

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

I.S.S.N. 03260690

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

III SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES

Rosario, 11 al 15 de octubre - 1988

17

Rosario - República Argentina
-1989-

SOBRE UN PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

CON FUENTE DE ENERGIA INTERNA

Graciela G. GARGUICHEVICH - Domingo A. TARZIA

PROMAR (CONICET-UNR),

Instituto de Matemática "Beppo Levi",

Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agr.,

Avda. Pellegrini 250,

2000 Rosario, Argentina.

1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Consideremos el problema de la distribución estacionaria de temperatura θ en un cuerpo Ω con una fuente de energía interna de densidad g .

Supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene una frontera suficientemente regular $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, con Γ_1 y Γ_2 disjuntos y de medida $(n-1)$ dimensional positiva ($|\Gamma_i| > 0$, $i = 1, 2$) y admitiremos el caso $\Gamma_3 = \emptyset$.

Asumiremos, además, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase del material es 0^0 , que sobre Γ_1 es $\theta = b > 0$ y sobre Γ_2 y Γ_3 el flujo es q y 0 respectivamente.

Vamos a generalizar aquí los resultados obtenidos en [5] para el caso $g = 0$. Obtendremos condiciones necesarias y/o suficientes que relacionarán los datos B , q y g para que el material presente una o dos fases.

Si definimos la temperatura estacionaria por:

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & , x \in \Omega_1 \text{ (fase sólida) ,} \\ 0 & , x \in L \text{ (frontera libre) ,} \\ \theta_2(x) > 0 & , x \in \Omega_2 \text{ (fase líquida) ,} \end{cases} \quad (1)$$

con $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup L$, entonces se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_i \Delta \theta_i = g \text{ en } \Omega_i \text{ (} i = 1, 2 \text{)} , \\ \theta_1 = \theta_2 = 0 \text{ , } k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \text{ sobre } \mathcal{L} \text{ ,} \\ \theta_2 = b \text{ sobre } \Gamma_1 \text{ ,} \\ -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = a \text{ si } \theta > 0 \text{ sobre } \Gamma_2 \text{ ,} \\ -k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = a \text{ si } \theta < 0 \text{ sobre } \Gamma_2 \text{ ,} \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} \big|_{\Gamma_3} = 0 \text{ ,} \end{array} \right. \quad (2)$$

donde $k_i > 0$ es el coeficiente de conductividad térmica de la fase i ($i=1$ fase sólida, $i=2$ fase líquida) y n es la normal exterior a Γ_2 , Γ_3 o $\mathcal{L}$ según corresponda.

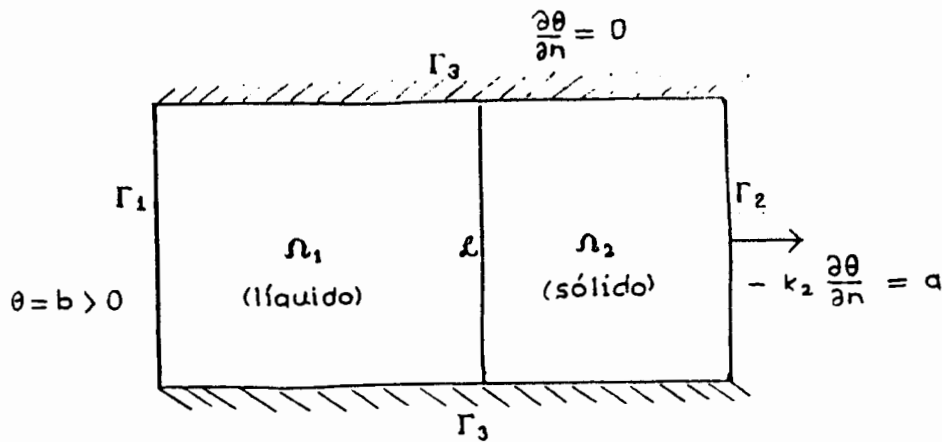


FIGURA 1

Este problema resulta equivalente a ([1],[4])

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = g \text{ en } \Omega \text{ ,} \\ u \big|_{\Gamma_1} = B \text{ ,} \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\Gamma_2} = a \text{ , } -\frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\Gamma_3} = 0 \text{ ,} \end{array} \right. \quad (3)$$

siendo $u=u(x)$ la nueva función incógnita, definida de la siguiente manera

$$u = k_2 \theta^+ - k_1 \theta^- \text{ en } \Omega \quad (4)$$

2. FORMULACION VARIACIONAL

Sea

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, , \\ L(v) = \int_{\Omega} g \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} q \, v \, d\gamma \quad (= L_{aq}(v)) \\ V = H^1(\Omega) \, , \quad V_0 = \{ v \in V : v|_{\Gamma_1} = 0 \} \, , \quad K = \{ v \in V : v|_{\Gamma_1} = B \} \quad (= K_B) \end{array} \right. \quad (5)$$

con $L \in V_0'$ (por ej. $q \in L^2(\Gamma_2)$, $g \in L^2(\Omega)$) y $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$.

