UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

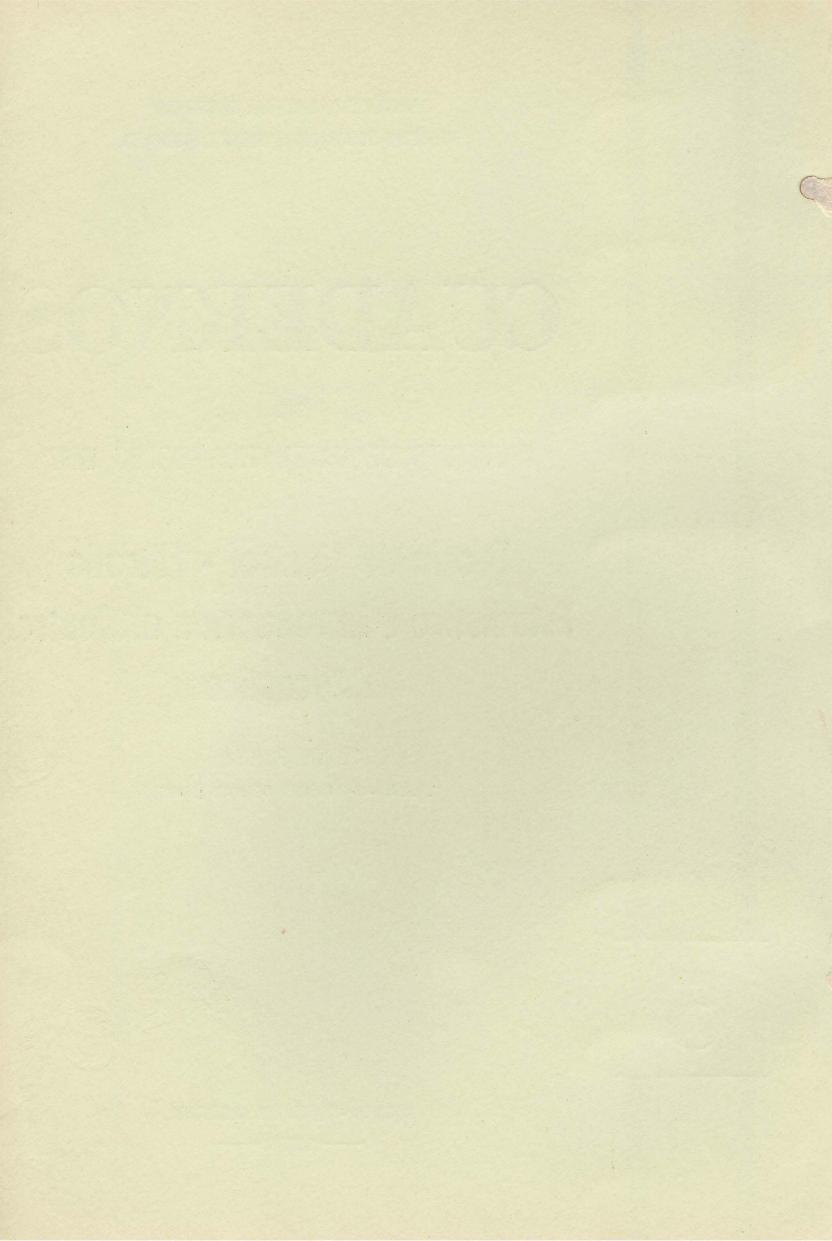
Teoría de Control - Filtrado
Estadístico e Introducción al Control
Estocástico

PIERRE FAURRE

I. R. I. A. - UNIVERSIDAD DE PARIS (FRANCIA)

5

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
----- 1973 -----



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIFRIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

Teoría de Control - Filtrado Estadístico e Introducción al Control Estocástico

PIERRE FAURRE

I.R.I.A. - UNIVERSIDAD DE PARIS (FRANCIA) (PROFESOR VISITANTE - ROSARIO - JULIO 1972)

> Lecciones redactadas por: Est. Marina Fernández de Luco Est. Liliana Magnano de Perren Lic. Domingo Tarzia

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
------ 1973 ------

Este curso intensivo, dictado en la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de ROSARIO, forma parte del ciclo que fuera iniciado el año pasado por el Prof. P. Bernhard (Introducción a la Teoría de Control Optimo, cuaderno N°4 de esta Serie) y que será continuado en el año 1973 por el Profesor A. Bensoussan con el desarrollo del tema Teoría Moderna de Control Optimo. Todo ello como parte del acuerdo de asistencia técnica y científica que vincula al Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique (IRIA) de Francia con el Centro de Matemática Aplicada y Cálculo del Instituto de Matemática ''Beppo Levi''.

La publicación del curso, a cargo de la Universidad de Rosario, ha su mado un motivo más de satisfacción a la tarea realizada; me cabe así agradecer la acertada labor de quienes lo redactaron e intervinieron en las distintas etapas de la misma.

P.F.

INTRODUCCION: (*)

El considerable desarrollo de la automatización de los procesos de producción, de las máquinas de computación, del control automático, etc..., han necesitado el desarrollo de disciplinas matemáticas como son: la Automática, la Informática y la Investigación Operativa.

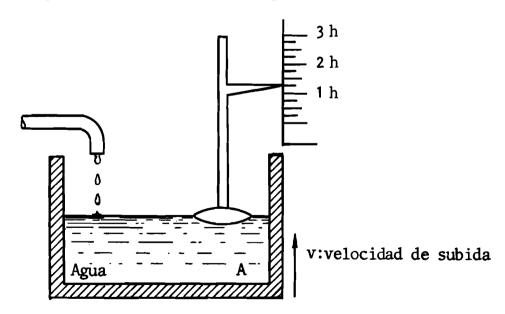
Estas disciplinas utilizan las matemáticas para poder representar y ana lizar los sistemas. Entendemos por sistema un conjunto de componentes ele mentales que están conectados según una estructura determinada.

Además es necesario conocer con intuición física el sistema ó proceso que se va a regular ó representar, y la tecnología que existe para hacer el control y la regulación.

En el pasado han sido desarrollados empíricamente sistemas muy buenos, los cuales tienen la estructura de feed-back; un ejemplo de ello es la Clep sydra, inventada 3 siglos antes de Cristo:

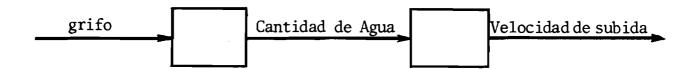
Queremos una indicación precisa de la hora; para ello usamos un recipiente A con un flotador que indicará en un tablero la hora. Para que la velocidad de subida del indicador sea constante es necesario que el recipiente se alimente regularmente con agua. Presentaremos 2 soluciones.

Una primera solución es utilizando un grifo, solución no muy buena pues el caudal de salida de agua no es constante por depender de la presión.



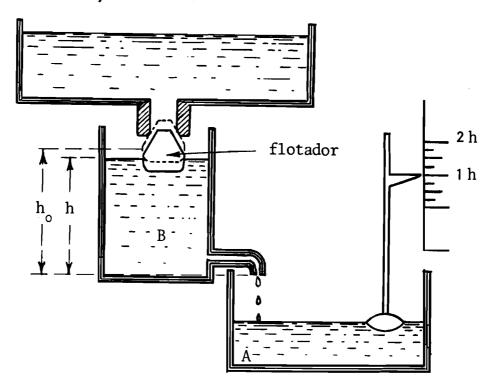
(*) Estas notas constituyen una resumida presentación de los temas que con mayor amplitud serán tratados en P. FAURRE: "Elements d'Automatique", DUNOD, próximo a aparecer.

La esquematización de la primera solución es:



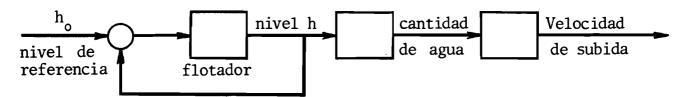
Una segunda solución es utilizar un nuevo recipiente B con un flotador el cual tiene la misión de impedir la salida de agua cuando se ha logra do una altura adecuada.

 ${\rm h}_{_{\rm O}}$ es la altura del agua que tiene el recipiente B cuando el flotador obstruye la salida y h la altura real.



El objetivo de este sistema es que $\,h\,$ permanezca prácticamente constante e igual a $\,h_{o}\,$, con lo cual se consigue que el caudal que entra en el recipiente $\,A\,$ (que depende de $\,h\,$) sea constante.

Esquematizando esta segunda solución tenemos:



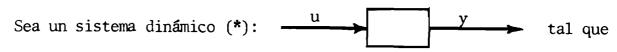
Otros ejemplos de utilización del feed-back se desarrollaron durante la revolución industrial como ser el regulador de Watt para la máquina de va — por.

CAPITULO 1

Teoría Usual De Control

I-1. REGULACION SIMPLE (P.I.D.)

Nos ocuparemos de describir 3 sistemas dinámicos: Retardo, Capacidad ó Integrador y Constante de tiempo, y estudiaremos sobre ellos los efectos de feed-backs(proporcional, integral y derivado).



 $y(t) = f(u(t_o;t); t); donde:$

u: es la excitación (control ó imput).

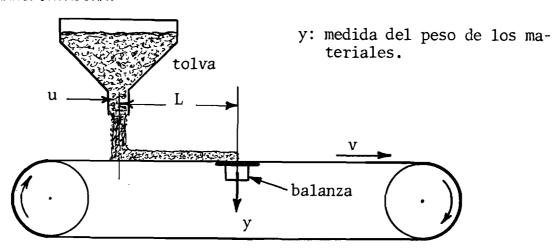
y: es la observación (salida ó out-put).

1-1: RETARDO

DEF.: Un sistema dinámico es un Retardo cuando $\exists T > 0 / y(t) = u(t - T)$ \forall t. A la constante T la llamamos retardo.

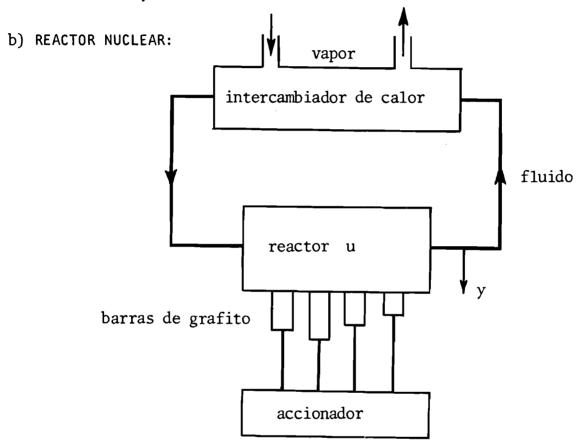
Veamos algunos ejemplos de la realidad, que responden a esta definición.

a) CINTA TRANSPORTADORA:



(*) Para mayor información ver Cap. I curso de P. BERNHARD. (Publicación N^4 de esta misma Serie CUADERNOS).

En las minas es frecuente transportar los materiales mediante una cinta transportadora que circula a una velocidad v constante. Se quiere conocer el peso de los materiales que caen de la tolva. Si se los pesaran en el momento de la caída, esta medida estaría modificada por el impulso; por lo cual se coloca la balanza a una distancia L, existiendo de este modo un retardo $T = \frac{L}{v}$ en la medida y.



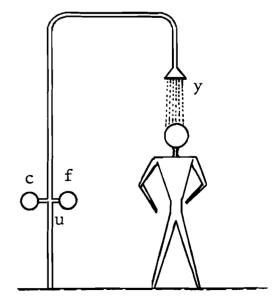
u: temperatura interna.

y: medida de la temperatura del fluído.

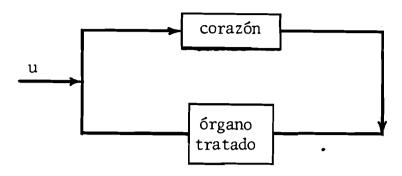
c) DUCHA:

u: posición de los robinetes del agua fría y caliente.

y: temperatura del agua.



d) INYECCION DE MEDICAMENTO:



u: dosis de medicamento inyectado

y: concentración del medicamento en el órgano tratado.

OBSERVACION:

Existe siempre un retardo cuando se necesita un dato sobre un fluído que circula. Casos particulares de esta observación son los ejemplos b),c),d).

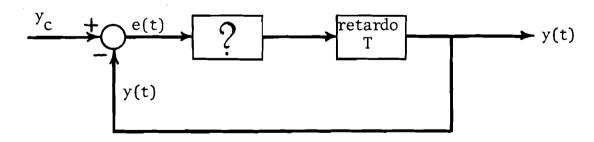
REGULACION:

El problema de la regulación consiste en elegir el control u(t) de manera que la salida y(t) se mantenga lo más cercana posible a un valor objetivo y_c constante.

Una solución sería elegir $u(t) = y_c$ con lo cual el problema estaría resuelto matemáticamente; pero presenta el inconveniente de ser muy sensible a las perturbaciones como veremos más adelante.

Otra solución consiste en tomar u(t) en función de la Señal de Error $e(t) = y_c - y(t)$ ó sea u(t) = f(e(t); t) con f a determinar.

Esto queda representado por el siguiente diagrama funcional:



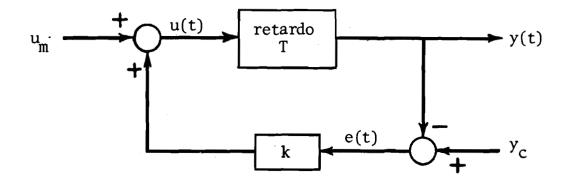
Analicemos distintas soluciones:

i) CONTROL PROPORCIONAL DEL RETARDO:

Está definido por la ley:
$$u(t) = u_m + k.e(t)$$
 donde: $u_m = cte$.

k = cte (>0) 11amada ganancia del control.

Esquemáticamente:



Teniendo en cuenta que y(t) = u(t-T), $e(t) = y_c - y(t)$ resulta:

$$e(t) + k.e(t-T) = y_c - u_m$$

que es la ecuación de la señal de error en el control proporcional.

Para que $y(t) = y_c$ (e(t) = 0) sea solución de la ecuación es condición necesaria que sea $y_c = u_m$.

Por lo tanto la ecuación queda reducida a:

$$e(t) + k.e(t-T) = 0$$
 . (I-1)

Veamos que la estabilidad depende de k.

Nos interesa averiguar el valor de k para el cual $e(t) = sen(\omega t + \varphi)$ es solución de (I-1). Para que ésto ocurra debe ser: k=1; $\omega T = \pi$.

Si llamamos con T_p el período de oscilación del error en el control proporcional entonces resulta que:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega} = 2T.$$

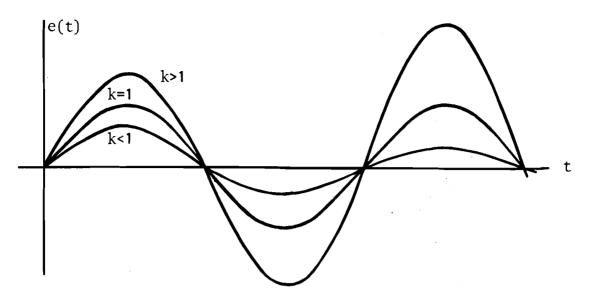
Tomando valor absoluto en (I-1) tenemos |e(t)| = k|e(t-T)|, lo cual nos indica que:

- a) $k > 1 \implies$ sistema no-estable
- b) $0 < k < 1 \implies$ sistema estable.

Señalemos que también $e(t) = (k)^{\frac{t}{T}}$. $sen(\frac{\pi t}{T} + \varphi)$ resulta solución de (I-1), como puede verificarse.

Observemos para los distintos valores de k el crecimiento y decrecimiento de la amplitud de las soluciones.

El caso k = 1 representa "la frontera" entre la estabilidad y la inestabilidad.



Analicemos la sensibilidad a las perturbaciones en el control proporcional. Supongamos que por razones exteriores la constante u_m se modifica en u_m + $\Delta\,u_m$. Con esta perturbación la ecuación del sistema es:

$$u(t) = (u_m + \Delta u_m) + k.e(t)$$

y la ecuación de la señal de error es:

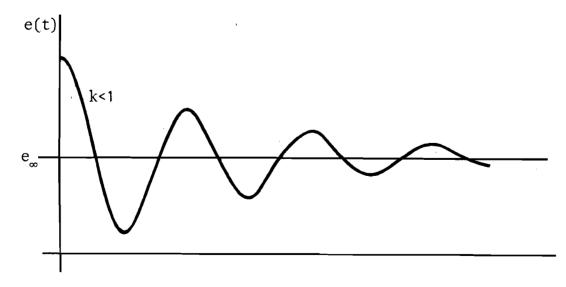
$$e(t) + k.e(t-T) = - \Delta u_m$$
 (I-2)

que es lineal no homogénea.

Una solución particular de (I-2) es la constante $e_{\infty} = -\frac{\Delta u_{m}}{1+k}$ que se $11\underline{a}$ ma error asintótico.

Por lo tanto una solución de (I-2) es:

$$e(t) = e_{\infty} + (k)^{\frac{t}{T}} \cdot sen(\frac{\pi t}{T} + \varphi)$$



Definimos el amortiguamiento a como el cociente entre 2 máximos relativos consecutivos de e(t) - e_{∞} . Por lo tanto a = k^2 .

CONCLUSION:

- a) Si queremos un comportamiento estable y amortiguado debe ser k < 1 y pequeño.
- b) Si queremos precisión del sistema, es decir el error asintótico e_{∞} pequeño, k debe ser grande.

Estas exigencias contradictorias sobre la elección de $\,k\,$ nos llevan al dilema estabilidad-precisión. ¿Qué podemos hacer?. En la práctica generalmente se toma $\,k\,$ = 1/2 resultando:

$$\begin{vmatrix} a = \frac{1}{4} \\ e_{\infty} \approx 67\% \triangle u_{m} \end{vmatrix}$$

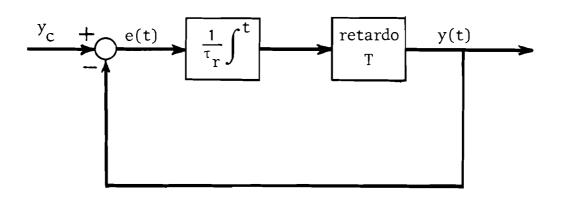
En cambio si hubiéramos hecho un control del tipo $u(t) = u_m + \Delta u_m$ (open loop) resultaría e_∞ = - Δu_m (e_∞ = 100 % Δu_m).

ii) CONTROL INTEGRAL DEL RETARDO:

Está definido por la ley:
$$u(t) = \frac{1}{\tau_r} \int_{-\tau_r}^{t} e(\alpha) d\alpha$$

donde $\tau_{\rm r}$ se llama tiempo de Integración.

Esquemáticamente:



$$y(t+T) = u(t) = \frac{1}{\tau_r} \int_{0}^{t} e(\alpha) d\alpha$$

$$e(t) = y_c - y(t) \implies \frac{de}{dt} = -\frac{dy}{dt}$$

$$-\frac{d}{dt} e(t+T) = \frac{1}{\tau_r} e(t) \implies \frac{d}{dt} e(t+T) + \frac{1}{\tau_r} e(t) = 0 \qquad (I-3)$$

(I-3) es la ecuación diferencial con retardo de la señal de error en el control integral del retardo.

Analicemos la estabilidad del sistema y su vinculación con τ_r . ¿Para qué valor de τ_r , e(t) = sen(ω t + φ) es solución?. Ello ocurre cuando $\omega \tau_r$ =1 $\omega T = \frac{\pi}{2}$.

Si T $_{\rm I}$ es el período de oscilación del error en el control integral entonces resulta T $_{\rm I}$ = $\frac{2\pi}{\omega}$ = 4T .

Analizaremos ahora lo que sucede cuando existe perturbación Δ u = cte. En este caso resulta la siguiente ecuación de error:

$$\frac{d}{dt} e(t+T) + \frac{1}{\tau_r} e(t) = 0$$

que coincide con la del sistema sin perturbaciones (I-3).

Por lo tanto en el control integral, al producirse una perturbación Δu_m = cte , el error asintótico es e_∞ = 0.

El inconveniente del control integral respecto al proporcional es que el sistema es más lento $(T_I = 2 T_p)$, pero es superior en lo concerniente a la sensibilidad a las perturbaciones constantes. De aquí surge la idea de utilizar una combinación de los 2 controles anteriores que será el:

iii) CONTROL PROPORCIONAL E INTEGRAL (P.I.) DEL RETARDO:

Consiste en aplicar un control que tenga la siguiente ley:

$$u(t) = k \cdot \left[e(t) + \frac{1}{\tau_n} \int_{-\infty}^{t} e(\alpha) d\alpha \right].$$

$$y(t+T) = u(t) = k \left[e(t) + \frac{1}{\tau_r} \int_{-\tau_r}^{\tau_r} dt e(\alpha) d\alpha \right]$$

$$como \frac{dy}{dt} = -\frac{de}{dt}$$

entonces resulta:

$$\frac{d}{dt} e(t+T) + k \frac{d}{dt} e(t) + \frac{k}{\tau_r} e(t) = 0$$
 (I-4)

que es la ecuación diferencial de la señal de error en el control P.I.

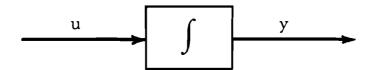
¿Para qué valores de τ_r y k es $e(t) = sen(\omega t + \varphi)$ solución de (I-4)?.

Dejamos como ejercicio verificar que ello ocurre cuando $k = -\cos \omega t$;

 τ_r = - $\frac{\cot g \ \omega T}{\omega}$, obteniéndose un período de oscilación $T_{P.I.} \cot 2T \le T_{P.I.} < 4T$ y un error asintótico e_{∞} = 0 para Δu = cte.

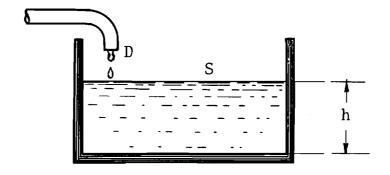
1-2. CAPACIDAD O INTEGRADOR

DEF.: Un sistema dinámico es una Capacidad o Integrador cuando $y(t) = \int_0^t u(\alpha) d\alpha$ (ó lo que es equivalente, $\frac{dy}{dt} = u$); esquemáticamente:

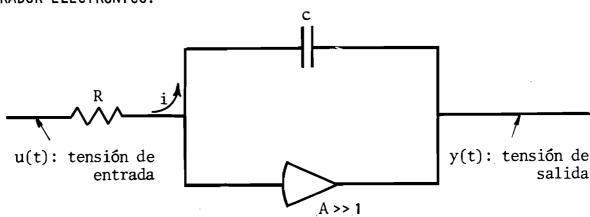


Veamos dos ejemplos que responden a esta definición:

a) El integrador más sencillo es el recipiente de sección S que recibe un cierto caudal D de agua donde la altura h del líquido sigue la siguiente ley: $h(t) = \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{t} D(\alpha) d\alpha$



b) INTEGRADOR ELECTRONICO:



$$i = \frac{u}{R} = -C \frac{dy}{dt} \implies \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot u$$
.

REGULACION PROPORCIONAL DE UNA CAPACIDAD.

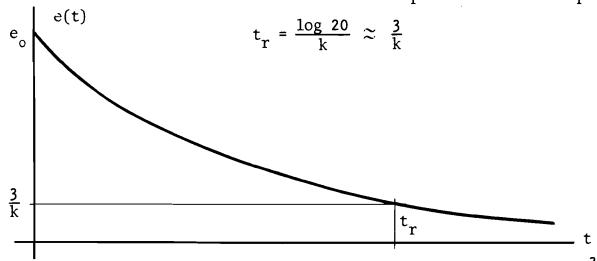
Supongamos que queremos regular una capacidad a un valor objetivo constante y_c mediante un control proporcional del tipo u(t) = k.e(t), donde $e(t) = y_c - y(t)$ es la señal de error.

Por 1o tanto

$$-\frac{d}{dt} e(t) = \frac{d}{dt} y(t) = u(t) = k \cdot e(t) \implies \frac{d}{dt} e(t) + k \cdot e(t) = 0 .$$

Integrando la ecuación diferencial, suponiendo la condición inicial $e(0) = e_o$, se tiene que $e(t) = e_o \cdot e^{-kt}$.

Se llama tiempo de respuesta al 5% al tiempo t_r en el cual $e(t_r)$ =



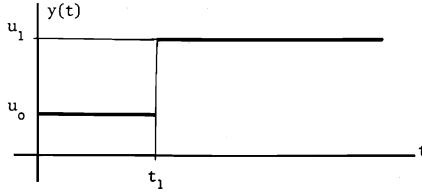
Lo deseable es que $\,k\,$ sea lo suficientemente grande para que $\,t_r^{}(\approx\frac{5}{k}\,)\,$ resulte pequeño. Pero existen varios inconvenientes para un $\,k\,$ demasiado grande:

- a) Costo elevado.
- b) El modelo matemático puede no ser representativo del sistema real.

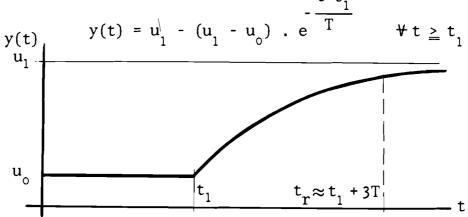
1-3. CONSTANTE DE TIEMPO

DEF.: Un sistema dinámico es una Constante de Tiempo cuando $T \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = u(t)$, donde T = cte se llama constante de tiempo.

Veamos como responde este modelo a una excitación u(t) representado por el siguiente gráfico: | y(t) |



Si partiendo de un valor de equilibrio $y(t) = u_0 + t \le t_1$, el control u(t) es llevado bruscamente al valor u_1 en el instante t_1 entonces debemos resolver: $T \frac{dy}{dt} + y(t) = u_1$; $y(t_1) = u_0$, obteniéndose como solución:

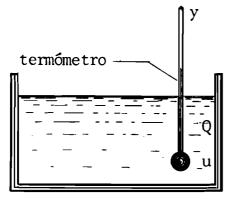


Nos interesa hallar el valor de t_r para el cual se obtiene u_l - $y(t_r)$ = 0,05 $(u_l$ - u_o) ó sea que t_r = t_l + T . log 20 \approx t_l + 3 T .

OBSERVACION:

A este sistema se lo puede considerar en forma aproximada como un modelo de retardo con 3T como período de retardo.

EJEMPLO: EL TERMOMETRO



- u: temperatura del líquido dentro del recipiente.
- y: temperatura marcada por el termómetro.
- Q: energía que pasa del líquido al ter mómetro.

Se tiene que:

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot \frac{dQ}{dt} \qquad (c = cte) ,$$

$$\frac{dQ}{dt} = k (u - y) \qquad (k = cte) ,$$

$$resultando$$

$$\frac{dy}{dt} = c k (u - y) ,$$

$$\delta sea$$

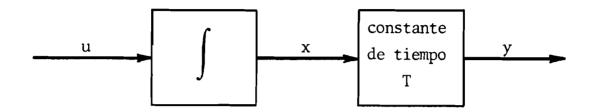
$$\frac{1}{ck} \cdot \frac{dy}{dt} + y = u ,$$

que representa un sistema dinámico que es una constante de tiempo con $T = \frac{1}{ck}$.

La regulación la estudiaremos en 1-4 como parte de un sistema más rea — lista.

1-4. CONTROL PROPORCIONAL, INTEGRAL Y DERIVADO (P.I.D.)

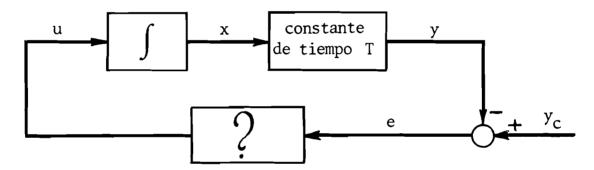
Queremos regular una capacidad $\frac{dx}{dt}$ = u cuyo out-put x se mide con un instrumento que funciona como una constante de tiempo $T \frac{dy}{dt} + y = x$.



