DOBLE CONVERGENCIA EN PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO SIMULTÁNEOS PARA LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

Claudia M. Gariboldi[1], Andrea del V. Maero[1] y Domingo A. Tarzia[2, 3]

[1]*Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Río Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Río Cuarto, Argentina.*
cgariboldi@exa.unrc.edu.ar; amaero@exa.unrc.edu.ar
[2]*Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*
[3]*CONICET, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: En este trabajo se consideran problemas elípticos con condiciones de frontera mixtas para las ecuaciones de Poisson y Helmholtz. Se formulan problemas de control óptimo simultaneos distribuido-frontera, sobre la energía interna g y el flujo de calor q, dependiendo de dos parámetros positivos, λ en la ecuación de Helmholtz y α en la condición de Robin. Se obtienen resultados de existencia y unicidad del vector control óptimo, se dan las condiciones de optimalidad de primer orden y se obtiene un esquema conmutativo de convergencia entre los controles óptimos, los estados del sistema y estados adjuntos, cuando los parámetros $\lambda \to 0^+$ y $\alpha \to +\infty$. Más aún, se prueba la doble convergencia de las soluciones óptimas cuando $(\lambda, \alpha) \to (0^+, +\infty)$, simultáneamente.

Palabras clave: *Ecuaciones variacionales elípticas, Ecuación de Helmholtz, Control óptimo, Convergencia.*
2020 AMS Subject Classification: 35A15, 35J20, 49J20, 49K20.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$, cuya frontera regular Γ consiste en la unión de dos porciones disjuntas Γ_1 y Γ_2 con $|\Gamma_i| > 0$ (para $i = 1, 2$). Se denota con $|\Gamma_i|$, la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional de la porción Γ_i en Γ. Se presentan los siguientes problemas elípticos mixtos [4]:

- **Problema** P:

$$-\Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \tag{1}$$

- **Problema** P_α, para cada $\alpha > 0$:

$$-\Delta u = g \ \text{ en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \tag{2}$$

- **Problema** P^λ, para cada $\lambda > 0$:

$$-\Delta u + \lambda u = g \ \text{ en } \Omega \qquad u\big|_{\Gamma_1} = b \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \tag{3}$$

- **Problema** P_α^λ, para cada $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$:

$$-\Delta u + \lambda u = g \ \text{ en } \Omega \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} = \alpha(u - b) \qquad -\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = q \tag{4}$$

donde u es la temperatura en Ω, g es la energía interna en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 para (1) y (3) y la temperatura en un entorno externo de Γ_1 para (2) y (4), q es el flujo de calor en Γ_2 y $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor en Γ_1, que satisfacen: $g \in H = L^2(\Omega)$, $q \in Q = L^2(\Gamma_2)$ y $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$.

Se denotan con u, u_α, u^λ y u_α^λ a las únicas soluciones de los problemas elípticos (1), (2), (3) y (4) respectivamente, cuyas ecuaciones variacionales estan dadas por [5]:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad u \in K, \tag{5}$$

$$a_\alpha(u, v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, \quad u \in V, \tag{6}$$

$$a^\lambda(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad u \in K, \tag{7}$$

$$a_\alpha^\lambda(u,v) = L_\alpha(v), \quad \forall v \in V, \quad u \in V, \tag{8}$$

donde

$$V = H^1(\Omega); \qquad Q = L^2(\Gamma_2); \qquad H = L^2(\Omega)$$

$$V_0 = \{v \in V : v\big|_{\Gamma_1} = 0\}; \quad K = v_0 + V_0, \text{ para dado } v_0 \in V, \ v_0\big|_{\Gamma_1} = b;$$

$$(g,h)_H = \int_\Omega gh\,dx; \quad (q,\eta)_Q = \int_{\Gamma_2} q\eta\,d\gamma; \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx; \quad a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv d\gamma$$

$$a^\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda \int_\Omega uv dx; \quad a_\alpha^\lambda(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv\,d\gamma + \lambda \int_\Omega uv\,dx.$$

$$L(v) = (g,v)_H - (q,v)_Q; \quad L_\alpha(v) = L(v) + \alpha \int_{\Gamma_1} bv d\gamma.$$