El problema (3) admite la siguiente formulación variacional ([2], [4]):

$$u \in K_B \, , \quad a(u,v) = L(v) \, , \quad \forall v \in V_0 \, , \quad (6)$$

y también, su equivalente

$$u \in K_B \, , \quad J(u) \leq J(v) \, , \quad \forall v \in K_B \, , \quad (7)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \quad (8)$$

La única solución de (6) puede caracterizarse por

$$u_{Baq} = u_B + u_q + u_g \quad \text{en } \Omega \, , \quad (9)$$

donde u_B , u_q y u_g son respectivamente las únicas soluciones de

$$u_B \in K_B \, , \quad a(u_B,v) = 0 \, , \quad \forall v \in V_0 \, , \quad (10)$$

$$u_q \in V_0 \, , \quad a(u_q,v) = - \int_{\Gamma_2} q \, v \, d\gamma \, , \quad \forall v \in V_0 \, , \quad (11)$$

$$u_g \in V_0 \, , \quad a(u_g,v) = \int_{\Omega} g \, v \, dx \, , \quad \forall v \in V_0 \quad (12)$$

En el caso B, q y g constantes, resulta

$$u_{Baq} = B - q \, u_1 + g \, u_2 \quad \text{en } \Omega \, , \quad (13)$$

donde u_1 y u_2 quedan definidas por los siguientes problemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1 = 0 \text{ en } \Omega , \\ u_1|_{\Gamma_1} = 0 , \\ \frac{\partial u_1}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 1 , \\ \frac{\partial u_1}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0 , \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \in V_0 , \\ a(u_1, v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma , \quad \forall v \in V_0 \end{array} \right. \quad (14)$$

u

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2 = 1 \text{ en } \Omega , \\ u_2|_{\Gamma_1} = 0 , \\ \frac{\partial u_2}{\partial n}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0 , \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 \in V_0 , \\ a(u_2, v) = \int_{\Omega} v \, dx , \quad \forall v \in V_0 \end{array} \right. \quad (15)$$

Además, por el principio del máximo ([2],[3]), u_1 y u_2 son funciones positivas en Ω .

3. PROPIEDADES GENERALES DE LA SOLUCION

Sea $u = u_{Bqg}$ la única solución del problema (6) para los datos $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $q \in L^2(\Gamma_2)$ y $g \in L^2(\Omega)$, se demuestran las siguientes propiedades:

Propiedad 1

i) Si $B_1 \leq B_2$ (ó $b_1 \leq b_2$) sobre Γ_1 , $q_2 \leq q_1$ sobre Γ_2 , $g_1 \leq g_2$ en Ω , entonces:

$$u_1 = u_{B_1 q_1 g_1} \leq u_{B_2 q_2 g_2} = u_2 \text{ en } \bar{\Omega} \quad (16)$$

ii) Si alguna de las tres desigualdades para B_1 , q_1 ó g_1 es estricta, la desigualdad para u_1 también lo es.

Demostración

i) Si $w = (u_2 - u_1)^-$, usando $v = u_1 + w \in K_{B_1}$ para $i = 1, 2$ en (6), se obtiene que

$$0 \leq a(w, w) = \int_{\Omega} (g_1 - g_2) w \, dx - \int_{\Gamma_2} (q_1 - q_2) w \, d\gamma \leq 0 .$$

es decir $w = 0$ en $\bar{\Omega}$ y por ende $u_1 \leq u_2$ en $\bar{\Omega}$

ii) Si se supone $u_1 = u_2$, resulta de $a(u_2 - u_1, v) = 0$ que $g_2 = g_1 \in L^2(\Omega)$ y $q_2 = q_1 \in L^2(\Gamma_2)$

Propiedad 2

Si $B > 0$, $\alpha > 0$ y $g \geq 0$ resulta:

$$u^- \neq 0 \text{ en } \Omega \Leftrightarrow u^- \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_2. \quad (17)$$

Demostración

Se deduce trivialmente de la ecuación

$$\int_{\Omega} g u^- dx + a(u^-, u^-) = \int_{\Gamma_2} \alpha u^- d\gamma \quad (18)$$