Por lo tanto la ecuación del modelo es:

$$T \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = u .$$

¿Qué control u(t) debemos usar para obtener $y(t) \approx y_c$?.



Supondremos, sin pérdida de generalidad, $y_c = 0$.

CONTROL PROPORCIONAL:

Consiste en tomar u(t) = ke(t) = -k y(t). Por lo tanto la ecuación diferencial del sistema es:

$$T \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = 0$$
.

Queremos que $\lim_{t\to +\infty} y(t) = y_c = 0$, lo cual es equivalente a pedir que las raíces del polinomio característico tengan parte real negativa.

Para preveer ciertas condiciones, como ser estabilidad y precisión, generalmente un solo grado de libertad (que en nuestro caso es k) no basta, por lo cual consideraremos el siguiente control P.D.

CONTROL PROPORCIONAL Y DERIVADO (P.D.):

Consiste en tomar una ley de control: $u(t) = k e(t) + k' \cdot \frac{de}{dt}$ ó sea

$$u(t) = -ky(t) - k' \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (k; k' \text{ ctes}) .$$

Por lo tanto la ecuación diferencial del sistema será:

$$T \frac{d^2y}{dt^2} + (1 + k') \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = 0$$
.

De esta manera conseguimos 2 grados de libertad (que son k y k') lo que nos permite fijar arbitrariamente las raíces del polinomio característico.

CONTROL PROPORCIONAL, INTEGRAL Y DERIVADO (P.I.D.)

Consiste en tomar la siguiente ley de control:

$$u(t) = k \left[e(t) + \frac{1}{\tau_r} \int_{0}^{t} e(\alpha) d\alpha + \tau_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) \right]$$

donde:

 τ_r : se llama tiempo de integración τ_d : se llama tiempo de derivación.

I-2. SISTEMAS DINAMICOS LINEALES - REPRESENTACION EXTERNA

2-1. SISTEMA DINAMICO LINEAL Y ESTACIONARIO

con y(t) = f(u(.); t) un sistema dinámico, donde u(.) indica todos los valores asumidos por u hasta el instante t. (*)

Un sistema dinámico es lineal cuando la función f es lineal en u ,es decir

$$f(\alpha_1 u_1(.) + \alpha_2 u_2(.); t) = \alpha_1 f(u_1(.); t) + \alpha_2 f(u_2(.); t) \forall \alpha_1; \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

No es necesario que u(t) e y(t) sean escalares sino que se puede suponer u(t) e \mathbb{R}^m e y(t) e \mathbb{R}^p .

Como ejemplo de sistemas dinámicos lineales tenemos:

a)
$$\frac{dy}{dt} = u$$
 b) $y(t) = u(t-T)$ c) $T\frac{dy}{dt} + y = u$.

Se puede demostrar que en el caso de sistemas dinámicos lineales existe una función $h(t;\tau)$, llamada Respuesta al impulso ó Respuesta impulsiva

^(*) Para mayor información ver Cap. I curso de P. BERNHARD, publicación N°4 de esta misma Serie CUADERNOS.

del sistema que verifica:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t; \tau) u(\tau) d\tau$$

El nombre de $h(t;\tau)$ surge del hecho de que si tenemos un input $u(\alpha) = \delta(\alpha - \tau)$ (δ : delta de Dirac) el output resulta

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t; \alpha) u(\alpha) d\alpha = \int_{t_0}^{t} h(t; \alpha) \delta(\alpha - \tau) d\alpha = h(t; \tau).$$

También se ha visto que en los sistemas causales la respuesta impulsiva resultaba nula si el impulso se realizaba a posteriori del instante en estudio $(h(t;\tau) = 0 \quad \forall \quad t < \tau)$.

Un sistema dinámico es estacionario cuando es invariante por una trasla ción temporal (es decir: si $u(t) \rightarrow y(t)$, entonces $u(t+T) \rightarrow y(t+T)$, $\forall T$).

En este caso se tiene $h(t;\tau) = h(t+T;\tau+T) \quad \forall T$.

Por 10 tanto en un sistema lineal y estacionario $h(t;\tau) = h(t-\tau;0)$ (que notaremos $h(t-\tau)$), es decir que $h(t;\tau)$ depende de una sola varia ble que es $t-\tau$ y la salida y(t) resulta:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) u(\tau) d\tau \cos u(t) \in \mathbb{R}^{m}, y(t) \in \mathbb{R}^{p} \text{ y } h(t-\tau) \text{ matriz } p \times m.$$

Esto puede representarse como el producto de convolución y = h * u.

EJERCICIO:

Hallar $h(t-\tau)$ para los 3 ejemplos de sistemas dinámicos lineales citados anteriormente.

2-2. FUNCIONES PROPIAS DE UNA TRANSFORMACION LINEAL Y ESTACIONARIA.

Dado el sistema $y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau).u(\tau)d\tau = f(u(.);t)$, diremos que u(t) es una función propia de f cuando $\exists \ \lambda \in C$ tal que $y(t) = \lambda u(t)$. TEOREMA. Las funciones e^{st} son funciones propias de todas las transformaciones dinámicas lineales y estacionarias $\forall s \in C$.

- a) Si el sistema fuese un retardo las funciones e^{St} resultarían funciones propias \forall s \in C , tomando λ = e^{ST} , donde T es el retardo.
- b) Sea y(t) = f(u(.); t) un sistema dinámico lineal y estacionario. Consideremos $u(t) = e^{st}$ y $u_T(t) = u(t+T) = e^{sT} \cdot u(t)$.

Entonces:

$$f(u(.);t+T) = f(u_T(.);t) = f(e^{ST}.u(.);t) = e^{ST}.f(u(.);t) \ \forall \ t \ ,$$
 en particular para $t=0$ tenemos:

$$y(T) = f(u(.); T) = f(u(.); 0) \cdot e^{ST} = y(0) \cdot e^{ST}$$

Es decir que e^{sT} es una función propia de f (considerando a T como variable), valiendo este razonamiento \forall s \in C .

2-3. TRANSFORMACION DE LAPLACE. (*)

Una función f(t) y su transformada F(s) están ligadas por:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} . F(s) ds \ (**), \sigma_0 < \text{Re } s < \sigma_1$$

donde $(\sigma_0; \sigma_1)$ representa la banda de convergencia de F(s)

Esta última relación expresa a f(t) como combinación lineal de las funciones e^{st} ; de aquí la utilidad que brinda para el estudio de sistemas lineales la transformación de Laplace.

Veamos algunas interpretaciones de $h(t-\tau)$:

a) para cualquier sistema lineal y estacionario:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau = (h*u)(t) .$$

Entonces $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$ donde,

$$y(s) = \mathcal{L}(y(t))$$

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t))$$

 $H(s) = \mathcal{L}(h(t))$ 11 amada función de transferencia del sistema.

b) Supongamos que excitamos un sistema lineal, estacionario y estable con una entrada armónica u(t) = j(t). sen ωt donde:

$$j(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 0 \\ 1 & \text{si} & t \ge 0 \end{cases}$$
 es la función de Heaviside .

Por ser el sistema estable se verifica $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$, lo cual equi

- (*) Para mayor información ver Cap. I curso de P. BERNHARD, publicación N°4 de esta misma serie CUADERNOS.
 - (**) i es el complejo que verifica $i^2 = -1$

vale a que los polos de H(s) tengan parte real negativa.

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \frac{\omega}{s^{2} + \omega^{2}}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = H(s) \cdot \frac{\omega}{s^{2} + \omega^{2}} = H_{1}(s) + \frac{H(i\omega)}{2i} + \frac{H(-i\omega)}{2i}$$

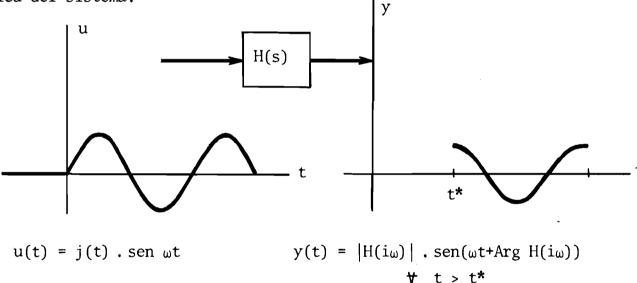
$$S - i\omega + \frac{H(-i\omega)}{s + i\omega}$$
(I-5)

donde $H_1(s)$ es la parte del desarrollo en fracciones simples que contiene a los polos de H(s); por lo tanto $\lim_{t \to +\infty} h_1(t) = \lim_{t \to +\infty} \mathcal{L}^{-1}(H_1(s)) = 0$.

Anti-transformando (I-5) resulta:

$$y(t) = j(t) \cdot |H(i\omega)| \cdot sen(\omega t + Arg H(i\omega)) + h_1(t)$$
,

es decir que hemos obtenido una respuesta que con el correr del tiempo "se hace" armónica, siendo $|H(i\omega)|$ y Arg $H(i\omega)$ la amplitud y la fase armónica del sistema.



2-4. REPRESENTACION ESQUEMATICA DE SISTEMAS LINEALES

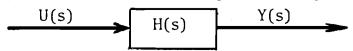
Existen dos formas de representar esquemáticamente a los sistemas line \underline{a} les:

- (i) por diagrama funcional
- lii) por diagrama de flujo

En principio no aportan más información que un conjunto de relaciones matemáticas; pero su ventaja reside en que podemos ver la estructura y las relaciones de causa y efecto presentes en el sistema.

i) DIAGRAMA FUNCIONAL:

La relación Y(s) = H(s). U(s) está representada gráficamente por:



Las reglas para la representación son las siguientes:

Símbolo	Significado
U	Variable Ü
Н	Transformación lineal con la función de transferencia H
U ₂ Y	Sumador Y = U ₁ - U ₂ + U ₃ La variable de salida es igual a la suma algebraica de las va riables de entradas afectadas cada una con el signo indicado.

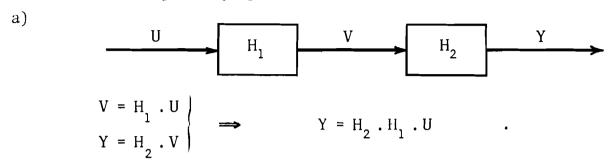
ii) DIAGRAMA DE FLUJO:

Las reglas para la representación son las siguientes:

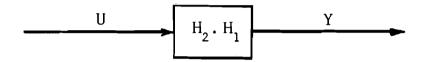
Símbolo	Significado
U O	Variable U
U H Y	Transformación lineal Y = H . U
$\begin{array}{c} U_1 \\ H_2 \\ \end{array}$	Sumador $Y = H_1 U_1 + H_2 U_2 + H_3 U_3$

ALGEBRA DE MANIPULACION DE LOS DIAGRAMAS FUNCIONAL Y DE FLUJO:

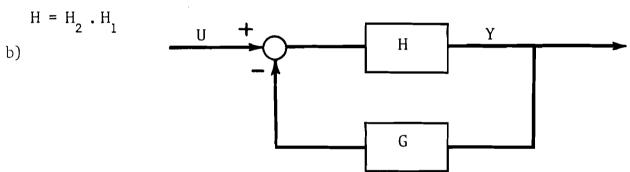
Lo que se tratará es, usando las reglas de cada diagrama, transformar un sistema en otro equivalente cuya representación gráfica sea más sencilla.Para ello veamos algunos ejemplos:



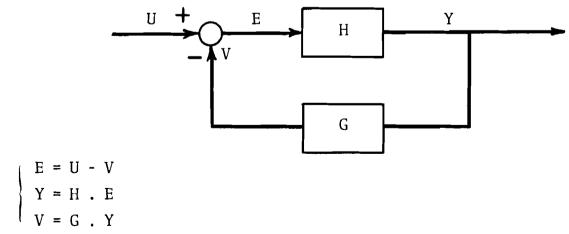
Por lo tanto el sistema equivalente es:



O sea que la función de transferencia del nuevo sistema (equivalente)es:

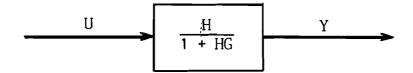


Para poder manipularlo matemáticamente conviene agregar algunas variables intermedias, como ser E y V .

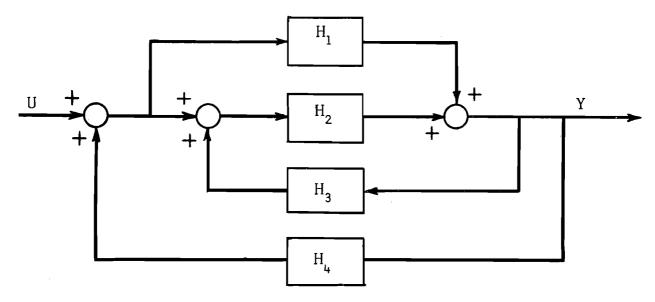


$$Y = H \cdot E = H(U-V) = H(U-GY) \implies (1+HG)Y = H \cdot U \implies Y = \frac{H}{1+HG}U$$
.

Por lo tanto el sistema equivalente es:



c) Dejamos como ejercicio hallar el sistema equivalente de:



d) Veamos cual es el diagrama funcional y de flujo de la regulación propor cional del retardo.

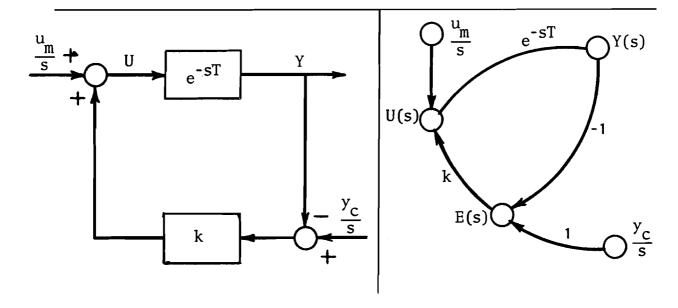
$$u(t) = k \cdot e(t) + u_{m} \qquad \Longrightarrow \qquad U(s) = k \cdot E(s) + \frac{u_{m}}{s}$$

$$e(t) = y_{c} - y(t) \qquad \Longrightarrow \qquad E(s) = \frac{y_{c}}{s} - Y(s)$$

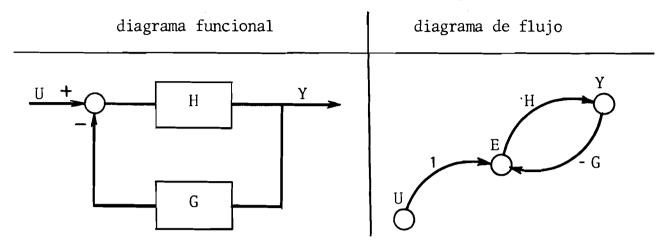
$$Y(s) = e^{-sT} \cdot U(s)$$

diagrama funcional

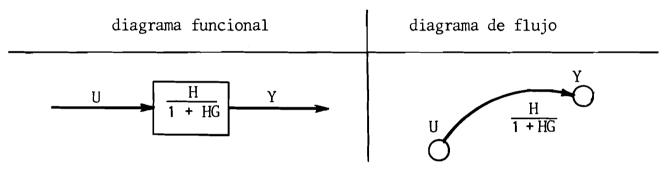
diagrama de flujo



e) La representación gráfica del feed-back es la siguiente:

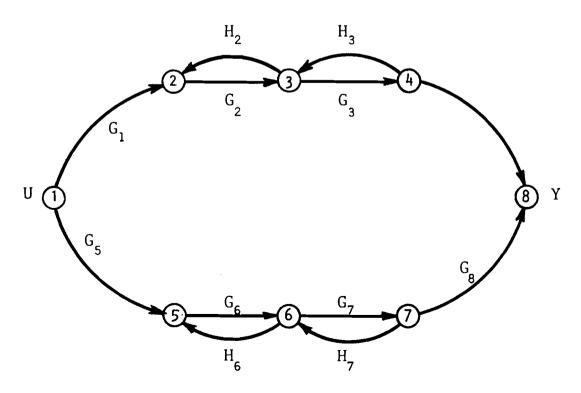


que según vimos en el ejemplo b) el sistema equivalente es:



REGLA DE MASON:

Si un diagrama es complicado, también lo será describirlo matemáticamen te; para esos casos resulta útil la llamada Regla de Mason (*), que iremos presentando sobre el siguiente ejemplo:



(*) Ver R. DORF 'Modern Control System', pág. 48-51 .

El objetivo es hallar $H = \frac{Y}{U}$, o sea la función de transferencia delsistema equivalente al dado. Según la regla de Mason:

$$H = \frac{\sum_{k} P_{k} \Delta_{k}}{\Lambda}$$

donde la sumatoria debe realizarse sobre todos los caminos distintos del dia grama que unen U con Y. Llamamos camino a una sucesión de curvas (líneas) donde cada punto del mismo es recorrido una sola vez.

En nuestro ejemplo existen dos caminos que unen U con Y ; ellos son:

 P_k : es el producto de todas las funciones de transferencia que están sobre el camino k:

$$P_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4$$

 $P_2 = G_5 \cdot G_6 \cdot G_7 \cdot G_8$

Sea L_i la ganancia del bucle i del sistema:

$$\begin{cases} L_1 = G_2 \cdot H_2 \\ L_2 = G_3 \cdot H_3 \\ L_3 = G_6 \cdot H_6 \\ L_4 = G_7 \cdot H_7 \end{cases}$$

 Δ = 1 - \sum (ganancias de los bucles) + \sum (producto de las ganancias de 2 bucles no contiguos) - \sum (producto de las ganancias de 3 bucles no contiguos) +

Δ es llamado el determinante del gráfico.

Por 1o tanto:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4) .$$

 $^{\Delta}_{\ k}$: es el determinante del gráfico sin los bucles que tienen puntos en común con el camino $\ k$.

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4) \\ \Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2) \end{cases} .$$

O sea que la función de transferencia del sistema equivalente al dado resulta ser:

$$H = \frac{P_{1}\Delta_{1} + P_{2}\Delta_{2}}{\Delta} = \frac{G_{1}G_{2}G_{3}G_{4}\left[1 - (G_{6}H_{6} + G_{7}H_{7})\right] + G_{5}G_{6}G_{7}G_{8}\left[1 - (G_{2}H_{2} + G_{3}H_{3})\right]}{1 - (G_{2}H_{2} + G_{3}H_{3} + G_{6}H_{6} + G_{7}H_{7}) + (G_{2}H_{2}G_{6}H_{6} + G_{2}H_{2}G_{7}H_{7} + G_{3}H_{3}G_{6}H_{6} + G_{3}H_{3}G_{7}H_{7})}$$

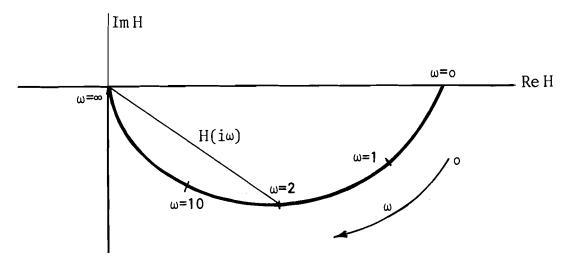
2-5. REPRESENTACION GRAFICA DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA

Sabemos que $\frac{U}{H}$ representa la relación $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$, donde H(s) es la función de transferencia del sistema.

Queremos representar H(s) que es una función compleja de variable compleja; para ello necesitamos un espacio de 4 dimensiones. Como H(s) = $\mathcal{L}(h(t))$ es una función holomorfa en su respectiva banda de convergen—cia, para caracterizarla basta conocer los valores de H(s) sobre una curva cerrada del plano complejo, por ejemplo el eje Im s.

Observemos que $H(\overline{s}) = \overline{H(s)}$, por lo cual es suficiente representar $H(i\omega)$ para $\omega \ge 0$; para ello expondremos los siguientes diagramas:

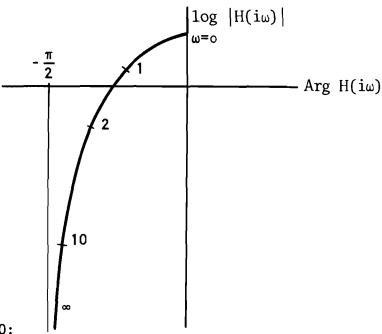
i) DIAGRAMA DE NYQUIST:



ii) DIAGRAMA DE BLACK:

Consiste en representar $\,H(\,i\omega)\,$, variando $\,\omega\,$ de 0 a + $\!\infty\,$, en el pla no log $\,H(\,i\omega)\,$, teniendo en cuenta que:

$$\log H(i\omega) = \log |H(i\omega)| + i \operatorname{Arg} H(i\omega)$$



iii) DIAGRAMA LOGARITMICO:

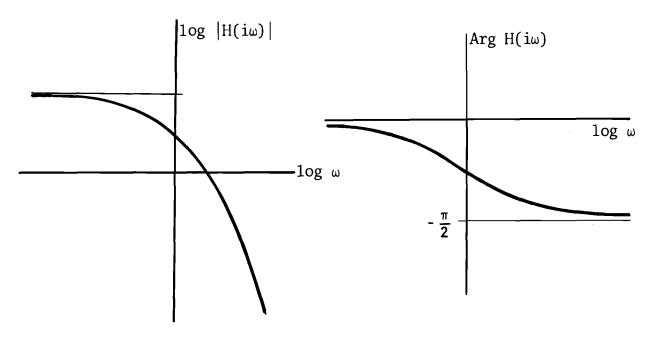
Consiste en representar $\,H(i\omega)\,$, variando $\,\omega\,$ de $\,0\,$ a $\,+\,\infty\,$, mediante las 2 curvas siguientes:

a) Curva de Amplitud:

 $\log |H(i\omega)|$ referido a $\log \omega$.

b) Curva de Fase:

Arg $H(i\omega)$ referido a $\log \omega$.



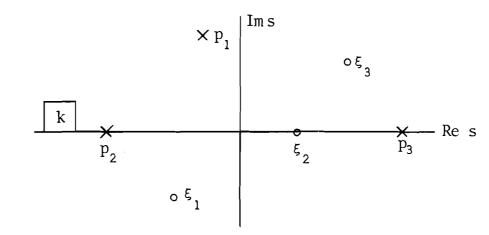
iv) DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS:

Se utiliza en el caso en que H(s) es una función racional en la varia ble compleja s; es decir:

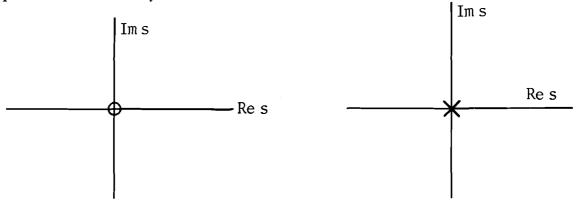
$$H(s) = k \cdot \frac{(s - \xi_1) \cdot ... \cdot (s - \xi_m)}{(s - p_1) \cdot ... \cdot (s - p_n)}$$

El método consiste en representar en el plano complejo s la posición de sus ceros (o) y la de sus polos (x), destacando en el diagrama la cons

tante k.



Se puede verificar que:



son las representaciones de un sistema derivado e integral respectivamente.

EJERCICIO:

Hallar las 4 representaciones para:

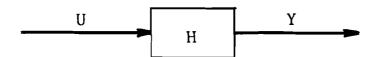
- a) La constante de tiempo.
- b) Sistemas cuyas funciones de transferencias sean:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

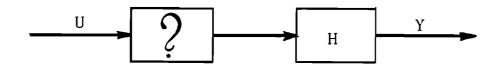
con ω_n = cte y ξ parámetro.

2-6. SENSIBILIDAD DE LOS SERVOMECANISMOS.

Supongamos tener un sistema dinámico lineal con función de transferencia $\mbox{H}(\mbox{s})$.



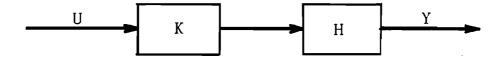
¿Qué regulación debemos realizar para que la función de transferencia T(s) del nuevo sistema sea aproximadamente 1?. (Deseamos que $y \approx u$).



Esta condición es válida en general para un cierto dominio de frecuencias especificadas, por ejemplo $\omega \in (0; \Omega)$.

i) SOLUCION SIN BUCLE:

Consideremos el sistema



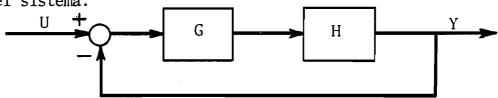
con K(s) a determinar de modo que:

$$t_1 = H . K \approx 1$$
 $\forall \omega \in (0; \Omega)$

ii) SOLUCION CON BUCLE:

ó sea

Consideremos el sistema:



con G(s) a determinar de manera que:

$$T_2 = \frac{H \cdot G}{1 + H \cdot G} \approx 1 \qquad \forall \qquad \omega \in (0; \Omega)$$

$$H(s) \cdot G(s) >> 1 \qquad \forall \qquad \omega \in (0; \Omega) .$$

Hasta ahora el problema fue resuelto matemáticamente; pero es importante saber qué sucede cuando se producen variaciones en H(s), es decir cuando existen perturbaciones.

Analizaremos como varía T(s) ante variaciones de H(s); pretendemos que variaciones de H(s) no generen grandes variaciones de T(s), o sea que S sea pequeño; definiendo S como:

S = $\frac{H}{T}$. $\frac{\partial T}{\partial H}$ 11amada función de sensibilidad respecto a las variaciones de H .

Calculemos la función de sensibilidad en los 2 casos:

i)
$$T_1 = H \cdot K$$
 \Longrightarrow $S_1 = \frac{H}{T_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial H} = 1$

ii)
$$T_2 = \frac{H \cdot G}{1 + H \cdot G} \implies S_2 = \frac{H}{T_2} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial H} = \frac{1}{1 + H \cdot G} << 1$$

OBSERVACION:

Comparando los casos i) y ii) se puede apreciar la importancia de los bucles en los problemas de la Teoría del Control.

2-7. PROPIEDADES DE SEGUNDO ORDEN DE LOS SISTEMAS LINEALES

Llamamos así aquellas propiedades que se expresan en términos de y^2, u^2 e y u .

a) SEÑALES DE ENERGIA FINITA:

Sea f(t) una función escalar.

Diremos que f es una Señal de Energía Finita cuando

$$E_{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^{2} dt < +\infty \qquad (\iff f \in L^{2}(R))$$

Para una señal de energía finita f se define la Función de Correlación

$$C_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) \cdot f(t)dt$$
.

OBSERVACION:

a)
$$C_{ff}(0) = \int_{0}^{+\infty} (f(t))^2 dt = E_f$$

b) Si designamos con \tilde{f} la función: $\tilde{f}(t) = f(-t)$, entonces resulta: $C_{ff} = f * \tilde{f}$

Para una señal de energía finita $\,f\,$ se define el Espectro de Energía $\,\phi_{\hbox{\it ff}}\,$ como la transformada de Laplace de $\,C_{\hbox{\it ff}}\,$; ó sea:

$$\phi_{ff}(s) = \mathcal{L}(C_{ff}(t))$$
.

Además, teniendo en cuenta que $\mathscr{L}(\mathbf{f}(\mathsf{t}))$ = F(-s), resulta:

$$\phi_{ff}(s) = F(s) \cdot F(-s) \cdot$$

PROPIEDADES DE LA FUNCION DE CORRELACION C_{ff} :

- i) C_{ff} es simétrica, es decir: $C_{ff}(-\tau) = C_{ff}(\tau)$.
- ii) C_{ff} es una función de tipo real positivo, es decir:

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$
 $\forall \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{R}$
 $\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j C_{ff}(\tau_i - \tau_j) \ge 0$

iii)
$$E_f = C_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ff}(i\omega) d\omega$$
.

