] Naniewicz Z. - Panagiotopoulos P.D., *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1995).

[8] Panagiotopoulos P.D., *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston (1985).

[9] Panagiotopoulos P.D., *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer, Berlin (1993).

[10] Sofonea M. - Migorski S., *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications*, CRC Press, Boca Raton (2018).

[11] Tabacman E.D. - Tarzia D.A., *Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem*, J. Differential Equations, 77 (1989), 16-37.

[12] Tarzia D.A., *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 288 (1979), 941-944.

[13] Tarzia D.A., *Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Mathematicae Notae, 27 (1979/80), 145-156.

[14] Tarzia D.A., *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases*, Mathematicae Notae, 27 (1979/80), 157-165.