Definición 1

Para cada $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $B > 0$, se definen las funciones

$$F_{Bg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} /$$

$$F_{Bg}(\alpha) = J(u_{B\alpha g}) = \frac{1}{2} a(u_{B\alpha g}, u_{B\alpha g}) - \int_{\Omega} g u_{B\alpha g} dx + \alpha \int_{\Gamma_2} u_{B\alpha g} d\gamma \quad (19)$$

donde $g \in L^2(\Omega)$ y

$$F_{B\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} /$$

$$F_{B\alpha}(g) = J(u_{B\alpha g}) = \frac{1}{2} a(u_{B\alpha g}, u_{B\alpha g}) - g \int_{\Omega} u_{B\alpha g} dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u_{B\alpha g} d\gamma \quad (20)$$

donde $\alpha \in L^2(\Gamma_2)$.

Teorema 1

Las funciones F_{Bg} y $F_{B\alpha}$ verifican

$$i) F_{Bg} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ y } F'_{Bg}(\alpha) = \int_{\Gamma_2} u_{B\alpha g} d\gamma, \quad (21)$$

$$ii) F_{B\alpha} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ y } F'_{B\alpha}(g) = - \int_{\Omega} u_{B\alpha g} dx \quad (22)$$

Demostración

Probaremos sólo ii). El caso i) se prueba en forma similar y el resultado es idéntico al obtenido en [5] para el caso $g = 0$.

La función $g \rightarrow \int_{\Omega} u_{Bqg} dx$ es continua ya que a partir de las

desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Poincaré-Friederichs (con cte. $C(\Omega)$) resultan

$$\|u_{Bq(g+h)} - u_{Bqg}\|_V \leq \frac{|\Omega|^{1/2} C(\Omega)}{\alpha} |h|, \quad (23)$$

$$\left| \int_{\Omega} (u_{Bq(g+h)} - u_{Bqg}) dx \right| \leq \frac{|\Omega| C(\Omega)}{\alpha} |h| \quad (24)$$

donde α la constante de coercividad de la forma bilineal a sobre V_0 y $h \in \mathbb{R}$.

Es fácil verificar además que

$$\frac{F_{Bq}(g+h) - F_{Bqg}}{h} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{Bq(g+h)} + u_{Bqg}) dx, \quad (25)$$

y por ende, $F_{Bq} \in C^1(\mathbb{R})$ con F'_{Bq} definido por (22).

Más aún, F'_{Bq} es una función estrictamente decreciente como consecuencia de la propiedad 1.

Corolario 1

i) Sean $B_0 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $B_0 > 0$, $g_0 \in L^2(\Omega)$, $g_0 \geq 0$ y $q_0 \in \mathbb{R}^+$ tales que $F'_{B_0 q_0}(q_0) < 0$; entonces u_{Bqg} no es de signo constante en Ω , para todo $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $q \in L^2(\Gamma_2)$, y $g \in L^2(\Omega)$ que verifican $0 < B \leq B_0$, $0 \leq g \leq g_0$ y $0 < q_0 \leq \inf_{x \in \Gamma_2} q(x)$.

ii) Sean $B_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $B_1 > 0$, $q_1 \in L^2(\Gamma_2)$ y $g_1 \in \mathbb{R}$ tales que $F'_{B_1 q_1}(g_1) > 0$, entonces u_{Bqg} no es de signo constante en Ω para todo $B \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $q \in L^2(\Gamma_2)$ y $g \in L^2(\Omega)$ que verifican $0 < B \leq B_1$, $q_1 \leq q$ y $\sup_{x \in \Omega} g(x) \leq g_1$.

Demostración

Resulta inmediata del teorema 1 y de las propiedades 1 y 2. (La propiedad 2 se usa sólo en el caso ii).

Si se suponen q, g ctes., $B > 0$ fijo, el caso i) queda representado por la siguiente figura

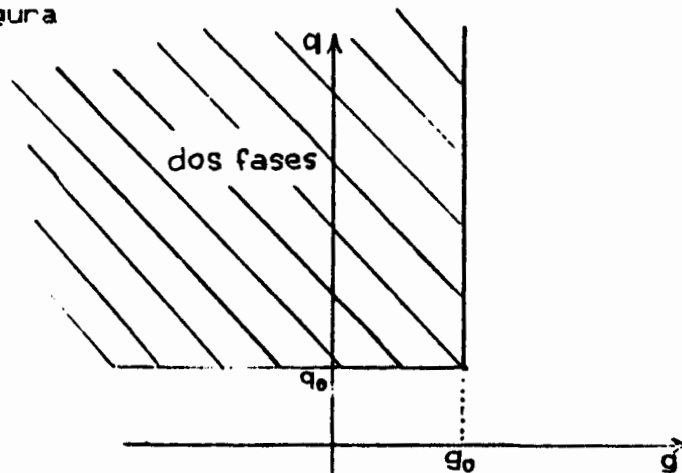


FIGURA 2

El caso ii) repite la misma figura reemplazando (g_0, q_0) por (g_1, q_1) .