PROPIEDADES DEL ESPECTRO DE ENERGIA ϕ_{ff} :

i)
$$\phi_{ff}(\overline{s}) = \overline{\phi_{ff}(s)}$$

ii) ϕ_{ff} es simétrica, es decir: $\phi_{ff}(-s) = \phi_{ff}(s)$.

iii)
$$\phi_{ff}(i\omega) = F(i\omega).F(-i\omega) = F(i\omega).\overline{F(i\omega)} = |F(i\omega)|^2 \ge 0 \quad \forall \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Sean y,u señales de energía finita; entonces se define la Función de Correlación Cruzada por: $C+\infty$

$$C_{yu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)u(t)dt$$

y el Espectro Cruzado por:

$$\phi_{yu}(s) = \mathcal{L}(C_{yu}(t))$$

Mediante un procedimiento similar a 10 hecho anteriormente se tiene:

$$\phi_{vu}(s) = Y(s) \cdot U(-s)$$

OBSERVACION:

Todo lo anterior se puede generalizar considerando funciones vectoria—les de variable real; definiendo para $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} C_{yu} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau).u'(t)dt &: \text{ Función de Correlación Cruzada} \\ \phi_{yu}(s) = \mathcal{L}(C_{yu}(t)) = Y(s).U'(-s): \text{ Espectro Cruzado.} \end{cases}$$

donde u' es la traspuesta de u ; \boldsymbol{C}_{yu} , $\boldsymbol{\phi}_{yu}$ matrices $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{m}$.

Supongamos tener 2 sistemas lineales:

de los cuales conocemos la función de correlación cruzada de las entradas $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$; es decir $\mathbf{\phi}_{\mathbf{u_1} \mathbf{u_2}}$.

¿Podremos saber algo sobre la función de correlación cruzada de las sa lidas, $\phi_{y_1y_2}$?.

$$\phi_{y_1 y_2}(s) = Y_1(s) \cdot Y_2'(-s) = (H_1(s) \cdot U_1(s)) \cdot (H_2(-s) \cdot U_2(-s))' = H_1(s) \cdot U_1(s) \cdot U_2'(-s) \cdot H_2(-s) = H_1(s) \cdot \phi_{u_1 u_2}(s) \cdot H_2'(-s) .$$

0 sea:

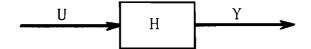
$$\phi_{y_1, y_2}(s) = H_1(s) \cdot \phi_{u_1, u_2}(s) \cdot H_2'(-s)$$
.

Además antitransformando, resulta:

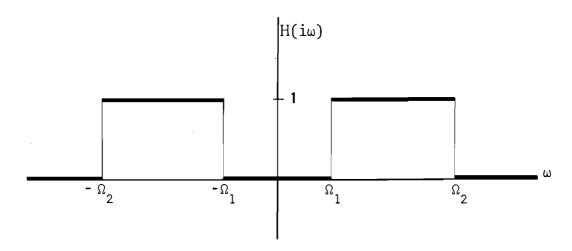
$$C_{y_1y_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}(\phi_{y_1y_2}(s)) = h_1(t) * C_{u_1u_2}(t) * h'_2(-t)$$
.

Para dar una interpretación física del espectro de energía, consideremos el siguiente ejemplo llamado filtro pasabandas.

Sea un sistema dinámico lineal donde H(s) , función de transf \underline{e}



rencia del sistema, tiene la siguiente representación gráfica:



Supongamos que ϕ_{uu} es conocido.

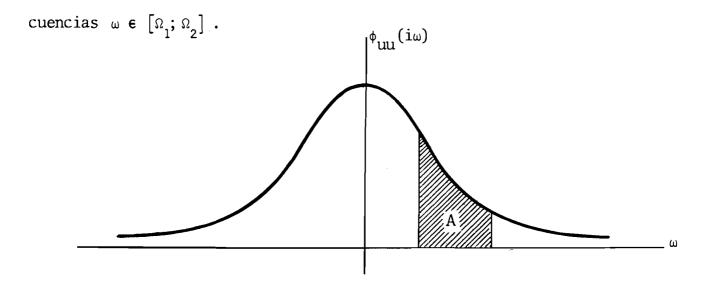
Como $\phi_{yy}(s) = H(s) \cdot \phi_{uu}(s) \cdot H'(-s)$ entonces resulta:

$$\phi_{yy}(i\omega) = H(i\omega) \cdot \phi_{uu}(i\omega) \cdot H(-i\omega) = H(i\omega) \cdot H(i\omega) \cdot \phi_{uu}(i\omega) = |H(i\omega)|^2 \cdot \phi_{uu}(i\omega).$$

Por 1o tanto:

$$E_{y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{yy}(i\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^{2} \phi_{uu}(i\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{1}}^{\Omega_{2}} \phi_{uu}(i\omega) d\omega.$$

O sea que: $E_y=\frac{A}{\pi}$, donde $A=\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\phi_{uu}(i\omega)d\omega$ puede interpretarse como la contribución a la energía total de la señal u debido a las fre-



b) SEÑALES DE POTENCIA FINITA:

Una función escalar f(t) es una Señal de Potencia Finita cuando

$$P_{ff} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt < +\infty .$$

Además se define:

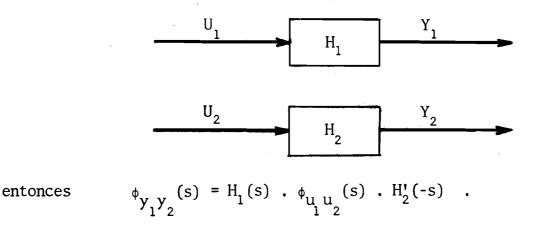
$$\begin{split} &C_{\mathrm{ff}}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t+\tau) \; . \; f(t) \mathrm{d}t \quad \text{Función de Correlación} \\ &\phi_{\mathrm{ff}}(s) = \; \mathscr{L}(C_{\mathrm{ff}}(t)) \quad \text{Espectro de Potencia.} \end{split}$$

OBSERVACION:

i) Si f es una señal de energía finita, entonces f es una señal de potencia cero (P_{ff} = 0) .

tencia cero (P
$$_{ff}$$
 = 0) .
ii) P $_{ff}$ < + ∞ \Longrightarrow $\left| C_{ff}(\tau) \right|$ < + ∞ \forall τ . (*)

iii) Sean 2 sistemas dinámicos lineales:



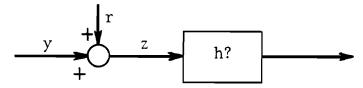
(*) N. Wiener, "The Fourier Integral and its Applications" Dover.

EJEMPLO: FILTRO ADAPTADOR.

Queremos detectar la presencia de una señal y en una señal disponible

$$z = y + r$$

donde r es un ruido de espectro $\phi_{rr}(i\omega)$



Suponemos que la señal y finaliza en el instante T $(y(t) = 0 \forall t > T)$ y queremos que el cociente

sea máximo.

señal transmitida al instante $T = h * y(T) = \frac{1}{2\pi} \int H(i\omega)y(i\omega)e^{i\omega T} d\omega$. valor cuadrático del ruido = $\frac{1}{2\pi} \int |H(i\omega)|^2 \phi_{rr}(i\omega)d\omega$.

Por la desigualdad de Schwartz obtenemos:

$$|h * y(T)|^2 = |\frac{1}{2\pi} \int H(i\omega) \frac{y(i\omega)e^{i\omega T}}{\phi_{rr}(i\omega)} \phi_{rr}(i\omega)d\omega|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{\pi}} \int |H(i\omega)|^2 \phi_{rr}(i\omega) d\omega \cdot \int \left| \frac{y(i\omega)e^{i\omega T}}{\phi_{rr}(i\omega)} \right|^2 \phi_{rr}(i\omega) d\omega$$

valiendo el igual sólo si:

$$H(i\omega) = k \left(\frac{y(i\omega) \cdot e^{i\omega T}}{\phi_{rr}(i\omega)}\right)$$
 con k constante compleja.

Obviamente ésta es la función de transferencia del filtro adaptador.

I-3. REPRESENTACION INTERNA - SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES.

INTRODUCCION:

La Representación Interna de un sistema dinámico lineal está dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t) \cdot x(t) + G(t) \cdot u(t) \\ y(t) = H(t) \cdot x(t) + J(t) \cdot u(t) \end{cases}$$
 (I-5)

donde: $x \in \mathbb{R}^n$; $y \in \mathbb{R}^p$; $u \in \mathbb{R}^m$; F matriz $n \times n$; G matriz $n \times m$; H matriz $p \times n$; J matriz $p \times m$.

Sea $\Phi(t;t_0)$ la Matriz Fundamental del sistema de ecuaciones lineales

homogéneo: $\dot{x}(t) = F(t).x(t)$; es decir $\Phi(t;t_0)$ es una matriz $n \times n$ que verifica las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi(t; t_0) = F(t).\Phi(t; t_0) \\ \Phi(t_0; t_0) = I \text{ (matriz unidad } n \times n) \end{cases}$$

Por lo tanto la solución general del sistema lineal no homogéneo viene da da por:

$$x(t) = \Phi(t; t_0).\xi + \int_{t_0}^{t} \Phi(t; \alpha).G(\alpha).u(\alpha)d\alpha$$

$$\cos \xi = x(t_0).$$

OBSERVACION:

$$\begin{aligned} x(t_o) &= \xi = 0 \implies x(t) = \int_t^t \Phi(t;\alpha).G(\alpha).u(\alpha)d\alpha \implies \\ y(t) &= J(t).u(t) + \int_t^t H(t).\Phi(t;\alpha).G(\alpha).u(\alpha)d\alpha \end{aligned} .$$

Si consideramos un impulso $u(t) = \delta(t-\beta)$, y recordamos que

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t; \alpha).u(\alpha)d\alpha$$

entonces resulta:

$$y(t) = h(t; \beta) = H(t).\Phi(t; \beta).G(\beta) + J(t).\delta(t-\beta) . \qquad (I-6)$$

CASO ESTACIONARIO:

El sistema dinámico lineal (I-5) se dice *Estacionario* cuando las matrices F,G,H,J no dependen del tiempo, es decir si son matrices constantes.

En el caso estacionario la matriz fundamental adopta una forma muy parti-

$$\Phi(t;t_{0}) = e^{F(t-t_{0})} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t-t_{0})^{k}}{k!} \cdot F^{k}$$

CALCULO DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA DE UN SISTEMA LINEAL ESTACIONARIO

a) En el caso estacionario (I-6) adopta la siguiente forma:

Transformando (I-7) obtenemos como función de transferencia:

$$\mathscr{L}(h(t)) = H \cdot (s I - F)^{-1} \cdot G + J$$

b) Transformando el sistema:
$$\begin{cases} \dot{x} = F.x + G.u \\ y = H.x + J.u \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

tenemos:

$$\begin{cases} s X(s) - x(0) = F \cdot X(s) + G \cdot U(s) \\ Y(s) = H \cdot X(s) + J \cdot U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s I-F) \cdot X(s) = G \cdot U(s) + \xi \\ Y(s) = H \cdot X(s) + J \cdot U(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = (s I-F)^{-1} \cdot G \cdot U(s) + (s I-F)^{-1} \cdot \xi \\ Y(s) = H \cdot X(s) + J \cdot U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = H \cdot (s I-F)^{-1} \cdot G \cdot U(s) + H \cdot (s I-F)^{-1} \cdot \xi + J \cdot U(s) \Rightarrow Y(s) = [H \cdot (s I-F)^{-1} \cdot G + J] \cdot U(s) + H \cdot (s I-F)^{-1} \cdot \xi \end{cases}$$

Para el caso en que $x(0) = \xi = 0$, entonces tenemos:

$$Y(s) = [H . (s I-F)^{-1} . G + J] . U(s)$$

o sea que la función de transferencia del sistema es:

$$\mathscr{L}(h(t)) = H \cdot (s \mathbb{I}-F)^{-1} \cdot G + J$$

3-1. CONTROLABILIDAD (*)

Sea el sistema dinámico diferencial lineal (I-5):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t) \cdot x(t) + G(t) \cdot u(t) \\ y(t) = H(t) \cdot x(t) + J(t) \cdot u(t) \end{cases}$$

Nos preguntamos si de cualquier estado ξ podemos ir a cualquier estado η ; es decir si es posible de cualquier estado inicial ξ en el to ir a cualquier otro estado η en un tiempo futuro oportuno.

El sistema (I-5) es *Controlable* en t_o cuando para todo par de estados ξ ; η existen T y una función de control $u(t_o$; T) tal que:

$$\xi \xrightarrow{u(t_{o}; T)} \eta ;$$
vale decir:
$$\eta = \Phi(T; t_{o}) . \xi + \int_{t_{o}}^{T} \Phi(T; \alpha) . G(\alpha) . u(\alpha) d\alpha .$$

Si esto no sucede el sistema se dirá no controlable en $t_{\rm o}$. Las condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad están dadas por los siguientes teoremas:

^(*) Para mayor información ver Cap. I, curso de P. BERNHARD, publicación $N^{\circ}4$ de esta misma Serie CUADERNOS.

TEOREMA 1 (CRITERIO DE CONTROLABILIDAD).

El sistema dinámico diferencial lineal (I-5) es controlable en t si y

solo sí la matriz
$$\mathcal{O}(t;t_{o}) = \int_{t_{o}}^{t} \Phi(t;\alpha) \cdot G(\alpha) \cdot G'(\alpha) \cdot \Phi'(t;\alpha) d\alpha$$
es desimida positiva

es definida positiva.

OBSERVACION:

Una matriz A es definida positiva (A > 0) cuando la forma cuadrática asociada $\varphi(x) = x'Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$.

A es semi-definida positiva $(A \ge 0)$ cuando $\varphi(x) = x'Ax \ge 0$ **∀**x.

Queda así definida la siguiente relación de orden:

$$A > B (A \ge B) \iff A - B > 0 (A - B \ge 0)$$
.

TEOREMA 2 (CRITERIO DE CONTROLABILIDAD PARA EL CASO ESTACIONARIO)

El sistema (I-5) estacionario es controlable sí y solo sí la matriz $\mathcal{C} = ((G)(FG) \dots (F^{n-1} \cdot G))$

tiene rango n (o sea rango máximo).

3-2. OBSERVABILIDAD:

Consideremos el siguiente sistema dinámico lineal:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t) \cdot x(t) \\ y(t) = H(t) \cdot x(t) \end{cases}$$
 (I-8)

El sistema (I-8) se dirá observable en el instante t_0 si conociendo la salida $y(t_0;T)$ podemos determinar el estado inicial del sistema $x(t) = \xi$; en cuyo caso será:

$$y(t) = H(t) \cdot \Phi(t; t_0) \cdot \xi$$

En este caso los criterios vienen dados por los siguientes teoremas:

TEOREMA 1 (CRITERIO DE OBSERVABILIDAD).

El sistema (I-8) es observable en t_0 sí y solo sí la matriz

$$O(t;t_{o}) = \int_{t_{o}}^{t} \Phi'(\alpha;t_{o}).H'(\alpha).H(\alpha).\Phi(\alpha;t_{o}) d\alpha$$

es definida positiva.

TEOREMA 2 (CRITERIO DE OBSERVABILIDAD PARA EL CASO ESTACIONARIO).

El sistema (I-8) estacionario es observable en t_0 sí y solo sí la m \underline{a} triz:

$$0 = \left(\begin{array}{c} \underbrace{H} \\ \underbrace{HF} \\ \vdots \\ \underbrace{HF}^{n-1} \end{array}\right)$$

tiene rango n (ó sea rango máximo).

I-4. ESTABILIDAD Y COMPENSACION.

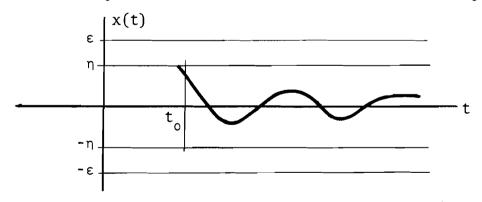
Antes de definir matemáticamente las distintas clases de estabilidad di remos (intuitivamente) que un sistema es estable respecto a una trayecto—ria cuando a pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales corres—ponden pequeños cambios de la trayectoria.

4-1. ESTABILIDAD DE LIAPUNOV.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x;t)$, donde sin pérdida de generalidad supondremos que f(0;t) = 0 ó sea que podemos elegir x(t) = 0 \forall t como trayectoria de referencia.

i) DEFINICION:

El sistema $\dot{x} = f(x;t)$ es estable en el sentido de Liapunov (L-estable) con respecto a la trayectoria x(t) = 0 cuando $\forall t$, $\forall \epsilon > 0$ $\exists n > 0$ tal que si ||x(t)|| < n entonces $||x(t)|| < \epsilon$ $\forall t > t$.



Una noción de estabilidad mucho más fuerte consiste en exigir que el sistema retorne hacia la trayectoria x(t) = 0 asintóticamente.

ii) DEFINICION:

El sistema $\dot{x} = f(x;t)$ es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov (L-estable asintótico) con respecto a la trayectoria x(t) = 0 cuando se verifican las siguientes condiciones:

a) el sistema $\dot{x} = f(x;t)$ es L-estable.

b)
$$\forall t_0$$
 $\exists R$ tal que si $||x(t_0)|| < R$ entonces $\lim_{t \to +\infty} ||x(t)|| = 0$.

Además si R y η son independientes del instante t_0 , es decir existen R y η válidos $\forall t_0$, entonces la L-estabilidad asintótica se dice uniforme.

4-2. METODO DE LIAPUNOV.

DEFINICION: $\alpha : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase k cuando se ver<u>í</u> fican:

i) α es continua, monótona no decreciente.

ii)
$$\alpha(x) \ge 0 \quad \forall x \ge 0 \quad y \quad \alpha(x) = 0 \iff x = 0$$
.

El método de Liapunov es un método general que permite establecer la estabilidad de un sistema diferencial cualquiera $\dot{x} = f(x;t)$ con f(0;t)=0. Consiste en poner en evidencia para el sistema una función escalar V(x;t) llamada función de Liapunov.

DEFINICION: V(x;t) es una función de Liapunov para el sistema $\dot{x} = f(x;t)$ cuando se verifican las siguientes condiciones:

- a) V(x;t) es positiva en el sentido de Liapunov, es decir:
 - i) V(0;t) = 0
 - ii) $\exists \alpha; \beta$ funciones de clase $k / \alpha(||x||) \leq V(x;t) \leq \beta(||x||) \forall t$

b)
$$\exists W(x;t) = \frac{d}{dt} V(x;t) = \frac{\partial}{\partial x} V(x;t)\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t} = V_x \cdot f + V_t$$

Enunciaremos 2 teoremas de Liapunov que nos darán una condición suficien te para que el sistema sea L-estable y L-estable asintótico.

1°TEOREMA DE LIAPUNOV.

Si existe V(x;t) función de Liapunov para el sistema $\dot{x}=f(x;t)$ con $W(x;t)\leq 0$ \forall x \forall t , entonces el sistema es L-estable.

2°TEOREMA DE LIAPUNOV.

Si existe V(x;t) función de Liapunov para el sistema $\dot{x}=f(x;t)$ con $W(x;t) \leq -\gamma(||x||)$, donde γ es una funcion de clase k, entonces el sistema es L-estable asintótico.

Para interpretar mejor estos teoremas veamos algunos ejemplos:

a) Sea la ecuación diferencial de 2° orden $\ddot{x}_1 + g(x_1) = 0$, donde g es una función continua que verifica $m_1x_1 \le g(x_1) \le m_2x_1$.

El sistema equivalente es:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_1)$$
Consideremos
$$G(x_1) = \int_0^{x_1} g(\alpha) d\alpha \ge 0 \quad \forall x_1.$$

Entonces $V(x;t) = G(x_1) + \frac{x^2}{2}$ es una función de Liapunov.

b) ECUACION DE VAN DER POOL:

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 = 0$$
 , con $\varepsilon > 0$.

El sistema equivalente está dado por:

$$\begin{vmatrix}
\dot{x}_1 &= & x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \\
V(x; t) &= \frac{||x||^2}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \quad \text{resulta ser una función de Liapunov.}$$

Además
$$W(x;t) = \frac{d}{dt} V(x;t) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -\epsilon(1 - x_1^2) x_2^2$$
.

Considerando $|x_1| < 1$, tenemos $W(x;t) \le 0$.

Entonces por 1º Teorema de Liapunov el sistema es L-estable.

TEOREMA:

Sea el sistema $\dot{x} = f(x)$, con f(0) = 0.

Si existe $V(x\,;\,t)$ función de Liapunov, siendo $W(x\,;\,t) \leq 0$, si Γ es el mayor ciclo límite contenido en $R=\{x\,/\,W(x)=0\}$, entonces las trayectorias tienden a Γ .

Veamos una aplicación de este teorema.

Sea la ecuación diferencial $\ddot{x}_1 + a\dot{x}_1 + 2bx_1 + 3x_1^2 = 0$, con a; b > 0. El sistema equivalente está dado por:

$$\dot{x}_{1} = x_{2}$$
 $\dot{x}_{2} = -2bx_{1} - 3x_{1}^{2} - ax_{2}$

Los estados de equilibrio son:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \qquad x = \begin{pmatrix} -\frac{2b}{3} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

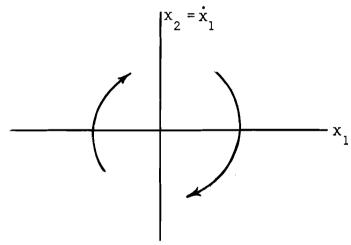
Tomando $|x_1| < \frac{b}{2}$, $V(x) = \frac{x_2^2}{2} + bx_1^2 + x_1^3$ resulta una función de Liapu nov para el sistema respecto de $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Además
$$W(x) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = x_2 \dot{x}_2 + 2bx_1 \dot{x}_1 + 3x_1^2 \dot{x}_1 = -ax_2^2 \le 0$$

$$R = \left\{ x / W(x) = 0 \right\} = \left\{ x = \left(\frac{x_1}{0} \right) / |x_1| < \frac{b}{2} \right\}.$$

Entonces $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es el mayor ciclo límite contenido en R ; por

lo tanto el sistema es L-estable asintótico a Γ



4-3. APLICACION DE LA TEORIA DE LIAPUNOV A LOS SISTEMAS LINEALES

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{x} = F(t)$. x. Entonces $x(t) = \Phi(t;t_0).x_0$ es la solución que verifica $x(t_0) = x_0$ siendo $\Phi(t;t_0)$ la matriz fundamental .

Para los sistemas de este tipo se tiene el siguiente

TEOREMA:

- i) El sistema lineal \dot{x} = F(t).x es L-estable sí y solo sí \forall t o M > 0 / $||\Phi(t;t_0)|| \le M \ \forall$ t > t o
- ii) El sistema lineal \dot{x} = F(t) . x es L-estable asintótico sí y solo sí ψ t $\lim_{t\to +\infty} ||\Phi(t;t_0)|| = 0$.

Definiremos una nueva noción de estabilidad.

El sistema lineal $\dot{x} = F(t) \cdot x$ es L-estable asintótico exponencial cuan

do
$$\forall t_0$$
 $\exists k; \gamma > 0 / || \Phi(t; t_0) || \leq k \cdot e$ $\forall t > t_0$.

Veamos como construir una función de Liapunov cuadrática para los sistemas lineales.

Sea
$$V(x;t) = x' \cdot P(t) \cdot x$$

donde: $\begin{cases} P(t) & \text{es una matriz sim\'etrica } n \times n \\ \exists \, \alpha \, ; \beta \, > \, 0 \, / \, \alpha \, I \, \underline{\leq} \, P(t) \, \underline{\leq} \, \beta \, I \end{cases} . \tag{I-9}$

$$W(x;t) = \frac{d}{dt} V(x;t) = x' (F'P + \dot{P} + PF) x = -x' Q(t) . x$$
donde:
$$-Q(t) = \dot{P} + F'P + PF \qquad (I-10)$$

se 11ama Ecuación de Liapunov.

De los 2 teoremas de Liapunov se deducen, para el caso lineal, los:

TEOREMA 1:

Si existen matrices P;Q que verifican (I-9) y (I-10) siendo $Q \ge 0$, entonces el sistema es L-estable.

TEOREMA 2:

Si existen matrices P;Q que verifican (I-9) y (I-10), y existe Y>0 tal que $Q \ge YI$, entonces el sistema es L-estable asintótico.

Además se verifica el siguiente:

TEOREMA 3:

Si el sistema $\dot{x}=F(t)$. x es L-estable asintótico exponencial, entonces \forall matriz Q(t) / $_{\gamma}I$ \leq Q(t) \leq $_{\delta}I$, con $_{\gamma}$, $_{\delta}$ > 0 $_{\delta}P(t)$ matriz solución de (1--10) / $_{\alpha}I$ \leq $_{\delta}P(t)$ \leq $_{\beta}I$ con $_{\alpha}$; $_{\beta}$ > 0 .

DEMOSTRACION:

Sea
$$P(t) = \int_{t}^{+\infty} \Phi'(\tau;t) \cdot Q(\tau) \cdot \Phi(\tau;t) d\tau$$
.

Debido a que el sistema es L-estable asintótico exponencial la matriz P(t) está bien definida y además verifica $\alpha I \leq P(t) \leq \beta I$, con $\alpha; \beta > 0$.

$$\dot{P}(t) = \int_{t}^{+\infty} \left[-F'(t) \cdot \Phi'(\tau;t) \cdot Q(\tau) \cdot \Phi(\tau;t) - \Phi'(\tau,t) \cdot Q(\tau) \cdot \Phi(\tau;t) F(t) \right] d\tau - Q(t) =$$

$$= -Q(t) - F'(t).P(t) - P(t).F(t)$$
 ó sea que P satisface (I-10).

EJEMPLO:

Consideremos la ecuación: $\ddot{x}_1 + a(t) \cdot \dot{x}_1 + x_1 = 0$, con $a(t) \ge 0 \ \forall t$.

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - a(t)x_2 \end{cases},$$

siendo en este caso $F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a(t) \end{pmatrix}$.

Considero P = I, matriz que verifica (I-9), y Q(t) = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a(t) \end{pmatrix}$

Como ambas matrices satisfacen (I-10), resulta por Teorema 1 que el sis tema es L-estable.

¿Qué sucede cuando existen perturbaciones en los coeficientes?.

Sea el sistema $\dot{x} = A(t) \cdot x$, L-estable asintótico exponencial. Si con sidero Q = I , entonces por Teorema 3 $\exists P(t)$; $\alpha,\beta > 0$ / $\begin{cases} \dot{P} + A'P + PA = -I \\ \alpha I < P(t) < \beta I \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{P} + A'P + PA = -I \\ \alpha I < P(t) < \beta I \end{cases}$$

Supongamos que existe una perturbación B(t) , ó sea que el sistema se transforma en: $\dot{x} = [A(t) + B(t)] \cdot x$

 $V(x;t) = x' \cdot P(t)x$ es una función de Liapunov, siendo

$$W(x;t) = \frac{d}{dt} V(x;t) = x' \cdot (A'+B') \cdot P \cdot x + x' \cdot P \cdot (A+B) \cdot x =$$

$$= x' \cdot [A'P + B'P + P + PA + PB] \cdot x = x' \cdot [B'P + PB - I] \cdot x .$$

Entonces si la perturbación B(t) verifica B'P + PB - I < 0 (para lo $||B|| < \frac{1}{2B}$), resulta por aplicación del 1º Teore cual es suficiente pedir ma de Liapunov que el sistema perturbado es L-estable.

CASO ESTACIONARIO:

En los sistemas lineales estacionarios la ecuación de Liapunov (I-10) re sulta: F'P + PF = -Q(I-11)

y los anteriores teoremas se resumen en el siguiente:

TEOREMA:

- a) Si el sistema $\dot{x} = F.x$ es L-estable asintótico, entonces $\forall Q > 0$ P > 0 que satisfacen (I-11).
- b) Si existen P;Q > 0 que verifican [I-11]; entonces el sistema es L-esta ble asintótico.

OBSERVACION: Para averiguar si un sistema lineal estacionario es ó no L-es-

table asintótico podemos seguir el siguiente procedimiento:

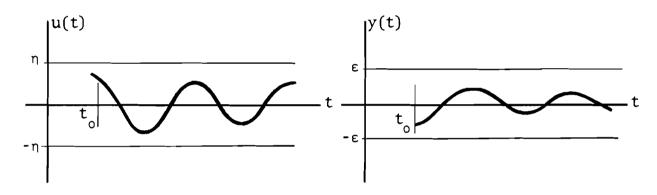
- i) Tomar una matriz Q > 0 cualquiera (por ejemplo Q = I).
- ii) Resolver la ecuación (I-11) con incógnita P.
- iii) Averiguar si: P > 0 .
- iv) P > 0 ➡ sistema L-estable asintótico P ≯ 0 ⇒ sistema no L-estable asintótico.