Es bien conocido, ver [2, 6], que las ecuaciones variacionales (5), (6), (7) y (8) tienen únicas soluciones. Se formulan los siguientes problemas de control óptimo C, C_α, C^λ y C_α^λ sobre g y q [1, 3, 7]:

- **Problema de control óptimo** C [1]:

$$\text{hallar} \quad (\overline{g},\overline{q}) \in H \times Q \quad \text{tal que} \quad J(\overline{g},\overline{q}) = \min_{g\in H, q\in Q} J(g,q) \quad \text{donde} \tag{9}$$

$$J(g,q) = \frac{1}{2}||u_{gq} - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2 \tag{10}$$

con u_{gq} la única solución de la ecuación variacional (5), para cada $g \in H$ y $q \in Q$.

- **Problema de control óptimo** C_α, para cada $\alpha > 0$, [1]:

$$\text{hallar } (\overline{g}_\alpha,\overline{q}_\alpha) \in H \times Q \text{ tal que } J_\alpha(\overline{g}_\alpha,\overline{q}_\alpha) = \min_{g\in H, q\in Q} J_\alpha(g,q), \quad \text{donde} \tag{11}$$

$$J_\alpha(g,q) = \frac{1}{2}||u_{\alpha gq} - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2, \tag{12}$$

con $u_{\alpha gq}$ la única solución de la ecuación variacional (6), para cada $g \in H$ y $q \in Q$.

- **Problema de control óptimo** C^λ, para cada $\lambda > 0$:

$$\text{hallar } (\overline{g}^\lambda,\overline{q}^\lambda) \in H \times Q \text{ tal que } J^\lambda(\overline{g}^\lambda,\overline{q}^\lambda) = \min_{g\in H, q\in Q} J^\lambda(g,q), \quad \text{donde} \tag{13}$$

$$J^\lambda(g,q) = \frac{1}{2}||u_{gq}^\lambda - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2, \tag{14}$$

con u_{gq}^λ la única solución de la ecuación variacional (7), para cada $g \in H$ y $q \in Q$.

- **Problema de control óptimo** C_α^λ, para cada $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$:

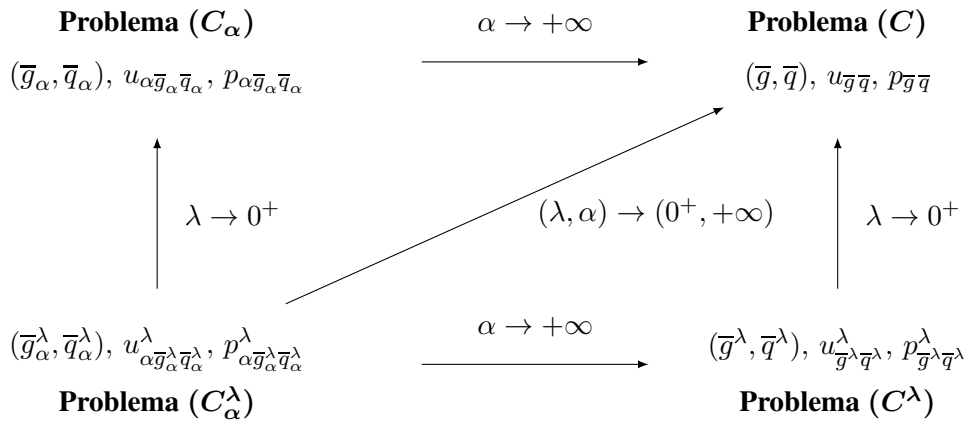
$$\text{hallar} \quad (\overline{g}_\alpha^\lambda,\overline{q}_\alpha^\lambda) \in H \times Q \quad \text{tal que} \quad J_\alpha^\lambda(\overline{g}_\alpha^\lambda,\overline{q}_\alpha^\lambda) = \min_{g\in H, q\in Q} J_\alpha^\lambda(g,q), \quad \text{donde} \tag{15}$$