Definición 2 : Función Flujo Crítico

Si consideramos $B \geq 0$ y cte. sobre Γ_1 , q constante sobre Γ_2 y $g \in L^2(\Omega)$, podemos definir la función flujo crítico por

$$\begin{aligned} q_c : \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (B, g) &\mapsto q_c(B, g) \end{aligned} \quad (26)$$

tal que

- * para cada $B > 0$ y $q \leq q_c(B, g)$, $u_{Bqg} \geq 0$ en Ω (una sola fase),
- * para cada $B > 0$ y $q > q_c(B, g)$, u_{Bqg} es de signo no constante en Ω (dos fases).

Observación 1

Como consecuencia de la propiedad 1, la función Flujo Crítico es monótona en el siguiente sentido:

$$\forall 0 < B_1 \leq B_2 \text{ y } \forall g_1, g_2 \in L^2(\Omega), g_1 \leq g_2 \text{ resulta } q_c(B_1, g_1) \leq q_c(B_2, g_2). \quad (27)$$

En el caso que g y q son ctes. y $B > 0$ fijo, se tiene la siguiente representación

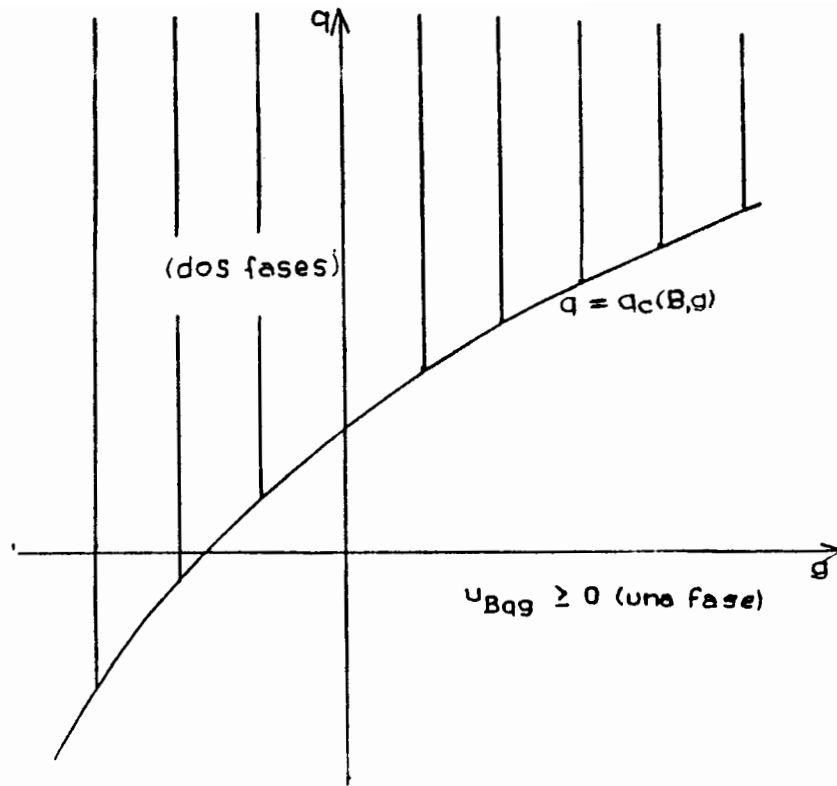


FIGURA 3

Corolario 2

i) Sean $B > 0$ constante y $g \in L^2(\Omega)$, resulta

$$a) F'_{Bg}(q) < 0 \Leftrightarrow q > q_0(B) + \frac{c_g}{c_1} , \quad (28)$$

con

$$c_1 = a(u_1, u_1) = \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma > 0 , \quad (29)$$

$$c_g = a(u_g, u_1) = \int_{\Omega} g u_1 \, dx = \int_{\Gamma_2} u_g \, d\gamma , \quad (30)$$

$$q_0(B) = \frac{B \|\Gamma_2\|}{c_1} > 0 , \quad (31)$$

(u_1 y u_g están definidas por (14) y (12) respectivamente) .