4-4. ESTABILIDAD BIBO (*)

Consideremos un sistema dinámico dado por su representación externa:

$$y(t) = f(u(t_0;t);t)$$
 donde $f(0;t) = 0$

 $y(t) = f(u(t_o;t);t) \qquad \text{donde} \qquad f(0;t) = 0 \quad .$ El sistema es \$BIBO-estable cuando \$\forall t_o\$ \$\forall \varepsilon \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \rightarrow \varepsilon \var que a una entrada de pequeña amplitud le corresponde una salida de pequeña amplitud.



TEOREMA:

OREMA: El sistema lineal $y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t;\tau).u(\tau)d\tau$ es BIBO-estable \longrightarrow 3 M > 0 / $\int_{t_0}^{t} |h(t;\tau)|d\tau < M$ $\forall t > t_0$.

MOSTRACION:

$$\exists M > 0 / \int_{t}^{t} |h(t;\tau)| d\tau < M \qquad \forall t > t_{o}$$

DEMOSTRACION:

(*) BIBO proviene del inglés: bounded input, bounded output.

sistema resulta BIBO-estable.

Supongamos por el absurdo que $\mbox{$\forallk }\mbox{\exists T}/\int_{t_0}^T |h(T;\tau)|d\tau > k$. Entonces tomando el siguiente input: $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [t_0;T] \\ \eta.sg(h(T;t)) & \text{si } t \in [t_0;T] \end{cases},$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [t_0; T] \\ \eta.sg(h(T;t)) & \text{si } t \in [t_0; T] \end{cases}$$

nos queda que:

$$y(T) = \int_{t_0}^{T} h(T;\tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{T} |h(T;\tau)|.\eta.d\tau = \eta \int_{t_0}^{T} |h(T;\tau)| d\tau > \eta.k,$$

lo cual es una contradicción por ser el sistema BIBO-estable.

COROLARIO:

Un sistema lineal y estacionario es BIBO-estable $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$ \mapsto h \in L¹(0;+ ∞).

OBSERVACION: Sea el sistema lineal y estacionario:

$$\begin{cases} \dot{x} = F.x + G.u \\ y = H.x \end{cases}$$

Sabemos que $h(t-\beta) = H.\Phi(t;\beta).G$, donde $\Phi(t;\beta) = e^{F(t-\beta)}$

es decir que: $h(\tau) = H. e^{F\tau} . G$

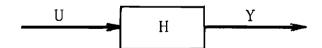
 $h(\tau) = \left(\sum_{i} \alpha_{i}(\tau) \cdot e^{\lambda_{i} \tau}\right)_{p \times m}$ Entonces:

donde λ_i son los autovalores de la matriz F , y $\alpha_i(\tau)$ son polinomios. Por 10 tanto:

el sistema es BIBO-estable \iff h \in L¹ (0;+ ∞) \iff Re λ_i < 0 \forall i \iff el sistema es L-estable asintótico.

4-5. CRITERIO DE NYQUIST:

Supongamos tener un sistema dinámico lineal y estacionario



del cual conocemos su función de transferencia H(s) por algún diagrama de los vistos anteriormente (por ejemplo, diagrama de Nyquist).

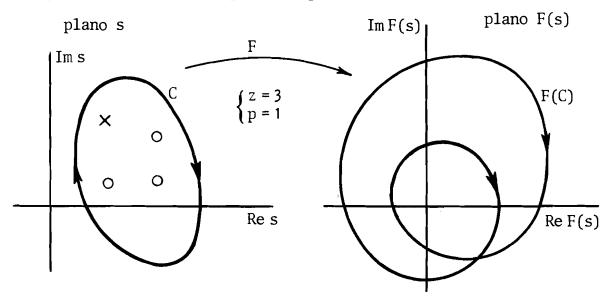
Nos preguntamos si con la información que nos dá el diagrama representa tivo de H(s) podemos determinar si H(s) es o no estable; para respon der a la pregunta nos apoyaremos en el siguiente:

TEOREMA DE CAUCHY:

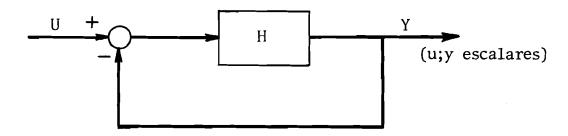
Sea C una curva cerrada en el plano complejo.

Sea F función holomorfa que tiene z ceros y p polos en el interior de C (contados con sus respectivas multiplicidades).

Entonces el número de veces que F(C) (imagen de C por F) gira alrededor del origen, en el plano complejo imagen de F , en sentido contrario a las agujas del reloj, es igual a: p-z .



Consideremos el siguiente sistema con H(s) una función racional.



donde $T = \frac{H}{1+H}$ es la función de transferencia del sistema equivalente.

Los polos de T son los ceros de (1+H).

Pretendemos que T(s) sea estable, es decir que los polos de T(s) tengan parte real negativa, lo cual equivale a que los ceros de (1+H) tengan parte real negativa. Es decir que si z es el número de ceros de (1+H) con parte real no negativa entonces debe ser z=0.

Vamos a aplicar el teorema de Cauchy antes enunciado; para ello construyamos una adecuada curva cerrada C en el plano complejo de la variable s.

Sea C la curva contorno del semi-plano Re s ≥ 0 , que puede definirse como la unión del eje Im s con la semi-circunferencia de radio R = $+\infty$ a la derecha.

Entonces, teniendo en cuenta que los polos de H son los polos de (1+H),

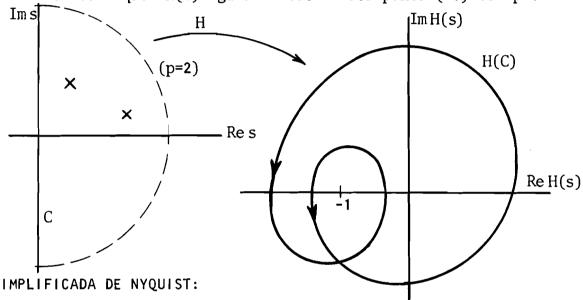
resulta:

TEOREMA DE NYQUIST:

El sistema es estable (T(s)) es estable cuando el número de vueltas de H(C) alrededor del punto crítico (-1) es igual a p (número de inestables de H(s)).

DEMOSTRACION:

T(s) es estable \longleftrightarrow 0 = z (número de ceros inestables de (1 + H)) el número de veces que (1 + H)(C) gira alrededor del origen es (p - z)↔ el número de veces que H(C) gira alrededor del punto (-1) es p.

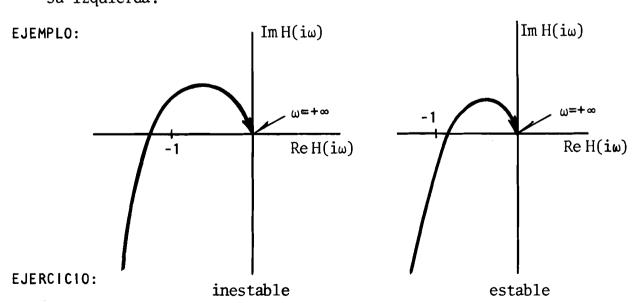


REGLA SIMPLIFICADA DE NYQUIST:

i) Si H(s) es estable (p = 0), entonces:

T es estable \iff H(C) no envuelve al punto (-1).

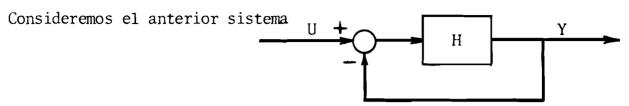
ii) Si H(s) es estable y $H(\infty) = 0$, entonces: T es estable ⇔ el lugar de Nyquist de H(s) vé al punto (-1) a su izquierda.



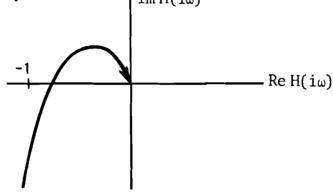
Hallar la regla para la estabilidad del sistema en las otras 3 represen

taciones.

GRADOS DE ESTABILIDAD:

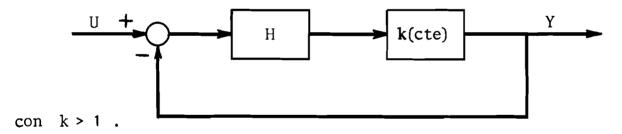


y supongamos que sea estable, es decir que el lugar de Nyquist de H(s) tienne al punto (-1) a su izquierda. $Im H(i\omega)$

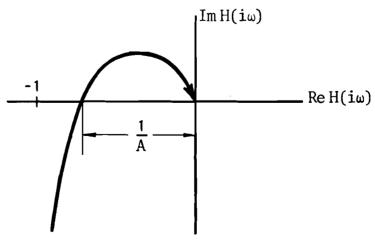


Pretendemos que el lugar de Nyquist de H(s) no esté cerca del punto (-1), pues cualquier modificación del sistema lo haría inestable.

Una tal modificación podría ser:

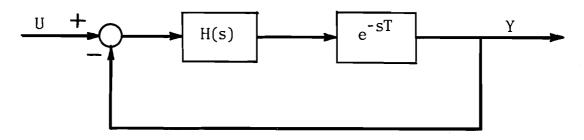


Se define por margen de ganancia al número real A , de manera que el producto de A por el lugar de Nyquist de H(s) pase por el punto crítico (-1). Gráficamente tenemos:



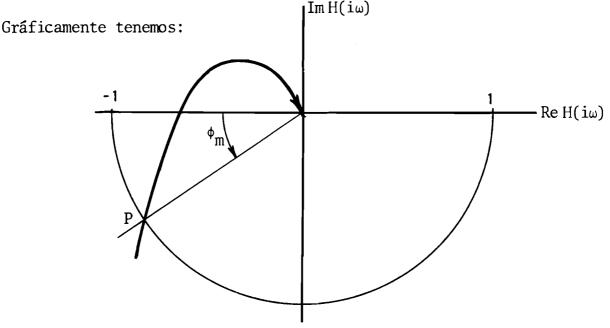
El margen de ganancia $\,$ A nos dá una idea de hasta cuanto es posible modificar el módulo de la función de transferencia $\,$ H(s) $\,$.

Otra posible modificación del sistema es retardarlo con una constante de retardo T ; es decir:



Como un retardo tiene por función de transferencia e^{-sT} , entonces la del sistema equivalente es e^{-sT} .H(s) . Esto se traduce en una rotación de $(-\omega T)$ del lugar de Nyquist de H(s).

Se define por margen de fase al ángulo ϕ_m que se debe rotar al lugar de Nyquist de H(s) para que éste pase por el punto crítico (-1); es de cir que ϕ_m nos dá el ángulo máximo de rotación para el cual el sistema si ga siendo estable.

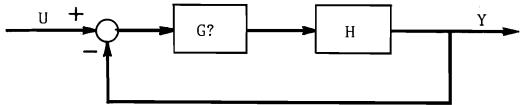


La teoría clásica de servomecanismos estudia las reglas para construir sistemas con margen de ganancia A y margen de fase ϕ_m grandes, pues si el sistema es estable tenemos:

$$\begin{cases} i) \frac{1}{A} < 1 & (A > 1) \\ ii) \phi_m > 0 \end{cases}$$

4-6. COMPENSACION DE SERVOMECANISMOS.

Sea un sistema con función de transferencia H(s). Queremos construir un regulador G de manera que el sistema



sea preciso y estable.

Consideremos $u = u_0(cte)$; deseamos que la salida y(t) sea aproxima damente igual a u_0 .

Para la estabilidad el lugar de Nyquist de H(s).G(s) debe pasar a la derecha del punto (-1) (cuanto más lejos mejor).

En cambio para la precisión debe ser $\,y_{_{\!\infty}} \approx u_{_{\!0}}^{}\,$, lo cual se traduce en que $G(0).H(0)\,$ sea grande, pues de

$$Y(s) = \frac{H(s) \cdot G(s)}{1 + H(s)G(s)} \cdot U(s) = \frac{H(s) \cdot G(s)}{1 + H(s)G(s)} \cdot \frac{u_0}{s}$$

resulta:

$$y_{\infty} = \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s.Y(s) = \lim_{s \to 0} u_{0} \cdot \frac{H(s).G(s)}{1+H(s)G(s)} =$$

$$= u_{0} \cdot \frac{H(0).G(0)}{1+H(0)G(0)}$$

o sea que H(0).G(0) debe ser grande.

Hay distintas maneras de realizar la compensación:

a) COMPENSACION PROPORCIONAL.

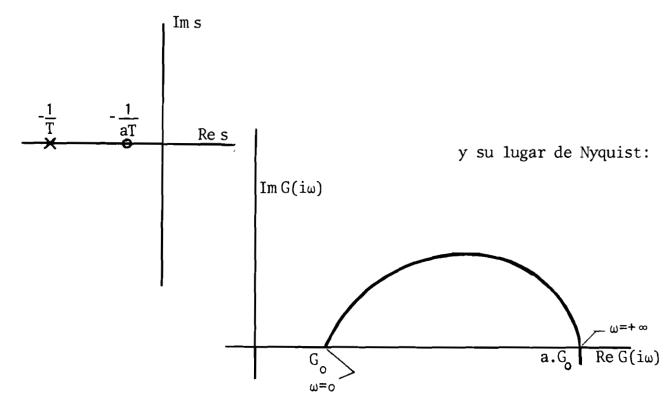
Consiste en elegir $G(s) = G_0$.

Para la estabilidad debe ser G_0 menor que el margen de ganancia. En cambio para la precisión debe ser G_0 .H(0) grande.

Es por este dilema que la compensación proporcional puede no dar una respuesta satisfactoria. Una compensación más general se puede lograr a través de una función G(s) que depende explicitamente de la frecuencia s. De esta forma mediante deformaciones del lugar de Nyquist de H(s).G(s) podremos mejorar la estabilidad sin perder precisión o vice versa.

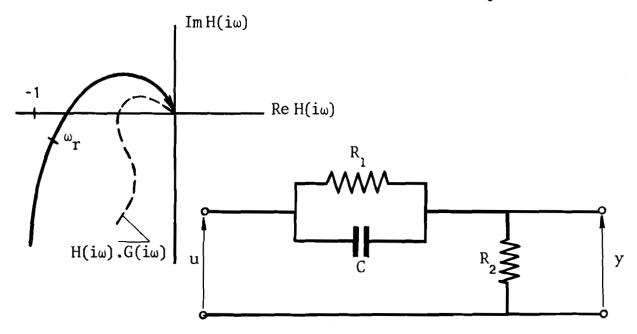
b) COMPENSACION DERIVADA.

Consiste en tomar: $G(s) = G_o \cdot \frac{1+aT.s}{1+T.s}$ con T; a > 1 ctes, siendo su diagrama de ceros y polos:



Llamamos frecuencias críticas o de resonancia a aquellas frecuencias $\omega = \omega_{\rm r}$ para las cuales $H(i\omega)$ está próximo al punto (-1) .

Conocidas las frecuencias críticas trataremos de ajustar las constantes a y T de manera de lograr que dichas frecuencias correspondan a valores positivos y máximos del Arg $G(i\omega)$. Esto se traduce en una rotación del lugar de Nyquist de H(s), con lo que se logra mayor estabilidad, sin disminuir la precisión que viene dada por G_{o} .H(0).



Este sistema tiene como función de transferencia:

$$H(s) = G_0 \cdot \frac{1+aT.s}{1+T.s}$$

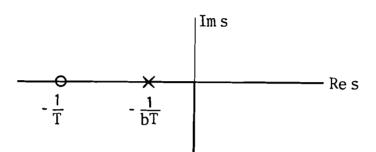
donde:

$$\begin{cases} G_{0} = \frac{1}{a} = \frac{R_{2}}{R_{1} + R_{2}} \\ T = \frac{R_{1} \cdot R_{2}}{R_{1} + R_{2}} \cdot C \end{cases}$$

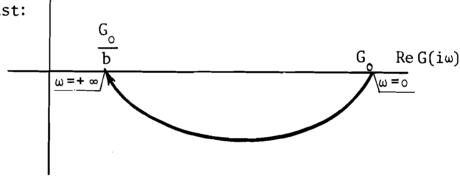
c) COMPENSACION INTEGRAL:

Consiste en tomar: $G(s) = G_0 \cdot \frac{1+T.s}{1+b.T.s}$ con T; b > 1 ctes,

siendo su diagrama de ceros y polos:



y su lugar de Nyquist:



Este tipo de compensación aumenta la precisión sin alterar la estabilidad.

d) COMPENSACION INTEGRAL Y DERIVADA:

Si queremos mejorar simultáneamente precisión y estabilidad usamos una compensación mixta del tipo:

$$G(s) = G_0 \cdot \frac{1+T_1.s}{1+b.T_1.s} \cdot \frac{1+a.T_2.s}{1+T_2.s}$$

4-7. TEORIA DE POPOV: (*)

El criterio de Nyquist es para sistemas con feed-back constante e igual a 1; en cambio la teoría de Popov lo generaliza para sistemas con feed-back

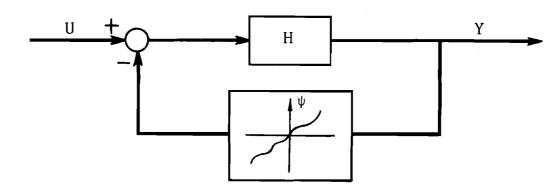
^(*) Para un análisis detallado de este tema ver: Aizerman and Gantmacher: "Absolute Stability of Regulator", Holden Day.

no necesariamente lineal.

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = F.x + G.u \\ y = H.x \end{cases}$$

con u = $-\psi(y)$, siendo ψ una función no necesariamente lineal que verifica y'. $\psi(y) \ge 0$.



DEFINICION: Una función de transferencia H(s) se llama positiva real cuando (Re $s \ge 0 \implies \text{Re } H(s) \ge 0$) (*)

LEMA: La función de transferencia $H.(sI-F)^{-1}$. G es positiva real \Leftrightarrow se verifican las siguientes condiciones:

TEOREMA DE POPOV:

Si la función de transferencia $H.(sI-F)^{-1}.G$ es positiva real, entonces para todo feed-back ψ con $y'.\psi(y) \geq 0$ tenemos L-estabilidad asintótica.

DEMOSTRACION: Sea V = x'.P.x.

Como
$$\dot{x} = F.x + G.u = F.x - G.\psi(y) = F.x - G.\psi(Hx)$$

resulta
$$W = \frac{d}{dt} V = \dot{x}' \cdot P \cdot x + x' \cdot P \cdot \dot{x} = -x' \cdot Q \cdot x - 2 \cdot (Hx)' \cdot \psi(Hx) \le$$

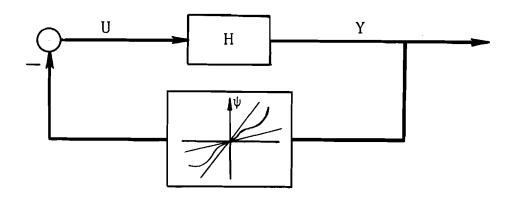
 $\leq -x' \cdot Q \cdot x \cdot$

Por ser Q > 0 , entonces el sistema es L-estable asintótico.

CRITERIO DEL CIRCULO:

Sea el sistema

(*) Si A =
$$(a_{ij})$$
 entonces Re A = $(\text{Re } a_{ij})$



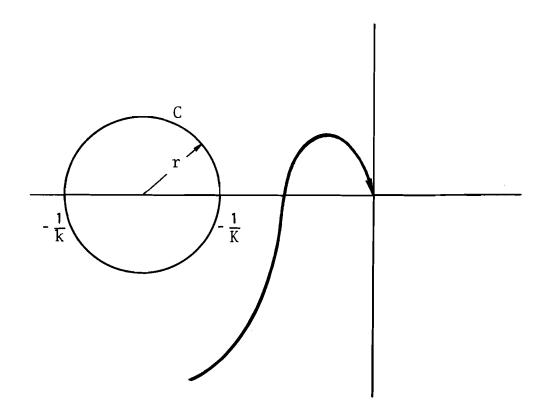
donde la función ψ satisface:

$$k y \leq \psi(y) \leq K.y$$

Consideremos el círculo C de centro $\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{K}\right)$ y radio $r = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{K}}{2}$.

El criterio del circulo dice lo siguiente:

El sistema es estable cuando su lugar de Nyquist deja al círculo C a su izquierda.



CAPITULO 2

Filtrados Estadísticos

II-1. NOCIONES INTRODUCTORIAS (*)

1-1. ALGUNOS CONCEPTOS SOBRE VARIABLE ALEATORIA:

Una variable aleatoria expresa los resultados de una experiencia alea toria, es decir de una experiencia donde los resultados no pueden ser previstos de antemano de un modo determinístico, pero se le puede asociar una medida de su verosimilitud que llamaremos probabilidad y la simbolizaremos con la letra P

Una variable aleatoria X queda caracterizada por su función de distri bucion de probabilidad:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

que expresa la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores menores o iguales que uno dado (x).

Si esta función es derivable, llamaremos función de densidad de probabi lidad a:

 $p(x) = \frac{d}{dx} F(x)$.

Nos interesa considerar los siguientes 2 momentos de la variable aleato

esperanza matematica:
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x)$$
 (**)

covariancia:

$$E([X - E(X)]^2) = \sigma_X^2$$

VECTOR ALEATORIO

Es un vector donde cada componente es una variable aleatoria escalar

- (*) Para mayor información ver por ejemplo Sixto Ríos, 'Métodos Estadísticos'', Mc Graw-Hill, 5ta. ed.
 - (**) La integral debe considerarse en el sentido de Stieltjes.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$
. Para caracterizar completamente al vector aleatorio debe es

pecificarse la función de distribución conjunta:

$$F(x) = F(x_1; x_2; ...; x_n) = P(X_1 \le x_1; X_2 \le x_2; ...; X_n \le x_n)$$

ó en el caso de que exista, la función de densidad conjunta:

$$p(x) = p(x_1; x_2; ...; x_n) = \frac{\partial^n F(x_1; x_2; ...; x_n)}{\partial x_n ... \partial x_2 \partial x_1}$$

La esperanza matemática de un vector aleatorio se define por:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^{n}} \begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ \vdots \\ x_{n} \end{pmatrix} dF(x) = \begin{pmatrix} E(X_{1}) \\ E(X_{2}) \\ \vdots \\ E(X_{n}) \end{pmatrix}$$

y la matriz de covariancia por:

que es una matriz semi-definida positiva.

OBSERVACION: (*)

"Si el rango de la matriz $\Sigma_{\chi\chi}$ es r < n (en cuyo caso la distribución se llama singular) existe un hiperplano L de dimensión r en el cual, con probabilidad 1, está toda la masa de la distribución.

Si el rango de $\sum_{\chi\chi}$ es n (caso regular) , no existe tal hiperplano de dimensión r < n'' .

En lo que sigue supondremos, salvo especificación en contrario, estar frente a problemas regulares.

VECTOR ALEATORIO GAUSSIANO, NORMAL O DE LAPLACE:

Un vector aleatorio de esperanza $\,$ m $\,$ y covariancia $\,$ $\,$ se dice $\,$ Gaussiano, $\,$

(*) Sixto Ríos, 'Métodos Estadísticos', Mc Graw-Hill, 5ta. ed., p. 176.

Normal ó de Laplace cuando su función de densidad es:

$$\frac{dF(x)}{dx} = p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-m)! \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x-m)}$$

 $|\Sigma|$ = determinante de la matriz Σ .

PROPIEDAD:

Dada una partición del vector aleatorio gaussiano $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (X_1, X_2)$ vectores gaussianos), con:

$$E(X) = m = {m \choose 1} \quad \text{donde} \quad m_i = E(X_i),$$

$$Y = {\sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}$$

nos planteamos el problema de estimar X_1 cuando X_2 es conocido, o buscamos un estimador de $X_1(\hat{X}_1)$ en función de X_2 .

Puede demostrarse que el mejor estimador está dado por:

$$\hat{X}_1 = m_1 + \Sigma_{12} \cdot \Sigma_{22}^{-1} \cdot (X_2 - m_2)$$
.

El error de estimación:

$$\tilde{X}_1 = X_1 - \hat{X}_1$$

verifica:

- i) \tilde{X}_1 es un vector aleatorio gaussiano, por ser combinación lineal de vectores gaussianos.
- ii) $E(\tilde{X}_1) = 0$.

iii)
$$E(\tilde{X}_{1}^{1}.\tilde{X}_{1}^{1}) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$E\left[\tilde{X}_{1}.(X_{2}-m_{2})'\right] = E\left[(X_{1}-m_{1}).(X_{2}-m_{2})'-\Sigma_{12}-\Sigma_{12}^{-1}(X_{2}-m_{2}).(X_{2}-m_{2})'\right] = \Sigma_{12}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22}=0.$$

Por 10 tanto 10s vectores \tilde{X}_1 y X_2 son independientes (son normales y con covariancia nula).

En consecuencia la esperanza de \tilde{X}_1 condicionada a X_2 resulta igual a $\tilde{E(X_1)}$, o sea $E(\tilde{X}_{1} / X_{2}) = E(\tilde{X}_{1}) = 0$.

Es decir:

$$0 = E(\tilde{X}_1/X_2) = E(X_1 - \hat{X}_1/X_2) = E(X_1/X_2) - E(\hat{X}_1/X_2)$$

y como
$$E(\hat{X}_1 / X_2) = \hat{X}_1$$
 (pues para X_2 fijo resulta \hat{X}_1 constante)

tenemos:

$$E(X_1/X_2) = \hat{X}_1 = m_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (X_2 - m_2)$$
.

EJEMPLO:

Consideremos el vector aleatorio $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, donde X_1 es la altura medida en cm. y X_2 el peso en kg. de una persona de una determinada pobla — ción.

Supongamos que:

$$E(X) = {170 \choose 60}$$
 , $\sum = {100 \choose 40 \choose 50}$.

Sabemos que el peso de una determinada persona es de 65 kg; queremos estimar su altura.

El mejor estimador está dado por:

$$E(X_1/X_2) = \hat{X}_1 = 170 \text{ cm} + 40.\frac{1}{50}. (65 - 60) \text{ cm} = 174 \text{ cm}$$

con una covariancia de error

$$E(\tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_1') = 100 - 40 \cdot \frac{1}{50} \cdot 40 = 68$$

Si no hubiéramos conocido X_2 , la estimación habría estado dada por $E(X_1)$ = 170 cm y la covariancia de error habría sido Σ_1 = 100 .

1-2. FUNCIONES ESTOCASTICAS.

Muchos fenómenos, tales como ruido en las comunicaciones telefónicas,con sumo de electricidad, etc. no pueden ser descriptos con una sola variable <u>a</u> leatoria, ya que éstos dependen de un parámetro t que es el tiempo.

Llamaremos función ó proceso estocástico a una familia de variables aleatoria X(t) (a cada instante t le corresponde una variable aleatoria X(t)).

Una función estocástica queda caracterizada por el conjunto de las funciones de distribución:

$$F_n(y_1; y_2; ...; y_n; t_1; t_2; ...; t_n) = P(y(t_1) < y_1; y(t_2) < y_2; ...; y(t_n) < y_n)$$
 $\forall n , \forall t_1; t_2; ...; t_n$

Estas funciones deben verificar condiciones de compatibilidad, por ejemplo:

$$F_{n-1}(y_1;y_2;\ldots;y_{n-1};t_1;\ldots;t_{n-1}) = F_n(y_1;y_2;\ldots;y_{n-1};+\infty;t_1;t_2;\ldots;t_{n-1};t_n).$$

Otra forma de describir una función estocástica es a través de la:

REPRESENTACION EXTERNA:

Denominamos representación externa del proceso y(t), al conjunto formado por los 2 primeros momentos:

$$\{m_y(t); \Lambda_{yy}(t;s)\}_{t;s}$$

donde:

$$\begin{cases} m_{y}(t) = E(y(t)) \\ \Lambda_{yy}(t;s) = E[(y(t) - m_{y}(t)) \cdot (y(s) - m_{y}(s))'] \end{cases}.$$

OBSERVACION:

Diremos que $\,y(t)\,$ es gaussiana o normal cuando lo sean cada una de las F_n .