$$J_\alpha^\lambda(g,q) = \frac{1}{2}||u_{\alpha gq}^\lambda - z_d||_H^2 + \frac{M_1}{2}||g||_H^2 + \frac{M_2}{2}||q||_Q^2, \tag{16}$$

con $u_{\alpha gq}^\lambda$ la única solución de la ecuación variacional (8), para cada $g \in H$ y $q \in Q$.

En [1], siguiendo a [3, 7], se demostró la existencia y unicidad de las soluciones de los problemas de control óptimo simultáneos C y C_α. De manera análoga se prueba la existencia y unicidad de las soluciones óptimas para los problemas C^λ y C_α^λ.

El objetivo de este trabajo es obtener el siguiente diagrama conmutativo que relaciona los problemas de control óptimo simultáneos distribuido-frontera (C_α^λ), (C^λ), (C_α) y (C) de la siguiente manera:



2. Condiciones de optimalidad

En esta sección, se define el estado adjunto y se dan las condiciones de optimalidad de primer orden para los problemas de control óptimo C^λ y C^λ_α. Para los problemas C y C_α, las ecuaciones adjuntas y las condiciones de optimalidad están dadas en [1].

Se define el estado adjunto p^λ_{gq} para el problema C^λ, para cada $(g, q) \in H \times Q$, como la solución de la ecuación variacional

$$a^\lambda(p, v) = \left(u^\lambda_{gq} - z_d, v\right)_H, \quad \forall\ v \in V_0, \quad p \in V_0 \tag{17}$$

y la condición de optimalidad está dada por

$$\left(p^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda} + M_1\overline{g}^\lambda, \eta\right)_H + \left(M_2\overline{q}^\lambda - p^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda}, \xi\right)_Q = 0, \quad \forall(\eta, \xi) \in H \times Q. \tag{18}$$

Se define el estado adjunto $p^\lambda_{\alpha gq}$ para el problema C^λ_α, para cada $(g, q) \in H \times Q$, como la solución de

$$a^\lambda_\alpha(p, v) = \left(u^\lambda_{\alpha gq} - z_d, v\right)_H, \quad \forall\ v \in V, \quad p \in V. \tag{19}$$

y la condición de optimalidad está dada por

$$\left(p^\lambda_{\alpha\overline{g}^\lambda_\alpha\overline{q}^\lambda_\alpha} + M_1\overline{g}^\lambda_\alpha, \eta\right)_H + \left(M_2\overline{q}^\lambda_\alpha - p^\lambda_{\alpha\overline{g}^\lambda_\alpha\overline{q}^\lambda_\alpha}, \xi\right)_Q = 0, \quad \forall(\eta, \xi) \in H \times Q. \tag{20}$$

3. Comportamiento asintótico de los problemas de control óptimo

En esta sección se presenta la convergencia fuerte para los controles óptimos, los estados del sistema óptimos y los estados adjuntos óptimos de los problemas C^λ a C cuando $\lambda \to 0^+$, de los problemas C^λ_α a C_α para $\alpha > 0$ fijo, cuando $\lambda \to 0^+$, de los problemas C^λ_α a C^λ para $\lambda > 0$ fijo, cuando $\alpha \to +\infty$. La convergencia fuerte de las soluciones óptimas de C_α a C, cuando $\alpha \to +\infty$, está probada en [1].