$$b) q_0(B) + \frac{c_g}{c_1} > q_c(B, g) , \quad \forall g \in L^2(\Omega) , \quad g \geq 0 , \quad B \in \mathbb{R}^+ , \quad (32)$$

es decir que, si $q > q_0(B) + \frac{c_g}{c_1}$ entonces u_{Bqg} no es de signo constante en Ω

ii) Sean $B > 0$ constante y $q \in L^2(\Gamma_2)$, resulta

$$a) F_{Bq}(g) > 0 \Leftrightarrow g < \frac{c_q}{c_2} - g_0(B) , \quad (33)$$

con

$$c_2 = a(u_2, u_2) = \int_{\Omega} u_2 \, dx > 0 . \quad (34)$$

$$c_q = -a(u_2, u_q) = - \int_{\Omega} u_q \, dx = \int_{\Gamma_2} q \, u_2 \, d\gamma . \quad (35)$$

$$g_0(B) = \frac{B |\Omega|}{c_2} > 0 . \quad (36)$$

$$b) \text{ Si } g < -g_0(B) + \frac{c_q}{c_2} , \text{ entonces } u_{Bqg} \text{ no es de signo constante en } \Omega . \quad (37)$$

Demostración

i)a) De (9), (14) y (21) resulta

$$F_{Bq}(g) = -\frac{1}{2} a(u_g, u_g) + q a(u_g, u_1) - \frac{q^2}{2} a(u_1, u_1) + B [q |\Gamma_2| - \int_{\Omega} g \, dx] \quad (38)$$

y luego

$$F'_{Bq}(g) = a(u_g, u_1) + B |\Gamma_2| - q a(u_1, u_1) = c_g + B |\Gamma_2| - q c_1 \quad (39)$$

Como $c_1 > 0$, se obtiene (28).

b) Resulta de i) y de la propiedad 2, teniendo en cuenta que, para $g \geq 0$,

$$c_g = \int_{\Omega} g \, u_1 \, dx > 0 \text{ y por lo tanto } c_g(B) + \frac{c_g}{c_1} > 0 .$$

ii) Se prueba de forma similar a la parte i) considerando que

$$F_{Bq}(g) = -\frac{g^2}{2} a(u_2, u_2) - g [a(u_2, u_q) + B |\Omega|] + B \int_{\Gamma_2} q \, d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} q \, u_q \, d\gamma \quad (40)$$

y de allí

$$F'_{Bq}(g) = -a(u_2, u_2) g - a(u_2, u_q) - B |\Omega| , \quad (41)$$

Es remarcable que en este caso no se requiere que q y g sean positivas o no negativas como sucede en el ítem i).

Corolario 3

Si B , q y g son constantes, se define la función

$$F: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(B, a, g) \rightarrow F(B, a, g) = J(u_{B a g}) = F_{B g}(a) = F_{B a}(g) \quad (42)$$

que verifica

$$F(B, a, g) = -\frac{c_1}{2} a^2 + c_{12} a g - \frac{c_2}{2} g^2 + B |\Gamma_2| a - B |\Omega| g \quad (43)$$

con c_1 y c_2 definidas por (29) y (34) respectivamente y

$$c_{12} = a(u_1, u_2) = \int_{\Omega} u_1 dx = \int_{\Gamma_2} u_2 d\gamma > 0 \quad (44)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a}(B, a, g) = -c_1 a + c_{12} g + B |\Gamma_2|, \\ \frac{\partial F}{\partial g}(B, a, g) = c_{12} a - c_2 g - B |\Omega|, \\ \frac{\partial F}{\partial B}(B, a, g) = |\Gamma_2| a - |\Omega| g. \end{cases} \quad (45)$$

Además resulta:

i) $D = c_1 c_2 - c_{12}^2 > 0$, esto es, para $B > 0$ dado

gráfico $F = \{(a, g, z) \in \mathbb{R}^3 / z = F(B, a, g)\}$ es un paraboloides elíptico y las rectas

$$\begin{cases} l_1) -c_1 a + c_{12} g + B |\Gamma_2| = 0 \\ l_2) c_{12} a - c_2 g - B |\Omega| = 0, \end{cases} \quad (46)$$

se intersecan en el punto (a^*, g^*) definido por

$$\begin{cases} a^* = B \frac{|\Gamma_2| c_2 - |\Omega| c_{12}}{D}, \\ g^* = B \frac{|\Gamma_2| c_{12} - |\Omega| c_1}{D} \end{cases} \quad (47)$$

$$ii) a_0(B, g) < a_0(B) + \frac{c_{12}}{c_1} g \quad \forall B \in \mathbb{R}^+, g \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (48)$$

$$iii) a_0(B, g) < a_1(B) + \frac{c_g}{c_{12}} g \quad \forall B \in \mathbb{R}^+, g \in \mathbb{R} \quad (49)$$