La descripción externa proporciona mucho menos información que la totalidad de las funciones de distribución conjuntas, sin embargo en el caso de una función estocástica gaussiana, conocer su descripción externa equivale a conocer el proceso completo.

TRANSFORMACION LINEAL DE FUNCIONES ESTOCASTICAS:

Sea u(t) una función estocástica de representación externa $\{m_u(t); \Lambda_{u}(t;s)\}$, a la cual le aplicamos una transformación lineal

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t;\alpha).u(\alpha)d\alpha .$$

$$u h(t;s) y$$

Entonces y(t) es una nueva función estocástica cuya representación externa viene dada por:

$$m_{y}(t) = E(y(t)) = E\left(\int_{t_{0}}^{t} h(t;\alpha)u(\alpha)d\alpha\right)^{\binom{*}{2}} = \int_{t_{0}}^{t} h(t;\alpha) E(u(\alpha))d\alpha =$$

$$= \int_{t_{0}}^{t} h(t;\alpha) m_{u}(\alpha)d\alpha .$$

$$\Lambda_{yy}(t;s) = E([y(t) - m_{y}(t)] \cdot [y(s) - m_{y}(s)]') =$$

$$= E\left(\int_{t_{0}}^{t} h(t;\alpha) \cdot \left[u(\alpha) - m_{u}(\alpha)\right] \cdot d\alpha . \int_{t_{0}}^{s} \left[u(\beta) - m_{u}(\beta)\right] h'(s;\beta)d\beta\right) =$$

(*) Supondremos que se verifican las hipótesis del teorema de Fubini, para que la integral y la esperanza puedan ser permutadas.

$$= E \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} h(t;\alpha) \cdot \left[u(\alpha) - m_u(\alpha) \right] \cdot \left[u(\beta) - m_u(\beta) \right] \cdot h'(s;\beta) d\alpha d\beta =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} h(t;\alpha) \cdot \Lambda_{uu}(\alpha;\beta) \cdot h'(s;\beta) d\alpha d\beta .$$

De esta manera es posible calcular la representación externa de y(t) conociendo la representación externa de u(t) y la respuesta al impulso h(t;s).

De la misma forma podemos definir la covariancia cruzada entre 2 señales $y_1(t)$, $y_2(t)$ como:

$$\Lambda_{y_1 y_2}(t;s) = E([y_1(t) - m_{y_1}(t)].[y_2(s) - m_{y_2}(s)]')$$
.

Si $y_1(t)$, $y_2(t)$ resultan de una transformación lineal de $u_1(t)$; $u_2(t)$ respectivamente:

$$y_1(t) = \int_{t_0}^{t} h_1(t;\alpha).u_1(\alpha).d\alpha$$

 $y_2(t) = \int_{t_0}^{t} h_2(t;\beta).u_2(\beta).d\beta$

se obtiene, en forma análoga a lo hecho anteriormente,

$$\Lambda_{y_1 y_2}(t;s) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} h_1(t;\alpha) \cdot \Lambda_{u_1 u_2}(\alpha;\beta) \cdot h_2'(s;\beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta$$

CASO ESTACIONARIO:

Una función estocástica se llama estacionaria cuando su representación es invariante por traslaciones en el tiempo; es decir si:

$$F_n(y_1;...;y_n; t_1;...t_n) = F_n(y_1;...;y_n; t_1+T;...; t_n+T) + T$$

Utilizando su representación externa tenemos:

$$\begin{cases} m_y(t) = m_y = cte \\ \Lambda_{yy}(t;s) = \Lambda_{yy}(t-s) \end{cases}$$

Sea $y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\alpha).u(\alpha).d\alpha$ una transformación lineal y estaciona —

ria de $\,u(t)\,$ en $\,y(t)\,$; si $\,u(t)\,$ es estacionaria entonces $\,y(t)\,$ resulta también estacionaria, pues:

$$m_{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\alpha) \cdot m_{u}(\alpha) \cdot d\alpha = \int_{0}^{+\infty} h(\beta) \cdot m_{u}(t-\beta) \cdot d\beta = \int_{0}^{+\infty} h(\beta) \cdot m_{u} \cdot d\beta = cte$$

$$\Lambda_{yy}(t;s) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} h(t-\alpha) \cdot \Lambda_{uu}(\alpha-\beta) \cdot h'(s-\beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} h(\alpha) \cdot \Lambda_{uu}(t-s+\beta-\alpha) \cdot h'(\beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta = \Lambda_{yy}(t-s)$$

$$\Lambda_{yy}(t) = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} h(\alpha) \cdot \Lambda_{uu}(t+\beta-\alpha) \cdot h'(\beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta$$
 (II-1)

ESPECTROS.

ó sea:

DEFINICION: Se llama espectro $S_{yy}(s)$ de la función estocástica estacionaria y(t) a la transformada de Laplace de la matriz de covariancia $\Lambda_{yy}(t)$, es decir:

$$S_{yy}(s) = \mathcal{L}(\Lambda_{yy}(t))$$
.

Además, transformando la expresión (II-1), resulta:

$$S_{yy}(s) = H(s).S_{uu}(s).H'(-s)$$

$$H(s) = \mathcal{L}(h(t)) .$$
(II-2)

donde

Llamaremos representación espectral de la función estocástica estacionaria y(t) al conjunto:

$$\left\{ m_{y}; S_{yy}(s) \right\}$$

Se demuestra que las condiciones para que una matriz pueda ser consider<u>a</u> da un espectro son:

i)
$$S_{yy}(s) = S'_{yy}(-s)$$

ii)
$$S(\overline{s}) = \overline{S(s)}$$

iii)
$$S(i\omega) \ge 0 \quad \forall \omega \ge 0$$
.

EJEMPLOS:

a) SEÑAL DEL TELEGRAFO:

Estamos ante una señal que asume uno de dos niveles posibles. Los cambios de nivel de la señal se producen en tiempos t_1,t_2,\ldots,t_n . Estos tiempos se distribuyen según una ley de Poisson, es decir que la probabilidad de que haya un cambio de nivel de la señal en un intervalo de amplitud dt es λ dt (λ constante) y la probabilidad de que haya más de un cambio de nivel en un intervalo de amplitud dt es cero. En este caso, la probabilidad de que no haya cambio de nivel de la señal en el intervalo [0,t] es $e^{-\lambda t}$.

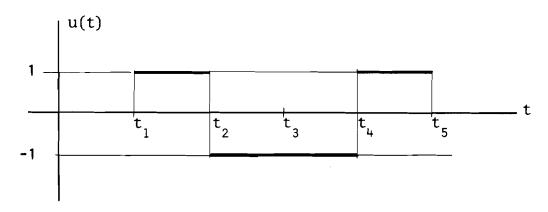
A cada tiempo t_i va asociada una variable aleatoria A_i que toma los valores 1 y -1 , ambos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

Consideramos el siguiente proceso estocástico u(t) :

para
$$t = t_i$$
, $u(t) = A_i$

para $t_i < t < t_{i+1}$, u(t) conserva el valor que asumió en t_i .

Por ejemplo, si resulta A_i = 1, u(t) toma en t_i el valor 1 y lo conserva hasta que se produce un cambio de señal en cuyo caso toma el valor correspondiente a A_{i+1} .



Para este proceso se verifica que:

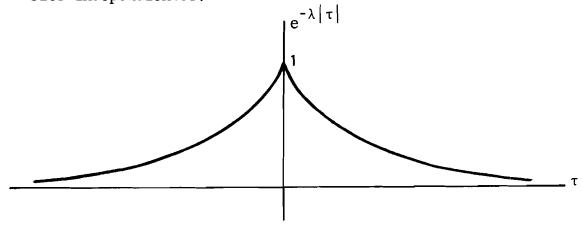
$$E(u(t)) = 0$$

$$E(u(t+\tau).u(t)) = e^{-\lambda |\tau|}$$
. $E(A_i^2) + (1 - e^{-\lambda |\tau|})$. $E(A_i.A_j) = e^{-\lambda |\tau|}$ donde:

 $e^{-\lambda \left|\tau\right|}$: es la probabilidad de que no haya señal entre $\ t\ y\ t+\tau$.

 A_i^2 : es el valor del producto $u(t+\tau).u(t)$ en el caso de que no haya se ñal entre t y $t+\tau$. $E(A_i^2)$ = 1

1-e^{- λ | τ |}: es la probabilidad de que haya señal entre t y t+ τ . A_i.A_j(i \neq j): es el valor del producto u(t+ τ).u(t) en el caso de que haya señal entre t y t+ τ . E(A_i.A_j) = 0 al ser A_i y A_j variables independientes.



Observemos que esta representación externa corresponde a un proceso no

gaussiano.

b) RUIDO BLANCO:

Un ruido blanco es una señal r(t) que tiene por función de correlación $\Lambda_{rr}(\tau) = k.\delta(\tau)$; siendo, en consecuencia, su espectro $S_{rr}(s) = k$ (constante). $E(r(t+\tau).r(t)) = k.\delta(\tau)$ nos está indicando que para 2 tiempos t y t+ τ , aunque τ sea muy pequeño, los valores de r son independientes. c) Sea:

$$\frac{U}{H(s) = \frac{1}{1+s}} \qquad Y$$

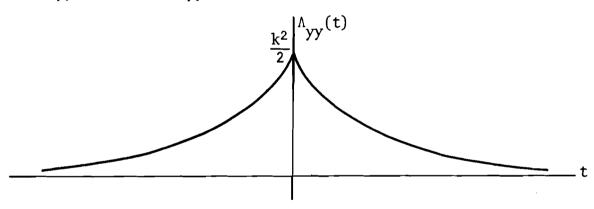
con u un ruido blanco que verifica $S_{111}(s) = k^2$.

Entonces resulta de (II-2):

$$S_{yy}(s) = H(s).S_{uu}(s).H'(-s) = \frac{k^2}{(1+s)(1-s)} = \frac{k^2}{2(1+s)} + \frac{k^2}{2(1-s)}$$

ó sea:

$$\Lambda_{yy}(t) = \mathcal{L}^{-1}(S_{yy}(s)) = \frac{k^2}{2} e^{-|t|}$$



Observemos que la función de correlación es salvo constante de proporcionalidad, la misma que la de la señal del telégrafo, aunque los procesos son muy diferentes.

Esto nos demuestra que conocer la representación externa no proporciona su ficiente información como para conocer la totalidad del proceso

d) MOVIMIENTO BROWNIANO:

Para dar una definición rigurosa del ruido blanco, (lo haremos más adelante) deberemos utilizar otra función estocástica: el movimiento browniano ó proceso de Wiener-Levy.

Para introducir este tipo de proceso analicemos el siguiente ejemplo:

Sea y(t) la función estocástica que representa en el instante t la posición de un borracho, que en el tiempo t = 0 sale de un café ubicado en el origen de coordenadas.

Consideremos la variable aleatoria gaussiana $\Delta(t_2;t_1) = y(t_2) - y(t_1)$ que satisface:

- i) $E(\Delta(t_2;t_1)) = 0$ ii) $E(\Delta^2(t_2;t_1)) = |t_2-t_1|$ iii) $Si(t_1;t_2) \cap (t_3;t_4) = \phi$ entonces $\Delta(t_2;t_1) \vee \Delta(t_4;t_3)$ son indepen dientes, es decir que los movimientos que hace el borracho en interva los de tiempo disyuntos son independientes.

Se puede demostrar que existe un proceso estocástico que verifica todas estas propiedades, y que es justamente el proceso de Wiener-Levy ó movimien to browniano.

EJERCICIO: Demostrar que:

$$E(y(t)) = 0$$
; $E(y(t).y(s)) = min(t,s)$ donde $y(t) = \Delta(t;0)$.

PROPIEDADES DEL PROCESO DE WIENER-LEVY. (*)

- i) las trayectorias, con probabilidad 1, son continuas.
- ii) las trayectorias, con probabilidad 1, no son funciones de variación aco
- iii) las trayectorias, con probabilidad 1, no tienen derivada en ningún pun to.

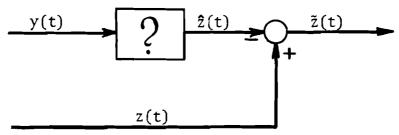
TI-2. FILTRO DE WIENER

2-1. EL PROBLEMA DEL FILTRADO.

Dadas 2 funciones estocásticas y(t), z(t) con z(t)problema del filtrado consiste en buscar h(t;s) de manera que:

$$\hat{z}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t;\alpha).y(\alpha)d\alpha$$

dé la mejor estimación de z(t), conociendo los valores del input y desde t_o a t.



(*) Ver Doob, "Stochastic Processes".

Para que el problema tenga sentido debe existir y ser conocida la correlación entre z(t) e y(t) .

Consideraremos como mejor estimación de z(t) aquella que minimice la matriz de covariancia del error $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, o sea aquella que haga $E(\tilde{z}(t) \cdot \tilde{z}'(t)) = mínimo$.

Por lo tanto el filtro será el óptimo si la matriz $\Sigma = E(\tilde{z}(t).\tilde{z}'(t))$ cumple que para todo otro filtro de esta forma, con matriz de covariancia de error C , resulta $\Sigma \leq C$ en el sentido mencionado en I-4-3.

Esto es equivalente a que:

$$\gamma' \cdot E(\tilde{z}(t) \cdot \tilde{z}'(t)) \cdot \gamma = E(\gamma' \cdot \tilde{z}(t) \cdot \tilde{z}'(t) \cdot \gamma') = E(||\gamma' \cdot \tilde{z}(t)||^2)$$

sea mínimo γγ.

A tal h(t;s) se lo llama filtro estadístico óptimo.

2-2. ECUACION DE WIENER-HOPF-BOOTON.

De acuerdo con lo dicho anteriormente buscamos el $\hat{z}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t;\alpha)y(\alpha)d\alpha$ óptimo es decir tal que:

 $\gamma'.E(\tilde{z}(t).\tilde{z}'(t))\gamma = minimo \forall \gamma$,

suponiendo conocida la descripción externa conjunta de y(t), z(t):

$$\begin{cases} \Lambda_{yy}(t;s) = E(y(t).y'(s)) \\ \Lambda_{yz}(t;s) = E(y(t).z'(s)) \\ \Lambda_{zz}(t;s) = E(z(t).z'(s)) \\ m_y = E(y(t)) \text{, } m_z = E(z(t)) \text{ (que supondremos nulas, es decir } m_y = m_z = 0). \end{cases}$$

Por 10 tanto: $\gamma' \cdot E(\tilde{z}(t) \cdot \tilde{z}'(t)) \cdot \gamma = \gamma' \cdot E\left[(z(t) - \int_{t_0}^{t} h(t;\alpha) \cdot y(\alpha) d\alpha) \cdot (z'(t) - \int_{t_0}^{t} y'(\beta) \cdot h'(t;\beta) d\beta)\right] \cdot \gamma = \gamma' \left[\Lambda_{zz}(t;t) - \int_{t_0}^{t} h(t;\alpha) \cdot \Lambda_{yz}(\alpha;t) d\alpha - \int_{t_0}^{t} \Lambda_{zy}(t;\beta) \cdot h'(t;\beta) d\beta + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} h(t;\alpha) \cdot \Lambda_{yy}(\alpha;\beta) \cdot h'(t;\beta) d\alpha d\beta\right] \gamma = \mathcal{F}(h)$ (II-3)

Supongamos que $h^*(t;s)$ minimice $\mathcal{F}(h)$, entonces resulta que \mathcal{F} calculada en $h(t;s) = h^*(t;s) + \lambda.g(s)$ tiene, como función de λ , su mínimo en $\lambda = 0$ $\forall g(s)$; o sea que si

$$\mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{F}(h^* + \lambda.g)$$
 tenemos
$$\frac{d\mathcal{G}}{d\lambda}(\lambda = 0) = 0 \qquad \forall g(s) .$$

Por 10 tanto
$$\frac{d\mathcal{G}}{d\lambda}(\lambda = 0) = \gamma' \left[-\int_{t_0}^{t} g(\alpha) \Lambda_{yz}(\alpha;t) d\alpha - \int_{t_0}^{t} \Lambda_{zy}(t;\beta) g'(\beta) d\beta + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} h^*(t;\alpha) \Lambda_{yy}(\alpha;\beta) g'(\beta) d\alpha d\beta + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} g(\alpha) \Lambda_{yy}(\alpha;\beta) h^*(t;\beta) d\alpha d\beta \right] \gamma =$$

$$= \gamma' \left[\int_{t_0}^{t} g(\alpha) F(\alpha;t) d\alpha + \int_{t_0}^{t} F'(\beta;t) g'(\beta) d\beta \right] \gamma = 0 \qquad \forall g(\alpha) \qquad (II-4)$$

$$\text{donde}$$

$$F(\alpha;t) = \int_{t_0}^{t} \Lambda_{yy}(\alpha;\beta) h^*(t;\beta) d\beta - \Lambda_{yz}(\alpha;t) .$$

Como la expresión (II-4) debe verificarse ♥ γ, resulta que:

$$\int_{t_0}^{t} g(\alpha) F(\alpha;t) d\alpha + \int_{t_0}^{t} F'(\beta;t) g'(\beta) d\beta = 0 \qquad \forall g(\alpha) \qquad (II-5)$$

Tomando en (II-5)
$$g_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow i \quad \forall i,j$$

tenemos que $F(\tau;t) = 0 \quad \forall \tau \in [t_0;t]$, ó sea

$$\int_{t_0}^{t} \Lambda_{yy}(\alpha;\beta) h^*'(t;\beta)d\beta - \Lambda_{yz}(\alpha;t) = 0 \qquad \forall \alpha \in [t_0;t]$$

que se llama ecuación de Wiener-Booton, la cual es equivalente a:

$$\Lambda_{zy}(t;\alpha) - \int_{t_0}^{t} h^*(t;\beta) \Lambda_{yy}(\beta;\alpha) d\beta = 0 \quad \forall \alpha \in [t_0;t] \quad . \quad (II-6)$$
Como:

$$\Lambda_{\widehat{2}y}(t;\alpha) = E(\widehat{2}(t) y'(\alpha)) = E\left(\int_{t_0}^{t} h^*(t;\beta) y(\beta) d\beta y(\alpha)\right) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} h^*(t;\beta) E(y(\beta) y'(\alpha)) d\beta = \int_{t_0}^{t} h^*(t;\beta) \Lambda_{yy}(\beta;\alpha) d\beta$$

la ecuación (II-6) se transforma en:

$$\Lambda_{zy}(t;\alpha) - \Lambda_{\hat{z}y}(t;\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in [t_0;t]$$

$$\Lambda_{\tilde{z}y}(t;\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in [t_0;t] , \qquad (II-7)$$

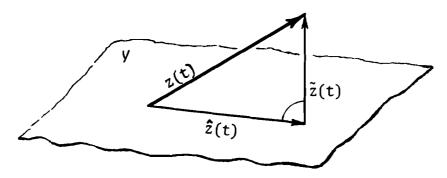
lo cual nos expresa que el error ž no está correlacionado con las observa

ciones y .

INTERPRETACION GEOMETRICA:

Sea Y el sub-espacio generado por el conjunto de las variables aleatorias que son las observaciones $\{y(\beta) \ / \ \beta \ e \ [t_0;t]\}$.

Como \hat{z} es una combinación lineal de las observaciones, resulta que \hat{z} e y. La ecuación (II-7) nos dice que el error de estimación \tilde{z} debe ser ortogonal a y , es decir que $\hat{z}(t)$ es la proyección de z(t) sobre y .



CASO ESTACIONARIO DE LA ECUACION DE WIENER-BOOTON:

En el caso estacionario la ecuación (II-6) de Wiener-Booton se transfo<u>r</u> ma en:

que se denomina ecuación de Wiener-Hopf.

2-3. RESOLUCION DE LA ECUACION DE WIENER-HOPF.

Si la ecuación de Wiener-Hopt fuese válida \forall t , entonces transforman do por Laplace la ecuación (II-8) tendríamos:

$$S_{zy}(s) - H^{*}(s) \cdot S_{yy}(s) = 0$$
 6 sea
$$H^{*}(s) = \frac{S_{zy}(s)}{S_{yy}(s)} \cdot$$

Pero como la ecuación (II-8) solo se verifica \forall $t \ge 0$, deberemos resolverla de otro modo. Para ello veamos algunos conceptos previos.

i) FACTORIZACION DE ESPECTROS:

Para todo espectro $S_{yy}(s)$ existe una factorización fuerte de manera que: $S_{yy}(s) = S_{yy}^{+}(s) \cdot (S_{yy}^{+}(-s))'$,

donde el factor $S_{yy}^{+}(s)$ tiene las siguientes propiedades:

a)
$$S_{yy}^{+}(s)$$
 es realizable, es decir $\mathcal{L}^{-1}(S_{yy}^{+})(t) = 0$ $\forall t < 0$.

b)
$$S_{yy}^{+}(s)$$
 es estable, es decir los polos de $S_{yy}^{+}(s)$ tienen parte real ne gativa.

gativa.
c)
$$(S_{yy}^{+}(s))^{-1}$$
 es realizable y estable.

Notaremos
$$S_{yy}^{-}(s) = (S_{yy}^{+}(-s))'$$
.

ii) PARTE REALIZABLE DE UNA FUNCION:

Llamamos parte realizable de la función f(t) a la función

$$f_{+}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 0 \\ f(t) & \text{si} & t \ge 0 \end{cases}$$

y parte anti-realizable de f(t) a:

$$f_{-}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Además definimos:

$$(F(s))_{+} = \mathcal{L}(f_{+}(t))$$

$$(F(s)) = \mathcal{L}(f_(t))$$

Aplicando estas definiciones tenemos la siguiente propiedad:

LEMA:

Si
$$F_+ = G_+$$
 entonces resulta $(F.D)_+ = (G.D)_+$ \forall $D = D_-$

iii) RESOLUCION DE LA ECUACION:

Ahora estamos en condiciones de resolver la ecuación de Wiener-Hopf:

$$\Lambda_{zy}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\beta) \Lambda_{yy}(\beta) d\beta$$
, válida $\forall t \ge 0$;

o sea que tenemos:

$$\left\{S_{zy}(s)\right\}_{+} = \left\{H(s) \quad S_{yy}(s)\right\}_{+} = \left\{H(s) \quad S_{yy}^{+}(s) \quad S_{yy}^{-}(s)\right\}_{+}$$

Aplicando el lema anterior con la matriz $(S_{yy}^{-}(s))^{-1}$, resulta que

$$\left\{ S_{yy}(s) \mid S_{yy}(s) \mid^{-1} \right\}_{+} = \left\{ H(s) \mid S_{yy}(s) \right\}_{+} = H(s) \mid S_{yy}(s)$$

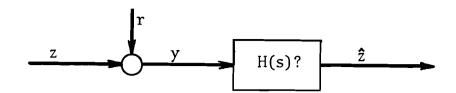
por ser H(s), $S_{yy}^{+}(s)$ realizables.

0 sea

$$H(s) = \left\{ S_{yy}(s) \mid S_{yy}(s) \mid^{-1} \right\} \cdot \left[S_{yy}^{+}(s) \right]^{-1} . \tag{II-9}$$

EJEMPLO:

Consideremos una señal escalar z de espectro $S_{zz}(s) = \frac{1}{1-s^2}$.



Con una señal disponible y = z + r, donde r es un ruido de espectro

$$S_{rr}(s) = k^2.$$

Supongamos además que $S_{rz}(s) = 0$.

Por 1o tanto:

$$S_{yy} = S_{z+r,z+r} = S_{z+z} + S_{z+r} + S_{r+z} + S_{r+r} = S_{z+z} + S_{r+r}$$

o sea que

$$S_{yy}(s) = \frac{1}{1-s^2} + k^2 = \frac{1+k^2(1-s^2)}{1-s^2} = k^2 \frac{b^2-s^2}{1-s^2} = (k \frac{b+s}{1+s}) (k \frac{b-s}{1-s})$$

donde $b^2 = 1 + \frac{1}{k^2}$.

La factorización fuerte de $S_{yy}(s)$ está dada por:

$$S_{yy}^{+}(s) = k \frac{b+s}{1+s}$$
 ; $S_{yy}^{-}(s) = k \frac{b-s}{1-s}$

Como

$$S_{yz}(s) = S_{z+r,z}(s) = S_{zz}(s) + S_{rz}(s) = \frac{1}{1-s^2}$$

tenemos:

$$\left\{S_{zy}(s) \mid S_{yy}(s) \mid^{-1}\right\}_{+} = \left\{\frac{1}{1-s^2} \cdot \frac{1-s}{k(b-s)}\right\}_{+} = \left\{\frac{1}{k(1+s)(b-s)}\right\}_{+} = \frac{1}{k(b+1)(1+s)}.$$

La función de transferencia del filtro viene dada por (II-9), o sea:

$$H(s) = \left\{ S_{yy}(s) \left[S_{yy}^{-}(s) \right]^{-1} \right\}_{+} \cdot \left\{ S_{yy}^{+}(s) \right\}^{-1} = \frac{1}{k(b+1)(1+s)} \cdot \frac{1+s}{k(b+s)} = \frac{1}{k^{2}(b+1)} \cdot \frac{1}{b+s} \cdot \frac{1}{b+s}$$

Como:

$$\frac{1}{k^{2}(b+1)} = \frac{1}{k^{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^{2}}} + 1} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^{2}}} - 1 , \text{ resulta:}$$

$$H(s) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k^{2}}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^{2}}} + s} .$$

2-4. FACTORIZACION DE ESPECTROS RACIONALES.

METODO GENERAL PARA CALCULAR EL FACTOR FUERTE (METODO DE DAVIS)

Sea S(s) una matriz racional n × n (es decir sus elementos son fun-

ciones racionales en la variable s) que satisface:

$$S(s) = S'(-s)$$

$$S(\overline{s}) = \overline{S(s)}$$

$$S(i\omega) \ge 0 \quad \forall \omega \ge 0$$
(II-10)

Queremos que:

$$S(s) = S^{+}(s) \cdot S^{-}(s) = S^{+}(s) \cdot [S^{+}(-s)]'$$

donde S⁺(s), S⁻(s) sean realizables y estables.

Para calcular $S^{\dagger}(s)$, haremos adecuadas transformaciones sucesivas de S(s) hasta llegar a una matriz Q constante y definida positiva. El proceso a seguir es el siguiente:

sea
$$S_o(s) = S(s)$$
,

luego multiplicando por factores $T_i(s)$ estables con det $T_i(s) \neq 0$ para todo Re $s \geq 0$ se obtienen:

$$T_{1}(s) \cdot S_{0}(s) \cdot T_{1}'(-s) = S_{1}(s)$$
 $T_{2}(s) \cdot S_{1}(s) \cdot T_{2}'(-s) = S_{2}(s)$
 \vdots
 $T_{m}(s) \cdot S_{m-1}(s) \cdot T_{m}'(-s) = Q = L \cdot L' > 0$ (matriz constants).