Teorema 1 *Sean $(\overline{g}^\lambda, \overline{q}^\lambda) \in H \times Q$ y $(\overline{g}, \overline{q}) \in H \times Q$ las únicas soluciones de los problemas (13) y (9) respectivamente, entonces $u^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda}$ es fuertemente convergente a $u_{\overline{g}\,\overline{q}}$ en V, $p^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda}$ es fuertemente convergente a $p_{\overline{g}\,\overline{q}}$ en V y $(\overline{g}^\lambda, \overline{q}^\lambda)$ es fuertemente convergente a $(\overline{g}, \overline{q})$ en $H \times Q$, cuando $\lambda \to 0^+$.*

Teorema 2 *Sean $(\overline{g}^\lambda_\alpha, \overline{q}^\lambda_\alpha) \in H \times Q$ y $(\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha) \in H \times Q$ las únicas soluciones de los problemas (15) y (11) respectivamente, para $\alpha > 0$ fijo, entonces $u^\lambda_{\alpha\overline{g}^\lambda_\alpha\overline{q}^\lambda_\alpha}$ es fuertemente convergente a $u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}$ en V, $p^\lambda_{\alpha\overline{g}^\lambda_\alpha\overline{q}^\lambda_\alpha}$ es fuertemente convergente a $p_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}$ en V y $(\overline{g}^\lambda_\alpha, \overline{q}^\lambda_\alpha)$ es fuertemente convergente a $(\overline{g}_\alpha, \overline{q}_\alpha)$ en $H \times Q$, cuando $\lambda \to 0^+$.*

Teorema 3 *Sean $(\overline{g}^\lambda_\alpha, \overline{q}^\lambda_\alpha) \in H \times Q$ y $(\overline{g}^\lambda, \overline{q}^\lambda) \in H \times Q$ las únicas soluciones de los problemas (15) y (13) respectivamente, para $\lambda > 0$ fijo, entonces $u^\lambda_{\alpha\overline{g}^\lambda_\alpha\overline{q}^\lambda_\alpha}$ es fuertemente convergente a $u^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda}$ en V, $p^\lambda_{\alpha\overline{g}^\lambda_\alpha\overline{q}^\lambda_\alpha}$ es fuertemente convergente a $p^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda}$ en V y $(\overline{g}^\lambda_\alpha, \overline{q}^\lambda_\alpha)$ es fuertemente convergente a $(\overline{g}^\lambda, \overline{q}^\lambda)$ en $H \times Q$, cuando $\alpha \to +\infty$.*

4. Doble convergencia de (C_α^λ) a (C) cuando $(\lambda,\alpha)\to(0^+,+\infty)$

En esta sección, se obtiene la doble convergencia de los problemas C_α^λ a C cuando $(\lambda,\alpha)\to(0^+,+\infty)$, simultáneamente.

Teorema 4 *Se tienen los siguientes límites:*

$$\lim_{(\lambda,\alpha)\to(0^+,+\infty)} ||(\overline{g}_\alpha^\lambda,\overline{q}_\alpha^\lambda)-(\overline{g},\overline{q})||_{H\times Q}=0. \tag{21}$$

$$\lim_{(\lambda,\alpha)\to(0^+,+\infty)} ||u^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}-u_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0, \quad \lim_{(\lambda,\alpha)\to(0^+,+\infty)} ||p^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}-p_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0. \tag{22}$$

Prueba. Se presenta un esquema de la prueba. Se obtiene que las sucesiones $(\overline{g}_\alpha^\lambda,\overline{q}_\alpha^\lambda)$, $u^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}$ y $p^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}$ están acotadas independientemente de λ y α. Por lo tanto, cuando $(\lambda,\alpha)\to(0^+,+\infty)$

$$\exists f\in H:\ \overline{g}_\alpha^\lambda\rightharpoonup f \text{ en } H, \quad \exists\rho\in Q:\ \overline{q}_\alpha^\lambda\rightharpoonup\rho \text{ en } Q,$$
$$\exists\eta\in V:\ u^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}\rightharpoonup\eta \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}), \quad \exists\xi\in V:\ p^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}\rightharpoonup\xi \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}),$$