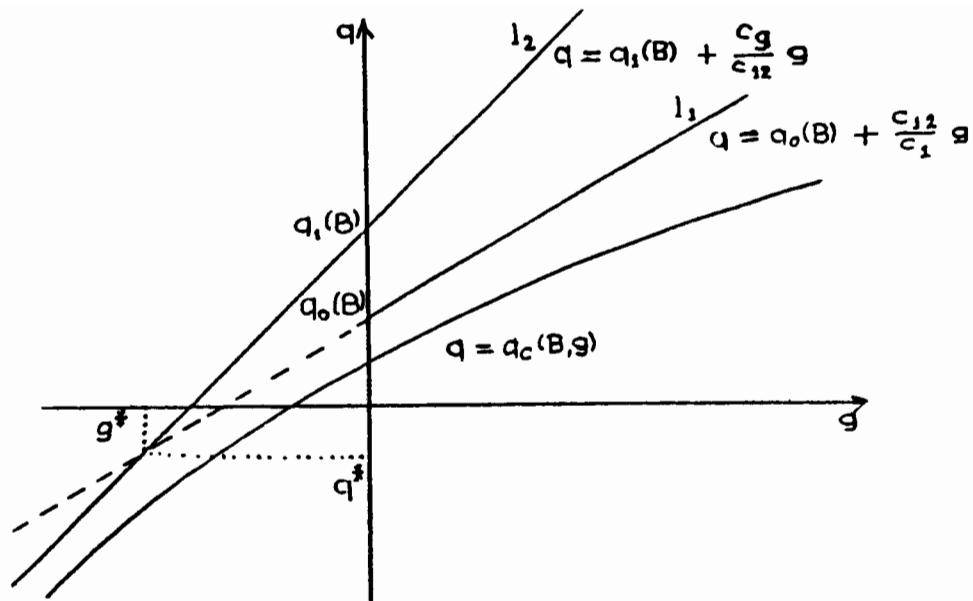


FIGURA 4

Demostración

Las identidades (43) y (45) se obtienen trivialmente de (38)-(41).

i) Se tiene que

$$0 < C_{12} = a(u_1, u_2) = \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla u_2 \, dx \leq \| \nabla u_1 \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla u_2 \|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{C_1} \sqrt{C_2}$$

y como

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \nabla u_1 &= \Delta u_1 = 0 && \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \nabla u_2 &= \Delta u_2 = -1 && \text{en } \Omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } C / \nabla u_1 = C \nabla u_2$$

resulta

$$D = C_1 C_2 - C_{12}^2 > 0.$$

Para obtener (47) se resuelve el sistema lineal (46)

ii) y iii) resultan respectivamente de (32) y (37)

Propiedad 3

Sean B , q , g ctes. y

$$Q_0(B) = \frac{B}{\inf_{\Gamma_2} u_1} \geq \frac{B}{\sup_{\Gamma_2} u_1} = \tilde{\alpha}_0(B) > 0, \quad (50)$$

$$M = \frac{\sup_{\Gamma_2} u_2}{\inf_{\Gamma_2} u_1} \geq \frac{\inf_{\Gamma_2} u_2}{\sup_{\Gamma_2} u_1} = m > 0 \quad (51)$$

Resulta:

$$i) \quad \tilde{\alpha}_0(B) + m g \leq q_C(B, g) \leq Q_0(B) + M g, \quad \forall g \geq 0. \quad (52)$$

$$ii) \quad \text{Si } u_1|_{\Gamma_2} = \alpha_1 \text{ es constante, luego } q_C(B, 0) = \frac{B}{\alpha_1} = \tilde{\alpha}_0(B) = Q_0(B). \quad (53)$$

$$iii) \quad \text{Si } u_1|_{\Gamma_2} = \alpha_1 \text{ y } u_2|_{\Gamma_2} = \alpha_2 \text{ son constantes, luego}$$

$$q_C(B, g) = \frac{B}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g, \quad \forall g \geq 0. \quad (54)$$