Entonces podemos tomar:

Para realizar las anteriores transformaciones se utilizan 2 tipos de factores:

a)
$$D_{\mathbf{i}}(\alpha(s)) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & \mathbf{0} \\ \ddots & \mathbf{0} \\ & 1 & \alpha(s) & \longleftarrow \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots \end{pmatrix} - \mathbf{i}$$

con $\alpha(s)$ realizable, estable, $\alpha(s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re} s \geq 0$, siendo

$$\begin{cases} D_{i}^{-1}(\alpha(s)) = D_{i}(\alpha^{-1}(s)) \\ \det D_{i}(\alpha(s)) = \alpha(s) \end{cases}$$

b)
$$L_{j}(\alpha_{1}(s), ..., \alpha_{j-1}(s), \alpha_{j+1}(s), ..., \alpha_{n}(s)) =$$

con $\alpha_{\dot{1}}(s)$ realizables, estables \forall \dot{i} ,

siendo

$$\begin{cases} L_{j}^{-1}(\alpha_{1}(s),...;\alpha_{j-1}(s);\alpha_{j+1}(s),...;\alpha_{n}(s)) &= \\ &= L_{j}(-\alpha_{1}(s),...;-\alpha_{j-1}(s);-\alpha_{j+1}(s),...;-\alpha_{n}(s)) \\ \det L_{j}(\alpha_{1}(s),...;\alpha_{j-1}(s),\alpha_{j+1}(s),...;\alpha_{n}(s)) &= 1 \end{cases}.$$

EJEMPLO:

Sea:

$$S(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2s^2 + 5}{(s+1)(-s+1)(-s+2)(s+2)} & \frac{2s + 3}{(s+1)(s+2)(-s+3)} \\ \frac{-2s + 3}{(-s+1)(-s+2)(s+3)} & \frac{2}{(-s+3)(s+3)} \end{pmatrix}.$$

Dejamos como ejercicio verificar que S(s) es un espectro, es decir que S(s) verifica las 3 condiciones de (II-10).

1° ETAPA: SUPRESION DE LOS POLOS DE S(s).

Realizando las siguientes transformaciones:

$$\begin{cases} S_{1}(s) = D_{1}((s+1)(s+2)) . S(s) . D_{1}((-s+1)(-s+2)) \\ S_{2}(s) = D_{2}(s+3) . S_{1}(s) . D_{2}(-s+3) \end{cases}$$

se obtiene:

$$S_2(s) = \begin{pmatrix} -2s^2 + 5 & 2s + 3 \\ -2s + 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2° ETAPA: REDUCCION A UNA MATRIZ DE DETERMINANTE CONSTANTE.

En nuestro ejemplo $\det S_2(s) = 1$.

En el caso general tenemos:

$$\det S_k(s) = a_k \cdot \prod_b (s-b)(s+b)$$

pues $\mathbf{S}_k(\mathbf{s})$ es una matriz de polinomios en \mathbf{s} y los ceros de det $\mathbf{S}_k(\mathbf{s})$ son simétricos respecto del eje Im \mathbf{s} .

Para llegar a una matriz de determinante constante, transformaremos la

matriz $S_k(s)$ de manera de ir eliminando sus ceros.

Sea b un cero del det $S_k(s)$; por lo tanto $S_k(b)$ es una matriz sin = 0 gular, o sea que existe una línea $\rho_i(fila \ \delta \ columna)$ de manera que:

$$\rho_{j} + \sum_{m \neq j} \alpha_{m} \cdot \rho_{m} = 0 \quad .$$

Considerando como factor:

$$T_{k+1}(s) = L_j\left(\frac{\alpha_1}{s+b}; \ldots; \frac{\alpha_n}{s+b}\right) \cdot D_j\left(\frac{1}{s+b}\right)$$

la matriz
$$S_{k+1}(s) = T_{k+1}(s)$$
. $S_k(s)$. $T'_{k+1}(-s)$

tiene la propiedad de no tener a \pm b como ceros de su determinante. Por lo tanto repitiendo este proceso para todos los ceros (cuyo número es finito), se llega a una matriz de determinante constante.

3° ETAPA: FACTORIZACION DE UNA MATRIZ POLINOMIAL DE DETERMINANTE CONSTANTE. Vamos a explicar el caso general en el ejemplo:

$$S_2(s) = \begin{pmatrix} -2s^2 + 5 & 2s + 3 \\ -2s + 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Como el determinante es constante (=1), la matriz

$$S_2(s) = \begin{pmatrix} -2s^2 & 2s \\ -2s & 2 \end{pmatrix}$$

es singular. En consecuencia se verifica

$$\rho_1 - s\rho_2 = 0$$

donde ρ_1 es la linea que tiene el término de mayor grado y ρ_2 la restante.

Formamos la matriz

$$L_{1}(-s) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con la que obtenemos:

$$S_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_2(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

que es una matriz constante.

En general, habrá que repetir el procedimiento más veces, pero al fin lle garemos a una matriz constante.

4° ETAPA: CONCLUSION.

El factor fuerte es:

$$S_{+}(s) = D_{1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right) D_{2}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) L_{1}(s) \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0\\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(3s+5)}{\sqrt{5}} & \frac{s}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ya que una factorización de la matriz constante es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

II-3: FILTRO DE KALMAN.

3-1: INTRODUCCION.

En un problema de filtrado estadístico uno de los objetivos más importantes es tratar de conseguir un filtro recursivo. Para aclarar este punto supongamos, por ejemplo, que queremos estimar una magnitud x desconocida, para lo cual hacemos n medidas:

$$y_i = x + \omega_i$$

es el error en la medición i que verifica:
$$\begin{cases} E(\omega_i) = 0 & \forall i = 1; \dots; n \\ E(\omega_i.\omega_j) = \delta_{ij} & \forall i; j = 1; \dots; n \end{cases}$$

Sabemos que el mejor estimador es:

$$\hat{x}_n = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} ...$$

Si obtenemos una nueva observación \mathbf{y}_{n+1} , el estimador correspondiente será: $\hat{x}_{n+1} = \frac{y_1 + \cdots + y_{n+1}}{1 + \cdots + y_{n+1}}$

10 que implica, que para calcular $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{n+1}}$, debemos volver a hacer todos los cálculos. Para evitar este inconveniente observemos que:

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{y_{n+1} - \hat{x}_n}{y_{n+1}}$$

Esta es una fórmula recursiva que da la nueva estimación \hat{x}_{n+1} en función de la nueva observación y_{n+1} y de la estimación anterior \hat{x}_n . Esto evita el inconveniente de conservar las observaciones anteriores.

Nos interesa estudiar cuales son los problemas del filtrado que admiten una estimación recursiva.

En el filtro de Wiener, la estimación es:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau). \ y(\tau). \ d\tau$$

que no es recursivo.

3.2: RUIDO BLANCO - INTEGRAL ESTOCASTICA DE ITO.

Llamamos Movimiento Browniano o proceso de Wiener-Levy (vectorial) a un proceso estocástico V(t) que verifica:

a)
$$V(0) = 0$$

b)
$$\Delta(t_i;t_j) = V(t_i) - V(t_j)$$
 es gaussiano $\forall t_i > t_j$.

c)
$$E(\Delta) = 0$$

d) $E(\Delta(t_i;t_j).\Delta'(t_i;t_j)) = \int_{t_j}^{t_i} Q(t)dt$, con $Q(t) \ge 0$.

e) Si I,J son intervalos de tiempos tales que I N J = ϕ , entonces $E(\Delta(I).\Delta'(J))$ = 0 .

INTEGRAL ESTOCASTICA.

Dado V(t) un movimiento browniano escalar con:

$$E(\Delta^{2}(t_{i};t_{j})) = |t_{i} - t_{j}|$$

queremos dar sentido a: $I_f = \int_{a}^{t} f(\alpha) . dV(\alpha)$.

Como V(t) no es de variación acotada, (pág.61), no podemos aplicar integral de Stieltjes.

Para definir $I_{\mathbf{f}}$, analicemos los siguientes casos:

i) Si
$$f(\alpha) = 1 \ \forall \alpha$$
, entonces definimos $I_f = \int_0^t dV(\alpha) = V(t) - V(0)$.

ii) Si f es una función escalera, es decir:

$$f(\alpha) = \sum_{j} c_{j} \chi_{(t_{j};t_{j+1})}(\alpha)$$

donde $x_{(t_j;t_{j+1})}$ es la función característica del intervalo $(t_j;t_{j+1})$, en

tonces definimos:

$$I_{f} = \sum_{j} c_{j} [V(t_{j+1}) - V(t_{j})] = \sum_{j} c_{j} \Delta(t_{j+1}; t_{j})$$
.

Del mismo modo si $g(\alpha) = \sum_{i} d_{i} \chi_{(t_{i};t_{i+1})}(\alpha)$ es otra función escalera, entonces:

$$I_g = \sum_{i} d_i [V(t_{i+1}) - V(t_i)] = \sum_{i} d_i \Delta(t_{i+1}; t_i)$$
.

De esta manera hemos definido una aplicación I, que a cada función esca lera f le asigna una variable aleatoria $\rm I_f$.

De la definición de movimiento browniano se deduce que:

a)
$$E(I_f) = E(\sum_{i} c_i \Delta(t_{i+1};t_i)) = \sum_{j} c_j E(\Delta(t_{i+1};t_i)) = 0$$

b)
$$E(I_f^2) = E(\sum_{i,j} c_i c_j \Delta(t_{i+1}; t_i) \Delta(t_{j+1}; t_j)) =$$

$$= \sum_{i,j} c_i c_j E(\Delta(t_{i+1}; t_i) \Delta(t_{j+1}; t_j)) = \sum_j c_j^2 |t_{j+1} - t_j|^2 =$$

$$= \int_0^t |f(\alpha)|^2 d\alpha = ||f||_2^2 \quad (*) \quad (II-11)$$

c)
$$E(I_f.I_g) = \int_0^t f(\alpha).g(\alpha)d\alpha$$
.

La expresión (II-11) nos indica que la aplicación I conserva la norma. iii) Sea $f \in L^2(0;t)$.

Como el conjunto de las funciones escaleras es denso en $L^2(0;t)$, existe una sucesión de funciones escaleras $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en L^2 . Al ser f_n una función escalera, conocemos I_{f_n} por ii).

Por ser $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy e I una aplicación que conserva la norma, tenemos que (I_f) es una sucesión de Cauchy en un espacio n n e N aleatorio completo y por lo tanto existe un elemento I , del espacio alea torio al cual converge; por otra parte es fácil verificar que este límite es independiente de la sucesión elegida.

(*)
$$\|...\|_2$$
 representa la norma en el espacio $L^2(0,t) = \{f / \int_0^t |f(\alpha)|^2 d\alpha = \|f\|_2^2 < +\infty\}$

Entonces definimos:

$$I_f = \lim_{n \to +\infty} I_n$$

variable aleatoria que verifica:

$$\begin{cases} E(I_f) = 0 \\ E(I_f \cdot I_g) = \int_0^t f(\alpha) \cdot g(\alpha) d\alpha & \forall f; g \in L^2(0;t) \end{cases}$$

Consideremos un movimiento browniano no estacionario que verifique:

$$E(\Delta(t_i;t_j)^2) = \int_{t_i}^{t_j} Q(\alpha)d\alpha$$
 , con $Q(\alpha) \ge 0$.

Podemos definir de la misma manera una aplicación de L2(0;t;Q) (*) en el espacio de variables aleatorias

$$I_{f} = \int_{0}^{t} f(\alpha)d V(\alpha)$$

con las propiedades precedentes

$$E(I_f I_g) = \int_0^t f(\alpha) g(\alpha) Q(\alpha) d\alpha .$$

CASO VECTORIAL

Podemos considerar también un movimiento browniano vectorial V(α) de di mensión n tal que

$$E(\Delta(t_2,t_1) \Delta'(t_2,t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} Q(\alpha)d\alpha$$

donde $Q(\alpha)$ es una matriz definida positiva.

Entonces si $\phi(\alpha)$ y $\psi(\alpha)$ son matrices $m \times n$ y $p \times n$, las integra les estocásticas

$$I_{\phi} = \int_{t_1}^{t_2} \phi(\alpha) . dV(\alpha) \qquad , \qquad I_{\psi} = \int_{s_1}^{s_2} \psi(\alpha) . dV(\alpha)$$

son vectores de dimensión m y p.

Se demuestra que:

Se demuestra que:
$$E(I_{\phi}) = E(I_{\psi}) = 0 \quad ; \quad E(I_{\phi}.I_{\psi}') = \int_{\tau}^{\tau_2} \phi(\alpha).Q(\alpha).\psi'(\alpha)d\alpha$$
 donde $(\tau_1;\tau_2) = (t_1;t_2) \cap (s_1;s_2)$.

RUIDO BLANCO:

Si reemplazamos la expresión $dV(\alpha)$ por $V(\alpha)d\alpha$ nos queda:

$$I_{f} = \int_{0}^{t} f(\alpha)dV(\alpha) = \int_{0}^{t} f(\alpha).v(\alpha)d\alpha ,$$

(*) Es decir f e L^2(0;t;Q)si $\int_0^t |f|^2 \; Q \, d\alpha \; < \infty \;$ que da la norma de f .

donde v se 11ama ruido blanco.

El ruido blanco $\,v\,$ no tiene sentido si no está como integrando. Veamos qué condiciones debe cumplir $\,v\,$, para que se verifiquen las propiedades conocidas para $\,I_{\rm f}\,$.

Sean:
$$I_f = \int_0^t f(\alpha) \cdot v(\alpha) d\alpha$$
, $I_g = \int_0^t g(\beta) \cdot v(\beta) d\beta$

a) como sabemos que:

$$E(I_f) = 0 = \int_0^t f(\alpha) \cdot E(v(\alpha)) d\alpha$$

entonces debe verificarse que:

$$E(v(\alpha)) = 0 \quad \forall \alpha$$

b) como sabemos que: $E(I_f, I_g) = \int_0^t f(\alpha) \cdot g(\alpha) d\alpha$

y además:

$$E(I_f. I_g) = \int_0^t \int_0^t f(\alpha). g(\beta). E(v(\alpha). v(\beta)) d\alpha d\beta$$

entonces para que se verifique la igualdad debe ser:

$$E(v(\alpha), v(\beta)) = \delta(\alpha-\beta)$$

c) en el caso general se obtiene que:

$$E(v(\alpha), v'(\beta)) = Q(\alpha), \delta(\alpha-\beta)$$

OBSERVACION:

También pueden introducirse integrales estocásticas relativas a funciones estocásticas, surgiendo distintos tipos: integral de Ito, integral de Stratanovich y otros.

Pero estas generalizaciones coinciden en el caso lineal y/ó determinístico.

3-3. SISTEMA LINEAL EXCITADO POR UN RUIDO BLANCO.

Sea la ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t).x + v(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde x(t) es un vector aleatorio y v(t) un ruido blanco que verifican:

$$\begin{cases} E(x_o) = 0 \\ E(x_o.x_o') = \Lambda_o \\ E(v(t)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(v(t). \ v'(s)) = Q(t). \ \delta(t-s), & \text{con } Q(t) \ge 0 \\ E(x(t_o).v'(s)) = 0, & \text{for } Q(t) \ge 0 \end{cases}$$

Por definición la solución de esta ecuación es el proceso estocástico:

$$x(t) = \Phi(t;t_0) \cdot x_0 + \int_t^t \Phi(t;\alpha) \cdot v(\alpha)d\alpha$$

siendo el último sumando una integral de Ito y $\Phi(t;\alpha)$ la matriz de transi ción correspondiente a la matriz de coeficientes F(t)

PROPIEDADES.

a) COVARIANCIA DE x(t)

Como
$$x(t).x'(s) = \Phi(t;t_o).x_o.x_o'.\Phi'(s;t_o) + \int_t^t \Phi(t;\alpha).v(\alpha).x_o'.\Phi'(s;t_o)d\alpha$$

$$+ \int_t^s \Phi(t;t_o).x_o.v'(\beta).\Phi'(s;\beta)d\beta + \int_t^t \int_0^s \Phi(t;\alpha).v(\alpha).v'(\beta).\Phi'(s;\beta)d\alpha d\beta$$

entonces teniendo en cuenta las hipótesis hechas, resulta:

$$\Lambda(t;s) = E(x(t).x'(s)) = \Phi(t;t_0).\Lambda_0.\Phi'(s;t_0) + \int_{t_0}^{\min(t;s)} \Phi(t;\alpha).Q(\alpha).\Phi'(s;\alpha)d\alpha.$$

b) VARIANCIA DE x(t).

$$\Lambda(t) = \Lambda(t;t) = E(x(t).x'(t)) = \Phi(t;t_o).\Lambda_o.\Phi'(t;t_o) + \int_t^t \Phi(t;\alpha).Q(\alpha).\Phi'(t;\alpha)d\alpha .$$

Derivando respecto de $\,$ t , resulta el siguiente algoritmo que se adapta m $\underline{\mathrm{e}}$ jor para ser usado en computadora.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Lambda(t) = F(t) \cdot \Lambda(t) + \Lambda(t) \cdot F'(t) + Q(t) \\ \Lambda(t_0) = \Lambda_0 \end{cases}$$

c) x(t) es un proceso de Markov.

3-4. PROCESOS DE MARKOV.

Un proceso estocástico vectorial x(t) se denomina un proceso de Markov si se verifica que:

$$P\{x(t) / x(s_1); x(s_2); ...; x(s_n)\} = P\{x(t) / x(s_1)\} + t > s_1 > s_2 > ... > s_n$$

De esta definición concluimos que el estado de un sistema dinámico 1<u>i</u> neal excitado por un ruido blanco constituye un proceso de Markov, pues x(t)

queda determinado conociendo
$$x(s_1)$$
 , al ser:
$$x(t) = \Phi(t;s_1) \cdot x(s_1) + \int_{s_1}^{t} \Phi(t;\alpha) \cdot v(\alpha) d\alpha$$

donde $v(\alpha)$ es un ruido blanco independiente de x(t) en $[s_1;t]$.

Reciprocamente se puede demostrar el siguiente:

TEOREMA:

Los procesos estocásticos gaussianos de Markov pueden ser considerados (bajo hipótesis bastante generales) como estados de un sistema lineal excitado por un ruido blanco. (*)

Demos un lineamiento de la demostración:

Sea x(t) un proceso gaussiano de Markov con E(x(t)) = 0, entonces $P\{x(t) / x(s); x(u)\} = P\{x(t) / x(s)\}$ $\forall t > s > u$;

δ sea $E\{x(t) / x(s); x(u)\} = E\{x(t) / x(s)\} = \Lambda(t;s).\Lambda^{-1}(s,s). x(s)$ donde $\Lambda(t;s) = E\{x(t). x'(s)\}$.

Como $x(t) - E\{x(t) / x(s); x(u)\} = x(t) - \Lambda(t;s) \cdot \Lambda^{-1}(s,s) \cdot x(s)$, es independiente de x(u), resulta que:

$$E\{x(t).x'(u) - \Lambda(t;s).\Lambda^{-1}(s;s).x(s).x'(u)\} = 0$$
,

o sea:

$$\Lambda(t;u) - \Lambda(t;s) \cdot \Lambda^{-1}(s;s) \cdot \Lambda(s;u) = 0 \qquad \forall \quad t > s > u$$

que representa una condición necesaria y suficiente para que x(t) sea markoviano.

Sea $\Phi(t;u) = \Lambda(t;u) \cdot \Lambda^{-1}(u;u)$, entonces la condición anterior se espresa por:

$$\Phi(t;u) = \Phi(t;s) \cdot \Phi(s;u) \quad \forall t > s > u$$

Esta propiedad de Φ , nos induce a pensar que constituye la matriz de transición de un sistema dinámico; puede demostrarse que de cumplirse ciertas condiciones adicionales (por ejemplo , si la derivada de $\Phi(t;s)$ en t existe), existe F(t) que satisface:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(t;s) = F(t) \cdot \Phi(t;s) \cdot$$

Definiendo el proceso: $I(t) = \Phi(0;t)$. x(t) - x(0) (que es de Wiener-Levy), $y = V(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(\alpha;0) . d I(\alpha)$ (que es también de Wiener-Levy) se demuestra que el proceso inicial x(t) es solución de:

$$\dot{x} = F(t).x + v(t) ,$$

donde v(t) es el ruido blanco asociado a V(t) .

(*) Por ejemplo, una condición suficiente es que exista $\frac{\partial}{\partial t_{+}} \wedge (t,s) \Big|_{t=s}$

3-5. PROCESOS CON REPRESENTACION DE GAUSS-MARKOV.

Se dirá que un proceso no-markoviano y(t) tiene una representación de Gauss-Markov si existe un proceso de Gauss-Markov x(t), que satisfaga:

$$y(t) = H(t). x(t) + \omega(t) ,$$

donde $\omega(t)$ es un ruido blanco.

Estos procesos son los que admiten un filtro recursivo; más precisamen te:

Existe un filtro estadístico recursivo para un problema de filtrado $\binom{y(t)}{z(t)}$ sí y solo sí existe una representación de Gauss-Markov para $\binom{y}{z}$, es decir si:

$$\begin{cases} x = F.x + v \\ y = H.x + \omega \\ z = J.x \end{cases}$$

con v, ω ruidos blancos.

Estos son los procesos que trata el filtro de Kalman.

3-6. FILTRO DE KALMAN.

- i) CASO DE OBSERVACIONES DISCRETAS.
 - a) EL PROBLEMA:

Sea el sistema dinámico: (II-12)que satisface:

$$\begin{cases} E\{v(\alpha)\} = 0 \\ E\{v(\alpha).v'(\beta)\} = Q(\alpha). \ \delta(\alpha-\beta) & \text{con} \quad Q(\alpha) \ge 0 \\ E\{x(t_0)\} = 0 \\ E\{x(t_0). \ x'(t_0)\} = \Lambda_0 \end{cases}.$$
 En los instantes $t_1 < t_2 < \dots$, tenemos las observaciones:
$$y(t_i) = H(t_i). \ x(t_i) + \omega(t_i) \quad ,$$
 dende

$$y(t_i) = H(t_i) \cdot x(t_i) + \omega(t_i)$$
,

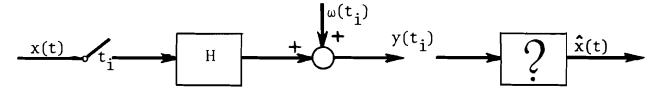
donde

$$\begin{cases} E\{\omega(t_i)\} = 0 \\ E\{\omega(t_i). \omega'(t_j)\} = R(t_i). \delta_{ij} . \end{cases}$$

El problema consiste en calcular el mejor estimador:

$$\tilde{x}(t) = E\{x(t) / y(t_i); ...; y(t_i)\}$$
 para $t_i \le t < t_{i+1}$.

Esquemáticamente queda expresado por:



b) SOLUCION:

Sea
$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$
 el error, y

 $\Sigma(t) = E(\tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))$ la covariancia del error.

Analizaremos por separado los siguientes casos

 b_1) EN EL INSTANTE INICIAL (t = t_0):

Es evidente que

$$\hat{x}(t_o) = E\{x(t_o)\} = 0$$

 $\Sigma(t_o) = E\{\tilde{x}(t_o), \tilde{x}'(t_o)\} = E\{x(t_o), x'(t_o)\} = \Lambda_o$.

 b_{2}) ENTRE DOS OBSERVACIONES $(t_{i} < t < t_{i+1})$:

Sea τ un instante tal que:

Como: $t_{i} < \tau < t < t_{i+1}$ $x(t) = \Phi(t;\tau).x(\tau) + \int_{\tau}^{t} \Phi(t;\alpha). \ v(\alpha) d\alpha$ resulta que:

$$\hat{x}(t) = E\{x(t) / y(t_0); ...; y(t_i)\} = \Phi(t;\tau).E\{x(\tau) / y(t_0); ...; y(t_i)\} + \int_{\tau}^{t} \Phi(t;\alpha).E\{v(\alpha) / y(t_0); ...; y(t_i)\}.d\alpha = \Phi(t;\tau).\hat{x}(\tau).$$

Derivando tenemos: $\hat{x} = F$. \hat{x}

teniendo en cuenta (II-12), resulta:

$$\dot{\tilde{x}} = F \cdot \tilde{x} + v \qquad .$$

Además $\Sigma(t)$ verifica:

$$\dot{\Sigma} = F \Sigma + \Sigma F^{\dagger} + Q$$

ver propiedad b), pág.75.

 b_3) EN EL INSTANTE DE UNA OBSERVACION (t = t_i)

Consideremos los 2 siguientes estimadores:

$$\hat{x}(t_i) = E\{x(t_i) / y(t_i) ; ...; y(t_{i-1})\}$$
,

que no tiene en cuenta la observación $y(t_i)$; con el algoritmo del caso b_2) se obtiene:

$$\hat{x}(t_i^+) = E\{x(t_i) / y(t_i) ; ...; y(t_i)\}$$

que incorpora la información recibida en el instante $\ t_i$; es el valor que debemos calcular.

Sea $Y(t_i)$ el espacio generado por las observaciones $y(t_i); ...; y(t_i)$ o sea: $y(t_i) = S.E\{y(t_i); ...; y(t_i)\} =$

donde:
$$= S.E\{y(t_{1}); ...; y(t_{i-1}) \oplus S.E\{\eta(t_{i})\}$$
$$\eta(t_{i}) = y(t_{i}) - H(t_{i}). \hat{x}(t_{i}^{-}) .$$

Entonces, por propiedad de la esperanza condicionada, resulta:

$$x(t_{i}^{+}) = E\{x(t_{i}) / y(t_{i}); ...; y(t_{i})\} = E\{x(t_{i}) / y(t_{i}); ...; y(t_{i-1})\} +$$

$$\begin{array}{l} \text{donde:} & + \ \mathrm{E}\{x(t_i) \ / \ \eta(t_i)\} = \ \hat{x}(t_i^-) + \ \mathrm{K}(t_i) \cdot \ \eta(t_i) \\ & \times (t_i) = \ \mathrm{E}\{x(t_i) \cdot \ \eta'(t_i)\} \cdot \left[\ \mathrm{E}\{\eta(t_i) \cdot \ \eta'(t_i) \right]^{-1} = \\ & = \ \Sigma(t_i^-) \cdot \ \mathrm{H}'(t_i) \cdot \left[\ \mathrm{H}(t_1) \cdot \ \Sigma(t_i^-) \cdot \ \mathrm{H}'(t_i) + \ \mathrm{R}(t_i) \right]^{-1} \end{array}$$

se 11ama ganancia del filtro.

Entonces:

$$\Sigma(t_{i}^{+}) = E\{\tilde{x}(t_{i}^{+}). \ \tilde{x}'(t_{i}^{+})\} = \Sigma \ (t_{i}^{-}) - \Sigma \ (t_{i}^{-}). \ H'(t_{i}).$$

$$. \left[H(t_{i}). \ \Sigma \ (t_{i}^{-}). \ H'(t_{i}) + R(t_{i})\right]^{-1} \ H(t_{i}). \ \Sigma(t_{i}^{-}).$$

Por lo tanto el filtro de Kalman queda definido ♥ t ≥ t ecuaciones:

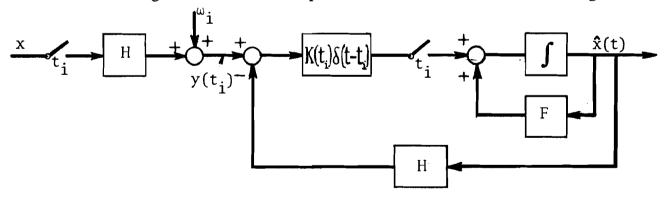
a) ENTRE OBSERVACIONES:

$$\hat{x} = F.\hat{x} , \hat{x}(t_0) = 0$$

$$\hat{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' + Q , \Sigma (t) = \Lambda_0$$
b) EN EL INSTANTE DE UNA OBSERVACION:

$$\begin{cases} \hat{x}(t_{i}^{+}) = \hat{x}(t_{i}^{-}) + K(t_{i}) : n(t_{i}) \\ n(t_{i}) = y(t_{i}) - H(t_{i}) . \hat{x}(t_{i}^{-}) \\ K(t_{i}) = \Sigma(t_{i}^{-}) . H'(t_{i}) . \left[H(t_{i}) . \Sigma(t_{i}^{-}) . H'(t_{i}) + R(t_{i})\right]^{-1} \\ \Sigma(t_{i}^{+}) = \Sigma(t_{i}^{-}) - \Sigma(t_{i}^{-}) . H'(t_{i}) . \left[H(t_{i}) . \Sigma(t_{i}^{-}) . H'(t_{i}) + R(t_{i})\right]^{-1} . \\ . H(t_{i}) . \Sigma(t_{i}^{-}) . \end{cases}$$

El diagrama funcional representativo del filtro es el siguiente:



ii) CASO DE OBSERVACIONES CONTINUAS:

Consideremos el sistema:

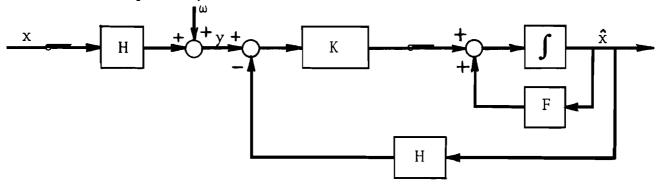
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t) x(t) + v(t) \\ y(t) = H(t) . x(t) + \omega(t) \end{cases}$$

que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} E\{v(\alpha)\} = E\{\omega(\alpha)\} = 0 \\ E\{v(\alpha).v'(\beta)\} = Q(\alpha).\delta(\alpha-\beta) , \text{ con } Q(\alpha) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E\{\omega(\alpha).\omega'(\beta)\} = R(\alpha).\delta(\alpha-\beta) &, \text{ con } R(\alpha) \ge 0 \\ E\{v(\alpha).\omega'(\beta)\} = 0 \\ E\{x(t_0).x'(t_0)\} = \Lambda_0 \end{cases}$$

En este caso, las observaciones están dadas con continuidad (los instantes t_i son densos en la recta), por lo cual en el diagrama anterior cerramos los interruptores y eliminamos la δ .