cuando $\alpha\to+\infty$

$$\exists f^\lambda\in H:\ \overline{g}_\alpha^\lambda\rightharpoonup f^\lambda \text{ en } H, \quad \exists\rho^\lambda\in Q:\ \overline{q}_\alpha^\lambda\rightharpoonup\rho^\lambda \text{ en } Q,$$
$$\exists\eta^\lambda\in V:\ u^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}\rightharpoonup\eta^\lambda \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}), \quad \exists\xi^\lambda\in V:\ p^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}\rightharpoonup\xi^\lambda \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}),$$

cuando $\lambda\to0^+$

$$\exists f_\alpha\in H:\ \overline{g}_\alpha^\lambda\rightharpoonup f_\alpha \text{ en } H, \quad \exists\rho_\alpha\in Q:\ \overline{q}_\alpha^\lambda\rightharpoonup\rho_\alpha \text{ en } Q,$$
$$\exists\eta_\alpha\in V:\ u^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}\rightharpoonup\eta_\alpha \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}), \quad \exists\xi_\alpha\in V:\ p^\lambda_{\alpha\overline{g}_\alpha^\lambda\overline{q}_\alpha^\lambda}\rightharpoonup\xi_\alpha \text{ en } V(\text{en } H \text{ fuerte}).$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\eta=\eta^\lambda=b$ sobre Γ_1 y $\xi=\xi^\lambda=0$ sobre Γ_1, por la unicidad de las soluciones de los problemas (C_α^λ), (C^λ), (C_α) y (C), y la unicidad de las soluciones de las ecuaciones variacionales correspondientes, se obtiene que

$$\eta^\lambda=u^\lambda_{f^\lambda\rho^\lambda}=u^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda}, \quad \xi^\lambda=p^\lambda_{f^\lambda\rho^\lambda}=p^\lambda_{\overline{g}^\lambda\overline{q}^\lambda}, \quad f^\lambda=\overline{g}^\lambda, \quad \rho^\lambda=\overline{q}^\lambda$$
$$\eta_\alpha=u_{\alpha f_\alpha\rho_\alpha}=u_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}, \quad \xi_\alpha=p_{\alpha f_\alpha\rho_\alpha}=p_{\alpha\overline{g}_\alpha\overline{q}_\alpha}, \quad f_\alpha=\overline{g}_\alpha, \quad \rho_\alpha=\overline{q}_\alpha.$$

Luego, usando [1], se tiene que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}||f_\alpha-\overline{g}||_H=0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty}||\rho_\alpha-\overline{q}||_Q=0$$
$$\lim_{\alpha\to+\infty}||\eta_\alpha-u_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty}||\xi_\alpha-p_{\overline{g}\,\overline{q}}||_V=0$$

y por lo tanto los límites dobles (21) y (22) se cumplen cuando $(\lambda,\alpha)\to(0^+,+\infty)$. □

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme under the Marie Sklodowska-Curie grant agreement 823731 CONMECH y PIP No. 0275 de CONICET-Universidad Austral, Rosario, Argentina para el tercer autor, y por el Proyecto PPI No. 18/C555 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina para la primera y segunda autoras.

Referencias

[1] Gariboldi C. M. - Tarzia D. A., *Existence, uniqueness and convergence of simultaneous distributed-boundary optimal control problems*, Control and Cybernetics, 44, 5-17 (2015).

[2] Kinderlehrer D. - Stampacchia G., *An introduction to variational inequalities and their applications*, SIAM, Philadelphia (2000).

[3] Lions J.L., *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris (1968).

[4] Tabacman E. D. - Tarzia D. A., *Sufficient and/ or necessary condition for the heat transfer coefficient on* Γ_1 *and the heat flux on* Γ_2 *to obtain a steady-state two-phase Stefan problem*, J. Differential Equations 77, 16–37 (1989).

[5] Tarzia D. A., *Sur le problème de Stefan à deux phases*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A 288, 941–944 (1979).

[6] Tarzia D. A., *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de forntera libre*, Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, ClAMI-CONICET, No. 5, Buenos Aires (1981).

[7] Trölstzsch F., *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, American Math. Soc., Providence (2010).