Demostración

Si u_{Bqg} no es de signo constante en Ω , por Propiedad 2, para $B > 0$, $g \geq 0$ y $q > 0$, existe $x \in \Gamma_2$ tal que

$$u_{Bqg}(x) = B - q u_1(x) + g u_2(x) < 0.$$

Luego

$$q > \frac{B + g u_2(x)}{u_1(x)} > \tilde{\alpha}_0(B) + m g > 0, \text{ o sea } \tilde{\alpha}_0 + m g \leq q_C(B, g) \quad \forall g \geq 0.$$

$$\text{Si } g \geq 0 \text{ y } q > Q_0(B) + M g = \frac{B + \sup_{\Gamma_2} u_2}{\inf_{\Gamma_2} u_1} > 0, \text{ luego}$$

$$u_{Bqg}(x) < 0, \quad \forall x \in \Gamma_2 \text{ y } q_C(B, g) < Q_0(B) + M g, \quad \forall g \geq 0$$

De (52) se obtienen trivialmente (53) y (54).

4. EJEMPLOS

Daremos a continuación tres ejemplos en los que la solución se conoce explícitamente para $B > 0$, q y g ctes.

Ejemplo 1

Se considera:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \quad , \quad \Omega = (0, x_0) \times (0, y_0) \quad , \quad x_0 > 0 \quad , \quad y_0 > 0 \quad , \\ \Gamma_1 = (0) \times [0, y_0] \quad , \quad \Gamma_2 = (x_0) \times [0, y_0] \quad , \quad \Gamma_3 = (0, x_0) \times (0) \cup (0, x_0) \times (y_0) \quad . \end{array} \right. \quad (55)$$

Se obtiene:

$$u_1(x, y) = x \quad , \quad u_2(x, y) = x_0 x - \frac{x^2}{2} \quad ,$$

$$c_1 = x_0 y_0 \quad , \quad c_2 = \frac{x_0^3 y_0}{3} \quad , \quad c_{12} = \frac{x_0^2 y_0}{2} \quad ,$$

$$D = c_1 c_2 - c_{12}^2 = \frac{x_0^4 y_0^2}{12} \quad , \quad |\Omega| = x_0 y_0 \quad , \quad |\Gamma_2| = y_0 \quad ,$$

$$1_1) \quad a - \frac{x_0}{2} g - \frac{B}{x_0} = 0$$

$$1_2) \quad a - \frac{x_0}{3} g - \frac{B}{x_0} = 0$$

$$(g^*, a^*) = \left(-\frac{2B}{x_0} \quad , \quad -\frac{6B}{x_0^2} \right) \quad ,$$

$$a_C(B, g) = \begin{cases} \frac{B}{x_0} + \frac{x_0}{2} g \quad , & \forall g \geq -\frac{2B}{x_0^2} \quad , \\ g x_0 + \sqrt{-2B g} \quad , & \forall g \leq -\frac{2B}{x_0^2} \quad . \end{cases} \quad (56)$$

Ejemplo 2

Se considera:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \quad , \quad 0 < r_1 < r_2 \quad , \quad \Gamma_3 = \emptyset \quad , \quad r, \omega : \text{coordenadas polares en } \mathbb{R}^2 \quad , \\ \Omega = \{ (r, \omega) : r_1 < r < r_2 \} \quad , \\ \Gamma_1 = \{ (r, \omega) : r = r_1 \quad , \quad 0 \leq \omega < 2\pi \} \quad , \\ \Gamma_2 = \{ (r, \omega) : r = r_2 \quad , \quad 0 \leq \omega < 2\pi \} \quad , \quad \Gamma_3 = \emptyset \quad . \end{array} \right. \quad (57)$$

Se obtiene:

$$u_1(r) = r_2 \log \frac{r}{r_1} \quad , \quad u_2(r) = \frac{r_2^2}{2} \log \frac{r}{r_1} - \frac{r^2 - r_1^2}{4} \quad ,$$

y definiendo

$$c = \frac{r_2}{r_1} ; \alpha(c) = (c^2 - 1) - 2 \log c , \quad \beta(c) = (1 + c^2) \log c - (c^2 - 1) , \\ \gamma(c) = 2 c^2 \log c - (c^2 - 1)$$

resulta:

$$c_1 = 2 \pi r_2^2 \log c , \quad c_{12} = \frac{\pi r_1^3 c}{2} [2 c^2 \log c - (c^2 - 1)] ,$$

$$c_2 = \frac{\pi r_1^4}{8} [4 c^4 \log c - 2 c^2 (c^2 - 1) - (c^2 - 1)^2] ,$$

$$D = c_1 c_2 - c_{12}^2 = \frac{\pi^2}{4} r_1^5 c^2 (c^2 - 1) \beta(c) ,$$

$$|\Omega| = \pi (r_2^2 - r_1^2) , \quad |\Gamma_2| = 2 \pi r_2 ,$$

$$l_1) \alpha = \frac{B}{r_2 \log c} - \left[\frac{r_2}{2} - \frac{r_1 (c^2 - 1)}{4 c \log c} \right] g = 0$$