Se puede demostrar con más vigor que la estructura del filtro óptimo, en el caso de las observaciones continuas, viene dado por:

$$\hat{\hat{x}} = F.\hat{x} + K.[y - H\hat{x}]$$

donde K debe calcularse de manera que la covariancia de error sea mínima.

El error
$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$
, verifica:
$$\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} - K.[y - H\hat{x}] + v = (F - KH).\tilde{x} + (v - K\omega)$$
,

donde $(v-K_{\omega})$ es un ruido blanco, con covariancia:

$$E\{(v(\alpha) - K(\alpha).\omega(\alpha)).(v'(\beta) - \omega'(\beta).K'(\beta))\} =$$

$$= [Q(\alpha) + K(\alpha).R(\alpha).K'(\beta)].\delta(\alpha-\beta).$$

Por 1o tanto, la covariancia:

$$\Sigma (t) = E\{\tilde{x}(t).\tilde{x}'(t)\}$$

está dada por:

$$\dot{\Sigma} = (F - KH) \cdot \Sigma + \Sigma (F - KH)' + KRK' + Q$$
,

como el segundo miembro de esta ecuación es cuadrático en K , resulta:

$$\dot{\Sigma} = (K - \Sigma H'R^{-1}) \cdot R \cdot (K' - R^{-1}H \cdot \Sigma) + F \Sigma + \Sigma F' - \Sigma H' \cdot R^{-1} \cdot H \Sigma + Q .$$

En este caso basta minimizar $\dot{\Sigma}$ para minimizar Σ (*) y, suponien do que estamos en el caso regular del filtro (es decir R > 0) el mínimo se obtiene para: $K = \Sigma \cdot H^{\bullet} \cdot R^{-1}$.

Por lo tanto el filtro de Kalman, para el problema considerado, está da

^(*) Ver P. Faurre, ''Navigation invertielle optimale et filtrage statistique'', $D\underline{u}$ nod 1971.

do por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = F. \Sigma + \Sigma.F' - \Sigma.H'R^{-1}H\Sigma + Q \\ \Sigma(t_o) = \Lambda_o \end{cases}$$
 (ecuación de Riccati)
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = F.\hat{x} + \Sigma.H'R^{-1}(y - H.\hat{x}) \\ \hat{x}(t_o) = 0 \end{cases}$$
 (ecuación lineal)

donde: $K = \Sigma . H' R^{-1}$, representa la ganancia del filtro.

EJEMPLO:

Consideremos el ejemplo que analizamos para el filtro de Wiener, cuya representación markoviana es la siguiente:

$$\dot{x} = -x + v
y = x + \omega
E\{\dot{v}(t)\} = E\{\omega(t)\} = 0
E\{v(t).v(s)\} = \delta(t-s)
E\{\omega(t).\omega(s)\} = k^2.\delta(t-s)
E\{x(t_0).x(t_0)\} = \frac{1}{2} .$$

De acuerdo con la nomenclatura anterior, resulta:

$$F = -1$$

$$H = 1$$

$$R = k^2$$

$$Q = 1$$

Plantenado las ecuaciones correspondientes al filtro de Kalman, tenemos que: $(\dot{z} - \dot{z}) = \Sigma^2$

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = -2 \Sigma - \frac{\Sigma^2}{k^2} + 1 \\ \Sigma(t_0) = \frac{1}{2} & k^2 \\ \dot{\hat{x}} = -\hat{x} + \frac{\Sigma}{k^2} (y - \hat{x}) \\ \hat{x}(t_0) = 0 & . \end{cases}$$

Consideramos el proceso cuando ha alcanzado un estado estacionario (supongamos $t_0 = -\infty$). Este estado está caracterizado por $\dot{\Sigma}_{\infty} = 0$ cuya solución es: $\sum_{\infty} = k^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} - 1 \right)$

Resulta entonces: $\hat{x} = -\begin{pmatrix} 1 & + \\ - & - \end{pmatrix}$

 $\dot{\hat{x}} = -\left(1 + \frac{\Sigma_{\infty}}{k^2}\right)\hat{x} + \frac{\Sigma_{\infty}}{k^2} y ,$

de donde la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{\frac{\sum_{\infty}}{k^2}}{\left(1 + \frac{\sum_{\infty}}{k^2}\right) + s} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} + s},$$

lo cual nos está indicando que el filtro de Kalman asıntótico coincide con el filtro de Wiener.

II-4, COMPLEMENTO SOBRE EL FILTRO DE KALMAN.

4-1. CORRELACION ENTRE LOS RUIDOS BLANCOS DEL MODELO (CASO CONTINUO).

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + v \\ y = Hx + \omega \end{cases}$$

que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} E\{x(t_0).x'(t_0)\} = \Lambda_0 \\ E\{v(t)\} = E\{\omega(t)\} = 0 \\ E\left\{\begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} (v'(\tau) \omega'(\tau)) \right\} = \begin{pmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{pmatrix}. \delta(t-\tau) \end{cases}$$
Por analogo procedimiento que en el caso anterior la

Por análogo procedimiento que en el caso anterior, la estructura del fil

tro viene dada por:

$$\hat{\hat{x}} = F.\hat{x} + K(y-H.\hat{x})$$

resultando:

$$\dot{\tilde{x}} = (F - KH)\tilde{x} + (v - K\omega)$$

$$\dot{\Sigma} = (F - KH) \Sigma + \Sigma \cdot (F - KH)' + Q + KRK' - KS' - SK'$$

donde $(v-K\omega)$ es un ruido blanco, con covariancia:

$$E\{(v(t) - K(t)\omega(t)), (v(\tau) - K(\tau), \omega(\tau))'\} = [Q(t) + K(t), R(t), K'(\tau) - S(t), K'(\tau) - K(t), S'(t)], \delta(t-\tau) .$$

Completando el cuadrado en la ecuación que nos da $\dot{\Sigma}$, obtenemos:

$$\dot{\Sigma} = [K - (\Sigma H' + S)R^{-1}] .R.[K - (\Sigma H' + S)R^{-1}]' + F\Sigma + \Sigma F' - (\Sigma H' + S)R^{-1}] . (H\Sigma + S') + Q$$

Nuevamente minimizar Σ , equivale a minimizar $\dot{\Sigma}$,lo cual se logra to mando $K = (\Sigma \ H' + S)R^{-1} \quad \text{por ser} \quad R > 0 \quad .$

Por lo tanto, el filtro de Kalman está dado por:

Observemos que con S = 0 se obtiene el filtro de Kalman hallado en (3-6).

En forma análoga, se puede hallar el filtro para el caso discreto.

4-2. FILTRO SINGULAR. (MATRIZ R NO INVERTIBLE)

i) CASO DISCRETO:

Para analizar este caso es preciso introducir el concepto de matriz pseu do-inversa.

Si A es una matriz regular, definimos como matriz inversa de A , (que

simbolizamos A⁻¹) a aquella matriz que cumpla:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$
;

en cambio si A es una matriz singular (det A = 0), llamaremos matriz pseudo-inversa de A (que simbolizaremos A[†]) a la matriz que verifique:

$$\begin{cases} A \cdot A^{\dagger} \cdot A = A \\ A^{\dagger} \cdot A \cdot A^{\dagger} = A^{\dagger} \\ A^{\dagger} \cdot A, A \cdot A^{\dagger} : \text{matrices simétricas} \end{cases}$$

Se puede demostrar que la matriz pseudo-inversa A[†] existe y es única. Además se verifica que para toda matriz A regular $A^{\dagger} = A^{-1}$.

Volviendo al problema del filtrado sabemos que la mejor estimación de un vector x_1 , en términos de otro vector conocido x_2 está dada por: $E\{x_1\ /\ x_2\}\ =\ m_1\ +\ \Sigma_{12}\ .\ \Sigma_{22}^{-1}\ (x_2\ -\ m_2)\ ;$

$$E\{x_1 / x_2\} = m_1 + \Sigma_{12} \cdot \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - m_2) ;$$

es una matriz regular.

Se demuestra que en el caso de que Σ_{22} sea una matriz singular,

$$m_1 + \Sigma_{12} \cdot \Sigma_{22}^{\dagger} \cdot (x_2^{22} - m_2)$$

da la mejor estimación de x_1 entonces la resolución del problema del filtro singular se realiza con las mismas fórmulas del caso regular empleando matrices pseudo-inversas en lugar de las inversas que no existan. Analicemos qué significa que Σ sea singular.

Si Σ_{22} es singular, entonces:

$$\exists \alpha_1 \neq 0 / \alpha_1' \cdot \Sigma_{22} \cdot \alpha_1 = 0$$
,

o sea que:

$$E\{||\alpha_1'.x_2||^2\} = 0$$

de lo cual resulta:

$$\alpha_1' \cdot x_2 = 0$$

Esto nos está indicando que las componentes de x son linealmente depen dientes, lo cual equivale a haber aumentado artificialmente la dimensión del vector x.

Veremos como reducir el problema singular a uno regular de dimensión me nor.

ii) CASO CONTINUO:

En este caso no podemos utilizar la matriz pseudo-inversa, por lo cual emplearemos el método de reducción del problema singular a uno regular, que también puede emplearse en el caso discreto.

Sea el sistema:
$$\begin{cases} \dot{x} = F.x + v \\ y = H.x + \omega \end{cases}$$

donde v, ω son ruidos blancos, siendo:

 $E\{\omega(t).\omega'(\tau)\} = R(t).\delta(t-\tau)$, con $R(t) \neq 0$ (det R(t) = 0; sobre el intervalo)

lo cual nos dice que:

$$\exists \alpha(t) \neq 0 \quad \forall t / \alpha'(t).\omega(t) = 0$$
.

Por 10 tanto:

$$\alpha'y = \alpha'H.x + \alpha'\omega = \alpha'.H.x$$

o sea que existen combinaciones lineales de los estados que pueden estimarse sin error.

A continuación hacemos un cambio de base de modo que las r-primeras compo nentes del vector x sean aquellas combinaciones lineales que pueden estimarse sin error, resultando entonces:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1} = F_{11} \cdot x_{1} + F_{12} \cdot x_{2} + v_{1} \\ \dot{x}_{2} = F_{21} \cdot x_{1} + F_{22} \cdot x_{2} + v_{2} \\ y_{1} = x_{1} \\ y_{2} = H_{2} \cdot x_{2} + \omega_{2} \end{cases}$$

donde:

$$E \left\{ \omega_{2}(t).\omega_{2}^{\dagger}(\tau) \right\} = R_{2}(t).\delta(t-\tau).$$

 $E \{\omega_2(t).\omega_2'(\tau)\} = R_2(t).\delta(t-\tau).$ Ahora, el problema consiste en calcular \hat{x}_2 , pues x_1 es observado sin error; para ello la intormación de la que disponemos está dada por:

$$\begin{cases} y_2 = H_2 \cdot x_2 + \omega_2 \\ y_3 = \dot{y}_1 - F_{11} \cdot y_1 = F_{12} \cdot x_2 + v_1 \end{cases}$$

 $\begin{cases} y_3 = y_1 - F_{11}.y_1 = F_{12}.x_2 + v_1 \\ v_1 \end{cases}$ donde $\binom{\omega_2}{v_1}$ es el ruido sobre el nuevo vector de las observaciones, con: $E\left\{\binom{\omega_2(t)}{v_1(t)} \left(\frac{\omega_2'(\tau)}{v_1'(\tau)} \right) \right\} = R_3(t).\delta(t-\tau) \qquad .$

En el caso de que:

- a) R₃(t) sea regular, el proceso termina realizándose el filtrado correspon diente al caso regular.
- b) R₂(t) sea singular, se rehace el proceso.

El nuevo estado x_2 es de dimensión menor que el anterior estado x, que era de dimensión ${\bf n}$; o sea que a lo sumo en ${\bf n}$ pasos el proceso finaliza.

EJEMPLO:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = v \\ y = x_1 \end{cases}$$

el cual equivale a:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

Como no existe ruido en las observaciones, estamos ante un caso singular, al ser R=0 .

Pero como:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \hat{\mathbf{x}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$$

resulta un caso trivial donde no es necesario el filtrado, pues todo es estimado sin error.

4-3. FILTRO CON RUIDO NO-BLANCO O COLOREADO SOBRE LAS OBSERVACIONES.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = F.x + v \\ y = H.x + \eta \end{cases}$$

donde:

v es un ruido blanco

n es un ruido coloreado, es decir un ruido no-blanco.

Supongamos además que n admite una representación de Gauss-Markov:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A.\xi + \mu \\ \eta = C.\xi + \nu \end{cases}$$

con μ, ν ruidos blancos.

El filtrado existirá, solamente si existe esta representación del ruido coloreado. Para obtenerlo definimos:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} , \qquad \mathcal{K} = (H \ C)$$

quedándonos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{F}\mathcal{K} + \mathcal{V} \\ y = \mathcal{K}\mathcal{K} + \mathcal{V} \end{cases}$$

que es un nuevo problema a resolver donde el estado ${\mathcal X}$ es de dimensión ma yor que el anterior, siendo ${\mathcal V}$ y ${\bf v}$ ruidos blancos.

EJEMPLO:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = F.x + v \\ y = H.x + \xi \\ \dot{\xi} = A.\xi + v \end{cases}$$

donde:

v es un ruido blanco.

 ξ es el estado de un proceso markoviano, con ν ruido blanco.

Si siguiéramos el procedimiento indicado anteriormente llegaríamos, después de haber aumentado la dimensión del estado del sistema, a un caso singular, en cuyo caso deberíamos aplicar lo indicado en 4-2, que se traduciría en una reducción de la dimensión. En este ejemplo con una sustitución oportuna reuniremos las dos etapas en una sola. Sea:

$$z = \dot{y} - Ay$$

entonces resulta que:

$$z = \dot{H}x + H(Fx+v) + \dot{\xi} - A(Hx+\xi) = (\dot{H}+HF-AH)x + (Hv+v)$$

ó sea:

$$z = \mathcal{H} \cdot x + \mathcal{V}$$

donde:

$$\begin{cases} \mathcal{K} = \dot{H} + HF - AH \\ \mathcal{V} = Hv + v \qquad \text{(ruido blanco)} . \end{cases}$$

Supongamos que:

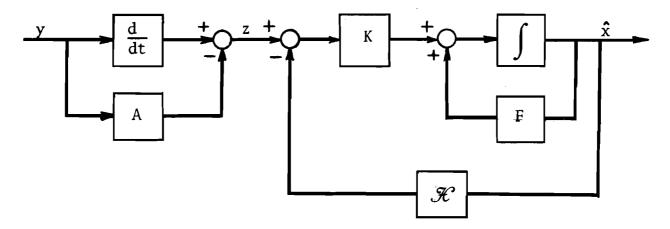
E {
$$\mathcal{V}(t)$$
. $\mathcal{V}'(\tau)$ } = R. $\delta(t-\tau)$

con R > 0 , pues de lo contrario estaríamos frente a un caso singular, al cual se le debería hacer una reducción de la dimensión.

Por lo tanto el filtro de Kalman está dado por:

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + K[z - \mathcal{K}.\hat{x}] = F\hat{x} + K[\dot{y} - Ay - \mathcal{K}.\hat{x}]$$

siendo su diagrama funcional:



lo cual es equivalente a:

$$\frac{d}{dt} (\hat{x} - Ky) = F\hat{x} - (\dot{K} + KA)y - K \mathcal{K} \hat{x}$$

quedando como ejercicio realizar el diagrama correspondiente, que es un algoritmo más conveniente para computadora.

4-4. ESTABILIDAD DEL FILTRO DE KALMAN (CASO CONTINUO).

Si tenemos el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{cases} \dot{x} = F.x + v(t) \\ y(t) = H.x(t) + \omega(t) \end{cases}$$

con v,ω ruidos blancos que verifican:

$$\begin{cases} E \{v(t)\} = E \{\omega(t)\} = 0 \\ E \{v(t).v'(\tau)\} = Q(t).\delta(t-\tau) \\ E \{\omega(t).\omega'(\tau)\} = R(t).\delta(t-\tau) \text{, con } R > 0 \text{ (caso regular)} \\ E \{v(t).\omega'(\tau)\} = 0 \\ E \{x(t_0).x'(t_0)\} = \Lambda_0 \end{cases}$$

el filtro de Kalman responde a las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix}
\hat{x} & = F\hat{x} + K[y - H\hat{x}] \\
\hat{y} & = Fy + y + y - Ky + Q
\end{pmatrix}$$

$$\hat{x}(t_0) = 0$$

$$y(t_0) = \Lambda_0$$

$$K = \Sigma H' R^{-1} .$$

Nos interesa que el filtro de Kalman sea estable. Para que ésto ocurra deberán serlo las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \Sigma \mathbf{H}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}} + \Sigma \mathbf{H}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{\Sigma} + \Sigma \mathbf{F}' - \Sigma \mathbf{H}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{\Sigma} + \mathbf{Q} \end{cases}$$

TEOREMA 1 (Estabilidad de la ecuación en \hat{x}):

- a) Si existen $\alpha;\beta>0$ de manera que $\alpha I<\Sigma(t)<\beta I$, entonces la matriz
- $F_{\Sigma} = F \Sigma H' R^{-1} H \quad \text{es estable}$ b) Si además el sistema $\begin{cases} \hat{x} = F\hat{x} \\ y = H\hat{x} \end{cases} \quad \text{es completamente observable ((H,F) com-$

pletamente observable), entonces F_{Σ} es asintóticamente estable. DEMOSTRACION:

 $V(\hat{x};t) = \hat{x}' \cdot \Sigma^{-1}(t) \cdot \hat{x}$ a) Consideramos

V es una función de Liapunov , pues de:

$$\alpha I < \Sigma(t) < \beta I$$

resulta:

$$\beta^{-1} I < \Sigma^{-1}(t) < \alpha^{-1} I$$
.

Podemos verificar que:

$$\dot{\Sigma} = F_{\dot{\Sigma}} \cdot \Sigma + \Sigma \cdot F_{\Sigma}^{\dagger} + \Sigma H^{\dagger} R^{-1} H \Sigma + Q$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} (\Sigma^{-1}) = - \Sigma^{-1} \cdot \dot{\Sigma} \Sigma^{-1} = - \Sigma^{-1} F_{\Sigma} - F_{\Sigma}^{'} \Sigma^{-1} - H^{'} R^{-1} H - \Sigma^{-1} Q \Sigma^{-1}$$

б sea:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\Sigma^{-1} \right) + \Sigma^{-1} \cdot F_{\Sigma} + F_{\Sigma}^{\prime} \cdot \Sigma^{-1} = - \mathbb{Q}$$
 (II-14)

 $Q = H' R^{-1} H + \Sigma^{-1} Q \Sigma^{-1} > 0$

La expresión (II-14) es la ecuación de Liapunov para las matrices con F_{Σ} matriz de coeficientes; por 1º tanto por Teorema 1 del párrafo 4-3, Cap. I la matriz F_{Σ} resulta estable.

b) Derivando la ecuación (II-13), obtenemos:

$$W(\hat{x},t) = \frac{dV}{dt} = -\hat{x}' \cdot Q \cdot \hat{x}$$
.

Sea:

$$\Gamma = {\hat{x} / W(\hat{x};t) = 0} \subset {\hat{x} / H\hat{x} = 0}$$

Como el sistema (H;F) es completamente observable resulta que ($H;F_{\Sigma}$) es también completamente observable; por lo tanto la única trayectoria que co rresponde al out-put $y(t) = H\hat{x}(t) = 0$ es $\hat{x}(t) = 0$, ó sea que:

$$L = \{0\}$$

resultando \mathbf{F}_{Σ} asintóticamente estable por el último teorema del párrafo 4-2, cap. I .

TEOREMA 2 (Estabilidad de la ecuación en Σ):

Sean Σ_1, Σ_2 dos soluciones de la ecuación en Σ .

Si las matrices F_{Σ_1} , F_{Σ_2} son estables (asintóticamente estables), ento<u>n</u> ces

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} -\sum_{i=1}^{\infty} es \ acotada \ (\longrightarrow 0 \ para \ t \longrightarrow +\infty)$$

DEMOSTRACION:

Al ser
$$\Sigma_1, \Sigma_2$$
 dos soluciones de la ecuación en Σ , tenemos:
$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_1 = F\Sigma_1 + \Sigma_1 F' - \Sigma_1 H' R^{-1} H\Sigma_1 + Q \\ \dot{\Sigma}_2 = F\Sigma_2 + \Sigma_2 F' - \Sigma_2 H' R^{-1} H\Sigma_2 + Q \end{cases}$$

Puede verificarse que:

$$\dot{\Delta} = F_{\Sigma_1} \cdot \Delta + \Delta \cdot F_{\Sigma_2}^{\dagger}$$
,

de cuya integración resulta:

$$\Delta(t) = \Phi_{F_{\Sigma_1}}(t;t_o) \cdot \Delta(t_o) \cdot \Phi_{F_{\Sigma_2}}^{\dagger}(t;t_o) \quad (*)$$

(*) $\Phi_{F_{\Sigma_i}}$ es la matriz de transición correspondiente a F_{Σ_i} (i = 1,2)

Por 1o tanto de:

$$||\;\Delta(t)\;||\; \leq \;||\; \Phi_{F_{\Sigma_1}}(t;t_o)\;||\;\;.\;\;||\; \Delta(t_o)\;||\;.\;||\; \Phi_{F_{\Sigma_2}}^{\bullet}(t;t_o)\;||\;\;\;,$$
 resulta la tesis.

CONCLUSION:

Si existen $\alpha;\beta>0$ de manera que $\alpha I<\Sigma(t)<\beta I$, entonces por Teorema 1 F_{Σ} es estable, y por Teorema 2 la ecuación de Ricatti en Σ resulta estable.

CAPITULO 3

Introducción al Control Estocástico

a la Identificación V

III-1. REVISION DEL PROBLEMA LINEAL CON CRITERIO CUADRATICO.

1-1. EL PROBLEMA.

Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t).x + G(t).u \\ x(t) = \xi \end{cases}$$

y el criterio cuadrático:

$$J = \int_{t_0}^{T} (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T).A. x(T)$$
debenes coloulou el control

debemos calcular el control $u(t_0;T)$ que minimice J .

El control $u(t_0;T)$ puede ser:

- a) de realimentación o feed-back (el control depende del tiempo t y del es tado x , δ sea: u = u(x;t)).
- b) en open-loop (el control depende sólo del tiempo, δ sea u = u(t)).
- 1-2. SOLUCION POR PROGRAMACION DINAMICA. (*)

Consideremos el caso general:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x;u;t) \\ J = \int_{t_0}^T L(x;u;s)ds + \lambda(x(T);T) \text{, con } T \text{ fijo.} \end{cases}$$
 El valor óptimo $V(x;t)$ del criterio para una fase inicial $(x;T)$ ve

rifica:

a:
$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ V_{\mathbf{t}} + V_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{L} \right\} = 0$$
 (ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman)
$$V(\mathbf{x};T) = \lambda(\mathbf{x};T)$$
 (III-1)

^(*) Para mayor información ver Cap. II, curso de P. BERNHARD (publicación N°4 de esta misma serie CUADERNOS).

Volvamos al problema lineal cuadrático. Supondremos que la solución de la ecuación de H-J-B. correspondiente es cuadrática.

Tenemos

$$\begin{cases} f = F.x + Gu \\ L = x'Qx + u'Ru \\ \lambda(x;T) = x'(T).Ax(T) \\ V(x;t) = x'P(t).x \end{cases}$$

que reemplazados en la ecuación (III-1) resulta:

$$\min_{u} \{x'Px + x'P(Fx+Gu) + (x'F'+u'G')Px + x'Qx + u'Ru\} = 0$$

$$\{x'Px + x'P(Fx+Gu) + (x'F'+u'G')Px + x'Qx + u'Ru\} = 0$$

$$\{x'Px + x'P(Fx+Gu) + (x'F'+u'G')Px + x'Qx + u'Ru\} = 0$$

Sea $\mathcal{F}(u) = x'\dot{P}x + x'P(Fx+Gu) + (x'F'+u'G')Px + x'Qx + u'Ru$. Entonces pa ra que $\min \mathcal{F}(u)$ exista y sea único debe ser R > 0 .

Por 10 tanto el control u* que miniminiza ${\mathcal F}$ verifica:

$$\frac{d\mathcal{F}}{du}(u^*) = 2Ru + 2G'.Px = 0$$
 , 6 sea que:
 $u^* = -R^{-1}$. $G'.P.x$,

que llevado a la ecuación de (H-J-B) proporciona:

$$\dot{P} + PF + F'P + Q - PGR^{-1}G'P = 0$$

Por lo tanto, la solución es de la forma:

$$V(x;t) = x' \cdot P(t) \cdot x$$

con P(t) matriz que verifica:

$$\begin{cases} \dot{P} + PF + F'P + Q - PGR^{-1}G'P = 0 \\ P(T) = A \end{cases}$$

y el control óptimo es: $u^* = -R^{-1}$. G'.P.x

1-3. SOLUCION APLICANDO EL PRINCIPIO DE MINIMO DE PONTRYAGIN. (*) Sea el caso general:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x;u;t) \\ J = \int_{t_0}^{T} L(x;u;s)ds + \lambda(x(T);T) . \end{cases}$$

Formado el Hamiltoniano del problema: H = y'f + L donde y recibe el nom bre de vector adjunto, los pasos a seguir son:

a) minimizar H , ó sea hallar:

^(*) Ver cap. III, curso de P. BERNHARD (Publicación N°4 de la serie CUADERNOS).

b) integrar el sistema:

$$\dot{x} = \frac{\partial H^*}{\partial y}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H^*}{\partial x}$$

$$x(t_0) = \xi$$

$$y(T) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} (x(T);T)$$

Si existe solución del problema, ésta verifica el sistema b).