$$l_2) \alpha = \frac{2 (c^2 - 1) B}{[2 c^2 \log c - (c^2 - 1)] r_1 c} - \frac{r_1 [4 c^4 \log c - (c^2 - 1) (3 c^2 - 1)]}{4 c [2 c^2 \log c - (c^2 - 1)]} g = 0$$

$$(g^*, \alpha^*) = \left(- \frac{4 B \alpha(c)}{r_1^2 (c^2 - 1) \beta(c)} ; \frac{B}{r_2} \left[\frac{1}{\log c} - \frac{\gamma(c) \alpha(c)}{(c^2 - 1) \beta(c) \log c} \right] \right) ,$$

$$a_c(B, g) = \begin{cases} \frac{B}{r_2 \log c} + \left[\frac{r_2}{2} - \frac{r_1 (c^2 - 1)}{4 c \log c} \right] g , & \forall g \geq - \frac{4 B}{r_1^2 \gamma(c)} , \\ - \frac{g r_1}{2 c} [Q^2(g) - c^2] , & \forall g < - \frac{4 B}{r_1^2 \gamma(c)} , \end{cases} \quad (58)$$

donde $Q(g)$ está definida implícitamente por

$$H(g, Q) = B + g \frac{r_1^2}{4} [Q^2 [2 \log Q - 1] + 1] = 0 . \quad (59)$$

Ejemplo 3

Se consideran los mismos datos que en el ejemplo 2 pero para $n = 3$

Se obtiene:

$$u_1(r) = r_2^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) , \quad u_2(r) = - \frac{r_2}{3} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) - \frac{r^2 - r_1^2}{6}$$

$$c_1 = 4 \pi r_1^3 c^3 (c - 1) , \quad c_{12} = \frac{2}{3} \pi r_1^4 c^2 (c - 1)^2 (2c + 1) ,$$

$$c_2 = \frac{4}{45} \pi r_1^5 (c - 1)^2 (5c^3 + 6c^2 + 3c + 1) ,$$

$$D = c_1 c_2 - c_{12}^2 = \frac{4}{45} \pi^2 r_1^8 (c - 1)^4 c^3 (4c^2 + 7c + 4) ,$$

$$|\Omega| = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3) , \quad |\Gamma| = 4 \pi r_2^2 ,$$

$$l_1) \alpha - \frac{B}{r_1 c (c - 1)} - \frac{r_1 (c - 1) (2c + 1)}{6c} g = 0$$

$$l_2) \alpha - \frac{2B(c^2 + c + 1)}{r_1 c^2 (c - 1) (2c + 1)} - \frac{2r_1 (5c^3 + 6c^2 + 3c + 1)}{15c^2 (2c + 1)} g = 0$$

$$(g^*, \alpha^*) = \left(- \frac{180 B (c + 1)}{r_1^2 (c - 1)^2 (4c^2 + 7c + 4)} ; - \frac{12 B}{r_1} \frac{(c^2 + 3c + 1)}{c (c - 1) (4c^2 + 7c + 4)} \right) ,$$

$$\alpha_C(B, g) = \begin{cases} \frac{B}{r_1 c (c - 1)} + \frac{r_1 (c - 1) (2c + 1)}{6c} g , & \forall g \geq g_1 \\ g \frac{r_1}{3} (c - \tilde{Q}(g)) , & \forall g \leq g_1 \end{cases} \quad (60)$$

Observamos que, en los tres ejemplos, fijado $B > 0$, la gráfica de $\alpha_C(B, g)$ coincide con la de r_1 , $\forall g \geq g_1$ ($g_1 > g^*$), es decir, para los g tales que $\alpha_C(B, g) \geq 0$.

REFERENCIAS

- [1] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus". Rapport de Recherche N° 185, Rocquencourt (1976).
- [2] D. KINDERLEHRER - G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).
- [3] M. H. PROTTER - H. F. WEINBERGER, "Maximum principles in differential equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).
- [4] D. A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI, 8 Mars 1979. C.R. Acad. Sc. Paris, 288A (1979), 941-944. Ver además "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27(1979), 145-156.
- [5] D. A. TARZIA, "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Engineering Anal., 5(1988), 177-181. Ver además Math. Notae, 28(1980), 73-89 y "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computação Científica, Vol. 5, SBMAC-Soc. Brasileira Mat. Apl. Comput., Gramado (1987).