En el caso cuadrático, el Hamiltoniano es:

$$H = y'(Fx + Gu) + x'Qx + u'Ru$$

Si R > 0 , existe y es único $H^* = \min_{u} H$ que se obtiene de:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$
 para $u^* = -\frac{1}{2} \cdot R^{-1} \cdot G' \cdot y$

0 sea que

$$H^*(x;y;t) = H(x;y;u^*;t) = -\frac{1}{4} y'GR^{-1}G'y + x'Qx + y'Fx .$$

Por lo tanto el sistema a integrar resulta:

$$\begin{cases}
\dot{x} = \frac{\partial H^*}{\partial y} = Fx - \frac{1}{2} \cdot G \cdot R^{-1} \cdot G'y \\
\dot{y} = -\frac{\partial H^*}{\partial x} = -2Qx - F'y \\
x(t_0) = \xi \\
y(T) = 2A \cdot x(T)
\end{cases}$$

Dejamos como ejercicio verificar que sobre la trayectoria solución es y(t) = 2.P(t).x(t), y con ello comprobar que la solución hallada coincide con la que se había encontrado por programación dinámica. (*)

1-4. OTRA FORMA DE SOLUCIONAR EL PROBLEMA.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ J = \int_{t_0}^{T} (x'Qx + u'Ru)ds + x'(T).A.x(T) \end{cases}$$
 (R > 0)

a) CASO TRIVIAL (Q = A = 0)

En ese caso, el criterio J resulta:

^(*) Las ecuaciones de Pontryagin, constituyen una condición necesaria, y por lo tanto no se sabe a priori si la solución nos da la trayectoria óptima.

$$J = \int_{t_0}^{T} (u'Ru)ds .$$

Como R > 0 , resulta que $u^* = 0$ es el control que minimiza J .

b) CALCULO DE FUNCIONALES CUADRATICAS DE TRAYECTORIAS:

Consideremos el sistema libre:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t) \cdot x \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$$
 (III-2)

Resulta en este caso:

$$J = \int_{t_0}^{T} (x' \cdot Qx) ds + x'(T) \cdot A \cdot x(T) .$$

La solución de la ecuación diferencial (III-2), es:

$$x(s) = \Phi(s;t_{0}). \xi$$
,

 $x(s) = \Phi(s;t_{0}). \; \xi \quad , \label{eq:xs}$ que reemplazada en el criterio J , da:

$$J = \int_{t_0}^{T} \xi' \cdot \Phi'(s;t_0) \cdot Q(s) \cdot \Phi(s;t_0) \xi \, ds + \xi' \cdot \Phi'(T;t_0) \cdot A \cdot \Phi(T;t_0) \xi ,$$
is sea:

$$J = \xi' \cdot P(t_0) \cdot \xi$$

donde:

$$P(t_o) = \int_{t_o}^{T} \Phi'(s;t_o) Q(s) \cdot \Phi(s;t_o) ds + \Phi'(T;t_o) \cdot A \cdot \Phi(T;t_o) .$$

Derivando resulta:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt_o} = -Q(t_o) - F'(t_o) P(t_o) - P(t_o) \cdot F(t_o) \\ P(T) = A \end{cases}$$

c) SOLUCION:

Hagamos el siguiente cambio de variable:

$$u = -Kx + \tilde{u}$$

con K a determinar convenientemente, resultando:

$$\dot{x} = \tilde{F}x + G\tilde{u}$$

 $\tilde{F} = F - GK$

donde

Reemplazando en el criterio J , tenemos:

$$J = \int_{t_0}^{T} [\tilde{u}' R \tilde{u} + x' (Q+K' R K)x - 2\tilde{u}' R K x] ds + x' (T) . A. x(T) .$$

Sea P(t) la matriz que verifica:

$$\begin{cases} \dot{P} = \tilde{F}' P - P\tilde{F} - Q - K' RK \\ P(T) = A \end{cases}$$

$$J = \int_{t_0}^{T} \left\{ -\frac{d}{ds} (x' P x) + 2\tilde{u}' (G' P - R K) x + \tilde{u}' R \tilde{u} \right\} ds + x'(T) \cdot A \cdot x(T) .$$

Si elegimos K de manera que G'P - RK = 0, es decir:

$$K = R^{-1}G'P,$$

resulta:

$$J = \int_{t_0}^{T} \left\{ -\frac{d}{ds} (x'Px) + \tilde{u}'R\tilde{u} \right\} ds + x'(T).Ax(T) = \xi'P(t_0).\xi + \int_{t_0}^{T} \tilde{u}'R\tilde{u} ds$$
dende \tilde{u}^* = 0 per a) 0 sea que:

 $\tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0}$ por a). 0 sea que:

 $u^* = R^{-1}G'P.x$ es el control óptimo (que minimiza J)

donde la matriz P satisface la ecuación de Ricatti:

$$\begin{cases} \dot{P} = -F'P - PF - Q + PGR^{-1}G'P \\ P(T) = A \end{cases}$$

1-5. EJEMPLO:

Consideremos el integrador:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$$
 con el criterio a minimizar:

$$J = \int_{t_0}^{T} (qx^2 + ru^2)ds + a.x^2(T)$$
, con $r > 0$.

El control óptimo resulta:

$$u^*(t) = -\frac{p(t)}{r} x$$

donde p(t) verifica la siguiente ecuación de Ricatti:

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{p^2}{r} - q \\ p(T) = a \end{cases}$$

que integrándola resulta:

$$p(t) = \frac{a \operatorname{ch} \alpha(T-t) + \frac{1}{b} \operatorname{sh} \alpha(T-t)}{\operatorname{ch} \alpha(T-t) + b.a \operatorname{sh} \alpha(T-t)}$$

siendo:

$$\begin{cases} b = \frac{1}{\sqrt{qr}} \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{r}} \end{cases}$$

III-2. CONTROL ESTOCASTICO

2-1. EL PROBLEMA.

Consideremos el sistema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu + v \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

excitado por v ruido blanco que verifica:

$$\begin{cases} E\{v\} = 0 \\ E\{v(t).v'(\tau)\} = C_{V}.\delta(t-\tau) \end{cases}$$

siendo x_0 un vector aleatorio con:

$$\begin{cases} E\{x_0\} = \xi \\ E\{(x_0 - \xi)(x_0 - \xi)'\} = \Lambda_0 \end{cases}$$

Sobre este sistema podemos realizar observaciones de la forma:

$$y = Hx + \omega$$

con ω ruido blanco que satisface:

$$\begin{cases} E\{\omega\} = 0 \\ E\{\omega(t).\omega'(\tau)\} = C_{\omega} \cdot \delta(t-\tau) \end{cases}$$
roblema es encontrar el control

El problema es encontrar el control u(t) como función de las observacio-

nes
$$(u(t) = \mathcal{F}[y(t_0, t)])$$
, de manera que el criterio:

$$J = E \left\{x'(T).A.x(T) + \int_{t_0}^{T} (x'.Q.x + u'.Ru)ds\right\}$$
sea mínimo.

Sabemos que en el caso determinístico $\begin{cases} C_{\omega} = C_{v} = \Lambda_{o} = 0 \\ H = 1 \end{cases}$, la so lución es:

$$u^* = -K.x = -R^{-1}.G'P.x$$

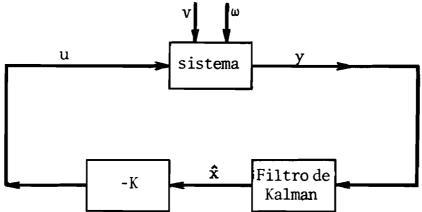
donde P satisface:

$$\begin{cases} \dot{P} = -F'P - PF - Q + PGR^{-1}G'P \\ P(T) = A . \end{cases}$$

Por analogía, definimos para el caso estocástico:

$$u^* = -R^{-1}.G'.P.\hat{x}$$

donde \hat{x} es la mejor estimación del estado x , a partir de las observaciones y .



¿Es ésta una estructura óptima?.

Estamos resolviendo por separado, y en forma óptima en cada caso, el pro blema de la estimación y del control; pero a priori no podemos asegurar que la combinación de ambos sea óptima. Cuando ésto es cierto, se dice que se aplica el Principio de separación del Control y de la Estimación.

2-2. PRINCIPIO DE SEPARACION PARA EL CASO LINEAL CUADRATICO.

Haciendo el cambio de variable:

$$u = -R^{-1}G'P\hat{x} + \tilde{u}$$

resultan:

$$\dot{x} = \tilde{F}x + G.R^{-1}G'P\tilde{x} + G\tilde{u} + v$$

donde:

$$\begin{cases} \tilde{F} = F - GR^{-1}G'P \\ \tilde{x} = x - \hat{x} \end{cases}$$

$$J = E \left\{ x'(T) \cdot A \cdot x(T) + \int_{t_{-}}^{T} \left[-x'(\dot{P} + \tilde{F}'P + P\tilde{F})x + \tilde{x}'PGR^{-1}G'P\tilde{x} \right] \right\}$$

- $2x'PG\tilde{u}$ - $2x'PGR^{-1}G'Px$ + $2\tilde{x}'PG\tilde{u}$ + $\tilde{u}'R\tilde{u}]ds$ }. Por regla de derivación de Ito, es:

$$d(x'Px) = 2x'P dx + x'\dot{P} x dt + tr(P.C_y)dt$$
 (*)

Llevando este resultado a la expresión de J , y teniendo en cuenta que:

i) el error \tilde{x} es ortogonal a las observaciones $y(t_0;t)$, y a \hat{x} ; resulta entonces: $E\{\tilde{\mathbf{x}}'PG\tilde{\mathbf{u}}\} = 0$

ii) por una propiedad de las integrales estocasticas de Ito es:

$$E\left\{\int_{t}^{T} x' P v ds\right\} = 0$$

tenemos:

$$J = E\left\{x'(t_0).P(t_0).x(t_0) + \int_0^T \left[tr(PC_V) + \tilde{x}'PGR^{-1}G'P\tilde{x} + \tilde{u}'R\tilde{u}\right]ds\right\}$$
Como:

$$\begin{cases} E\{x'(t_o).P(t_o).x(t_o)\} = \xi'.P(t_o).\xi + tr(P(t_o).\Lambda_o) \\ E\{\tilde{x}'PGR^{-1}G'P\tilde{x}\} = tr(PGR^{-1}G'P\Sigma) \end{cases}$$

onces:

$$J = \xi' P(t_o) \xi + \int_{t_o}^{T} tr(PC_v) ds + tr(P(t_o.\Lambda_o) + \int_{t_o}^{T} tr(PGR^{-1}G'P\Sigma) ds + E\left\{\int_{t_o}^{T} (\tilde{u}'R\tilde{u}) ds\right\}$$

resultando $\tilde{u}^* = 0$, o sea que el control óptimo es:

$$u^* = -K\hat{x} = -R^{-1}G'P\hat{x}$$
.

Por lo tanto hemos demostrado que un sistema lineal con criterio cuadráti

(*) Si
$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$
, entonces $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (Traza de la matriz A).

(**) P.D. Yoseph, Y.T. Tou, "On Linear Control Theory", A.I.E.E Trans. 80, Part II, pág. 193-196 (1961).

co y ruido blanco, admite la aplicación del principio de separación.

El valor óptimo del caso estocástico ditiere del caso determinístico en tres términos, siendo:

$$J_{\min}(\text{estocástico}) = J_{\min}(\text{determinístico}) + q(t_0) + r(t_0) + p(t_0)$$

donde:

 $q(t_0)$: es la contribución debida a que existen perturbaciones (v) sobre el sistema.

r(t): es la contribución debida al desconocimiento del estado inicial.

 $p(t_0)$: es la contribución debida a que no tenemos observaciones perfectas.

III-3. IDENTIFICACION.

3-1. EL PROBLEMA.

Identificación es el problema de encontrar modelos matemáticos que expliquen los fenómenos de la realidad.

Podemos realizar 2 tipos de identificación: determinística o estocást \underline{i} ca.

i) IDENTIFICACION DETERMINISTICA.

Sea un sistema dinámico del cual conocemos $\{u(t_0;t); y(t_0;t)\}$. Queremos hallar un modelo matemático para el mismo.



El modelo puede ser:

- a) explicativo: permite comprender el fenómeno.
- b) predictivo: permite predecir la evolución futura del sistema. Se utiliza para realizar control en open-loop y en closed-loop (en el primer caso deberá ser más preciso que en el segundo).
- ii) IDENTIFICACION ESTOCASTICA.

Dada una función estocástica y(t) , queremos hallar el modelo matemático que la represente conociendo $\{y(t_{o};t)\}$.

Para realizar la identificación tento en el caso determinístico como en el estocástico, debemos utilizar toda la información que tengamos, por ejem plo:

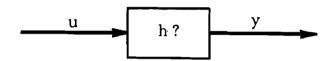
- a) resultados de las experiencias realizadas.
- b) leyes de la física.

- c) métodos de identificación.
- 3-2. METODO DE IDENTIFICACION PARA SISTEMAS LINEALES Y ESTACIONARIOS.

Dado un sistema lineal y estacionario, existen 2 tipos de modelos que lo representan: externo e interno.

En este párrafo nos ocuparemos de la representación externa. Más ade lante veremos cómo pasar de este modelo a la representación interna (problema de la realización).

El problema consiste en hallar la función impulsiva h



conociendo $\{u(t_{0};t); y(t_{0};t)\}$.

Podemos resolverlo de distintas maneras:

1) EXCITACION IMPULSIVA DEL SISTEMA;

Si aplicamos
$$u(t) = \delta(t)$$
, entonces resulta $y(t) = h(t)$.

El inconveniente de este método es que el sistema, en general, es lineal sólo en un cierto intervalo de frecuencias y la aplicación de una excita — ción impulsiva δ puede llevarlo fuera de él.

2) EXCITACION ARMONICA:

Vimos anteriormente que si:

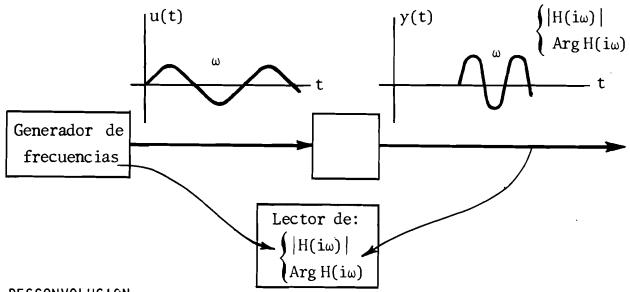
$$u(t) = sen_{\omega}t$$
,

entonces para valores grandes de t resultaba:

$$y(t) = |H(i_{\omega})| \cdot sen(\omega t + Arg H(i_{\omega}))$$

donde H(s) representa la función de transferencia del sistema. Es decir que a una excitación sinusoidal de frecuencia ω obtenemos una respuesta también sinusoidal de igual frecuencia ω , pero desfasada en Arg H(i ω) y afectada en amplitud por $|H(i\omega)|$.

Como conocer $H(i\omega)$ implica conocer H(s) y de allí $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$ y como para conocer $|H(i\omega)|$ basta conocer $|H(i\omega)|$ y Arg $H(i\omega)$ (que están dados por y(t)), entonces debemos utilizar un aparato que haga variar la frecuencia ω del input u (llamado generador de frecuencias), y un apara



3) DESCONVOLUCION.

Sabemos que:

$$y = h * u$$
.

Para hallar h veamos 3 procedimientos:

a) UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

Transformando y = h * u, resulta que:

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$
,

o sea:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Por 1o tanto podremos conocer H(s) + s donde $U(s) \neq 0$. EJEMPLO:

Sea
$$u(t) = j(t) \cdot e^{-t}$$
,

nde j(t) es la función de Heaviside:

$$j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} & t \ge 0 \\ 0 & \text{si} & t \le 0 \end{cases}.$$

Transformando u(t) resulta:

$$U(s) = \frac{1}{1+s} .$$

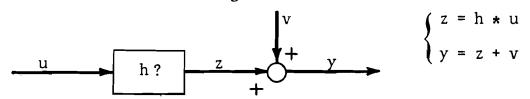
Por 1o tanto:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = (1+s) Y(s) = Y(s) + s.Y(s)$$
,

y anti-transformando, tenemos:

$$h(t) = y(t) + \dot{y}(t) - y(0)$$

Pero si estamos en un caso más general:



donde v es un ruido; o sea que las observaciones y tienen incorporado el ruido v; el método anterior no es bueno ya que tenemos que utilizar $\dot{y} = \dot{z} + \dot{v}$, donde \dot{v} puede ser grande.

b) DESCONVOLUCION OPTIMA.

Lo veremos en un modelo discreto del tipo:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N} h(i).u(k-i) + v(k)$$
, $k = 0;1,...;M (M \ge N)$.

Expresándolo en forma matricial tenemos:

$$Y_M = U_M \cdot H + V_M$$

donde:

$$Y_{M} = \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(M) \end{pmatrix}$$
, $H = \begin{pmatrix} h(0) \\ \vdots \\ h(N) \end{pmatrix}$

Nuestro problema consiste en hallar el H óptimo (que llamaremos $\hat{\rm H}$), sabiendo que $\rm V_M$ es un ruido gaussiano que verifica:

$$\begin{cases} E\{V_{M}\} = 0 \\ E\{V_{M} \cdot V_{M}^{\dagger}\} = R_{M} \end{cases} .$$

Para hallar Ĥ utilizaremos el método de máxima verosimilitud que consiste en maximizar la ley de probabilidad:

$$k \cdot e^{-\frac{1}{2}} V_{M}^{*} R^{-1} V_{M}$$
 (k = cte) respecto del parámetro a estimar.

Esto equivale a maximizar:

$$J = V_M^{\prime} \cdot R_M^{-1} \cdot V_M = (Y_M^{\prime} - H^{\prime}U_M^{\prime})R_M^{-1}(Y_M - U_M^{\prime}H) \quad \text{respecto de } H \quad .$$

Derivando J respecto de H e igualando a 0, obtenemos que el H óptimo es:

$$\hat{H} = (U_M R_M^{-1} \cdot U_M)^{-1} \cdot U_M \cdot R_M^{-1} \cdot Y_M$$

Además el error Σ viene dado por:

$$\sum = E\{(H-\hat{H})(H-\hat{H})'\} = (U_M' \cdot R_M^{-1} \cdot U_M)^{-1}$$

c) DESCONVOLUCION CON CALCULO DE LA FUNCION DE CORRELACION C $_{\mathbf{zu}}$.

Recordemos que:

$$C_{zu}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} z(t+\tau). u(t)dt$$

Como z = h * u, entonces $C_{zu} = h * C_{uu}$

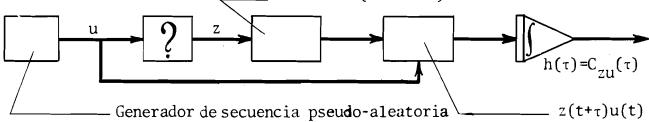
Si el input u(t) verifica:

$$C_{uu}(t) = \delta(t)$$
,

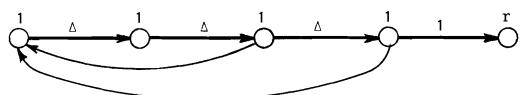
tenemos que:

$$C_{zu}(t) = h(t)$$
.

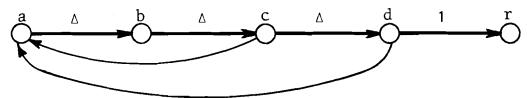
¿Cuál será el instrumento que produzca un input u de manera que $C_{uu}(t) = \delta(t)$?. A este instrumento se lo llama generador de secuencia pseu do-aleatoria. _____ retardo τ (variable)



El sistema funciona teniendo en cuenta que en el tiempo t=0 tiene la siguiente representación de flujo, y que las operaciones deben realizarse en Z_2 (cuerpo de los enteros módulo 2), siendo Δ un retardo:



Si representamos el proceso de la siguiente manera:



siendo
$$x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$
 el estado en $t = n$, donde para $t = 0$ es:

$$\begin{cases} a_{n+1} = c_n + d_n \\ b_{n+1} = a_n \\ c_{n+1} = b_n \\ d_{n+1} = c_n \\ r_{n+1} = d_{n+1} \end{cases}$$

o sea que:

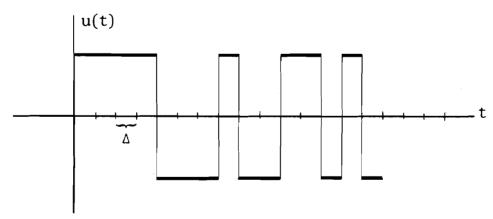
$$\begin{cases} x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & x_n \\ x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & x_{n+1} \\ \end{cases}$$

obteniéndose para r la siguiente secuencia:

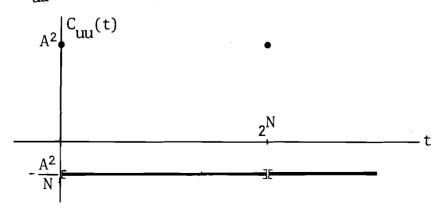
Construiremos el input u a través de la siguiente ley:

u(0) = A , y u(t) sigue valiendo A hasta que se produzca r = 0 , en cuyo caso vale (-A) ; y luego u(t) = -A hasta que sea r = 1 , en cuyo caso valdrá A , y así sucesivamente.

Gráficamente tenemos:



Calculando $C_{uu}(t)$, obtenemos:



o sea que si N es suficientemente grande se obtiene una función de correlación C , que se asemeja bastante a una excitación impulsiva δ .

Además la matriz de covariancia es:

$$E\{U_{M} \cdot U_{M}^{\prime}\} \left(\begin{array}{c} C_{uu}(0) & C_{uu}(1) & C_{uu}(2) & \dots \\ C_{uu}(1) & & & \\ C_{uu}(2) & & & & \\ \vdots & & & & \\ C_{uu}(M) & & & & \\ \end{array} \right) = A^{2} \cdot \left(\begin{array}{c} 1 & & & \\ & \cdot & -\frac{1}{N} \\ & -\frac{1}{N} & \cdot & \\ & & & 1 \end{array} \right)$$

3-3. REALIZACION.

Consiste en obtener la descripción interna de un sistema, conociendo su descripción externa, es decir que conocida h(t) (δ H(s)), queremos hallar las matrices F, G, H tales que:

$$\begin{cases} \dot{x} = F. \ x(t) + G \ u(t) \\ y(t) = H. \ x(t) \end{cases}$$

y además que la dimensión de F (dim F) (*) sea mínima.

Puede demostrarse que esta última condición es equivalente a que el sistema sea controlable y observable.

Vimos anteriormente que en el caso estacionario, al que nos referiremos en este párrafo, las relaciones entre la descripción interna y externa están dadas por:

$$h(t) = H. e^{Ft}$$
. G ,6 equivalentemente por $H(s) = \mathcal{L}(h(t)) = H.(sI-F)^{-1}$.G (III-3)

Diremos que $\{H;F;G\}$ es una realización de H(s) cuando se verifiquen las condiciones (III-3).

Observemos que si existe una realización $\{H;F;G\}$, ésta no es única pues para toda matriz T regular, resulta $\{HT;\ T^{-1}\ FT;\ T^{-1}\ G\}$ una nueva realización de H(s).

Antes de ver el caso general, veamos algunos casos simples:

1) CASO ESCALAR:

Sea H(s) una función racional prima:

(*) dim F = n si F es una matriz $n \times n$

$$H(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

Una realización (1ra. forma canónica) consiste en tomar:

$$H_1 = (\beta_n \dots \beta_1)$$

En cambio otra realización (2da. forma canónica) es:

$$F_{2} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{2} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n} \\ 1 & \dots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \alpha_{2} \end{pmatrix}$$

$$G_{2} = \begin{pmatrix} \beta_{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{1} \end{pmatrix}$$

Dejamos como ejercicio hallar la matriz T que lleva la 1ra, forma canónica en la 2da.

2) CASO VECTORIAL (Matriz de transferencia con polos simples):

Sea H(s) una matriz de transferencia que tenga todos sus polos simples: $H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{R_i}{s - s_i}$

$$II(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{R_i}{s - s_i}$$

donde R_i son matrices $P \times m$, i = 1;2;...; N y N el número de polos. Supongamos que rango $R_i = r_i$ (i = 1;2;...;N); entonces existen matrices H_{i} , G_{i} de rango r_{i} de manera que:

$$R_{i(P \times m)} = H_{i(P \times r_{i})} \cdot G_{i(r_{i} \times m)}$$
 (i = 1;2;...;N)

En este caso, una de las posibles realizaciones es:

F = Diagonal
$$(s_1, \ldots, s_1, s_2, \ldots, s_2, \ldots)$$

$$G = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

Sea:

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{3s^2 + 12s + 11}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \frac{4s^2 + 15s + 13}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \frac{4s + 9}{(s+2)(s+3)} & \frac{5s + 11}{(s+2)(s+3)} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$H(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+3}$$

donde:

$$R_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . (1 & 1)$$

$$R_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . (1 & 1)$$

$$R_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto una realización es:

$$H = (H_1 \ H_2 \ H_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = Diagonal \ (-1; -2; -3; -3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3) CASO GENERAL. ALGORITMO DE HO: Recordemos que:

$$h(t) = H e^{Ft} \cdot G = H \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^n t^n}{n!} \cdot G = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(HF^n G)t^n}{n!}$$
,

o sea que conocer h(t) es equivalente a conocer:

$$A_n = HF^n \cdot G \qquad \forall n \ge 0$$

Nuestro problema consiste en hallar las matrices H, F, G , conociendo A_n \forall $n \geq 0$, con la condición que dim F sea mínima.

Construyamos la siguiente matriz de Hankel:

$$S_{N} = \begin{pmatrix} A_{0} & A_{1} & A_{2} & A_{3} & \cdots & A_{N-1} \\ A_{1} & A_{2} & A_{3} & \cdots & A_{N} \\ A_{2} & A_{3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{N-1} & \cdots & \cdots & A_{2N-2} \end{pmatrix}$$

Podemos ver que:

$$S_{N} = \begin{pmatrix} H \\ H F \\ \vdots \\ \vdots \\ H F^{n-1} \end{pmatrix} \cdot (G F G \cdot \cdot \cdot F^{n-1} G) ,$$

Puede demostrarse que:

Rango
$$(S_N) = \dim F$$
.

Entonces si podemos factorizar la matriz S_N , obtendremos: H(de la matriz 0) , G(de la matriz C) y luego a partir de ellas calcularemos F .

ALGORITMO DE HO:

i) Tomar N lo suficientemente grande de manera que:

Rango
$$(S_{N+k})$$
 = Rango (S_N) $\forall k \ge 1$

ii) Construir una matriz regular P que verifique:

$$P \cdot S_N = \begin{pmatrix} K \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix} \cdot W$$

donde:

K es una matriz constituida por n filas linealmente independientes de \mathbf{S}_{N} , B es una matriz invertible,

W es una matriz formada por 0 y 1 (matriz permutación) .

iii) Sea:

$$T_{N} = \begin{pmatrix} A_{1} & A_{2} & A_{3} & \dots & A_{N} \\ A_{2} & A_{3} & \dots & \dots & \dots \\ A_{3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2N} \end{pmatrix}$$

(la matriz $T_{
m N}$ se construye suprimiendo la 1ra. fila ó 1ra. columna de la matriz $S_N^{}$ y agregando una fila y una columna), entonces:

$$P T_{N} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . W$$

iv) Se toma la siguiente realización:

la siguiente realización:
$$\begin{pmatrix}
H = \begin{pmatrix} A_0 A_1 & \dots & A_{N-1} \end{pmatrix} & W' & \begin{pmatrix} B^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
F = D & B^{-1} \\
G = \begin{pmatrix} K_1 & \dots & K_n \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{K}_{\mathbf{l}}$; ...; $\mathbf{K}_{\mathbf{n}}$ son las primeras n-columnas de la matriz \mathbf{K} .

INDICE

	PAG.
INTRODUCCION	3
CAPITULO I: TEORIA USUAL DE CONTROL	
I-1 Regulación simple (P.I.D.)	5
I-2 Sistemas dinámicos lineales. Representación externa	16
1-3 Representación interna. Sistemas diferenciales lineales	33
I-4 Estabilidad y compensación	37
CAPITULO II: FILTRADOS ESTADISTICOS.	
II-1 Nociones introductorias	54
II-2 Filtro de Wiener	63
II-3 Filtro de Kalman	72
11-4 Complemento sobre el filtro de Kalman	84
CAPITULO III: INTRODUCCION AL CONTROL ESTOCASTICO Y A LA IDENTIFICA	C I ON
III-1 Revisión del problema lineal con criterio cuadrático	92
-2 Control estocástico	96
	99



