UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 13 al 17 de OCTUBRE - 1986

Antonio FASANO

Las zonas pastosas en el problema de Stefan

13

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA

– 1987 –

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA

CUADERNOS

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA "BEPPO LEVI"

II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones

ENCUENTRO NACIONAL ROSARIO - 13 al 17 de OCTUBRE - 1986

Antonio FASANO

Las zonas pastosas en el
problema de Stefan

ROSARIO - REPUBLICA ARGENTINA
– 1987 –

PREFACIO.

Dado el notable desarrollo que el tema ha experimentado en los últimos años (ver Anexo I), el *Programa de Matemática Pura y Aplicada de Rosario*, PROMAR (CONICET - UNR), que se desarrolla en el *Instituto de Matemática* "*Beppo Levi*", emprendió, a través del proyecto de investigación y desarrollo "*Problemas de Frontera Libre de la Física Matemática*", la organización del interdisciplinario *Seminario sobre el problema de Stefan y sus Aplicaciones*, realizado en la ciudad de Rosario (Argentina) durante el período del 13 al 17 de octubre de 1986.

El Comité Organizador estuvo compuesto por H. R. BERTORELLO (FAMAF, Córdoba), J. E. BOUILLET (IAM - UNBA, Buenos Aires), E. A. GARCIA (CNEA, Buenos Aires), D. A. TARZIA (PROMAR, Rosario) y L. T. VILLA (UNSa, Salta).

La Secretaría estuvo a cargo de G. G. GARGUICHEVICH, P. R. MARANGUNIC, S. REYES, M. C. SANZIEL (Coordinadora), C. O. STOICO, A. L. TAIANA, todos del PROMAR.

Este Seminario, y la presente publicación, han sido realizados, en parte, gracias a subsidios que a tal efecto otorgó el CONICET. Además se contó con la ayuda de las siguientes Institucionnes Auspiciantes:

AMCA - Asociación Argentina de Mecánica Computacional,
CAMAT - Comité Argentino de Transferencia de Calor,
CERIDER - Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Rosario,
CONICET- Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,
CIUNR - Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario,
Depto. de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales,
Depto. de Matemática - Escuela de Formación Básica (FCEeI - UNR),
FCEeI - Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería (UNR),
Municipalidad de Rosario.

Además colaboraron las siguientes entidades:

CIDCA (CIC - CONICET - UNLP), La Plata,
CNEA, Buenos Aires,
Consulado de Italia en Rosario,
Embajada de Francia en Argentina,
FAMAF (UNC), Córdoba,
IAM (CONICET), Buenos Aires,
INIQUI (CONICET - UNSa), Salta,
PEMA (CONICET - UNL), Santa Fe.

En el Seminario participaron 57 personas provenientes de 14 ciudades argentinas y 2 extranjeras.

Los *objetivos* del Seminario fueron:

1) Gestar un *encuentro bianual* de las personas y grupos que trabajan en el problema de Stefan (cambio de fase) en el país, a fin de provocar una *útil interacción* entre los mismos.

2) No limitar el encuentro sólo a una reunión de especialistas que se comunican las últimas novedades en la materia, sino también, y muy especialmente, despertar el interés y el acercamiento de jóvenes graduados en Matemática, Física, Ingeniería Química y ramas afines y, de esta manera, contribuir a la *formación de recursos humanos*.

Esta segunda edición del Seminario estuvo constituída por cursillos intensivos sobre los aspectos básicos del tema y conferencias referidas a las aplicaciones (ver Anexo II). En años sucesivos, los cursillos versarán sobre aspectos más específicos y complejos, ya sea desde un punto de vista teórico o numéricos (no tratados en Seminarios anteriores) y los principios teóricos irán, paulatinamente, dando lugar a las aplicaciones.

Para finalizar, quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a los profesores encargados de la redacción de estas notas como asimismo a todas aquellas personas e Instituciones que de una manera u otra han colaborado para el éxito del Seminario.

Domingo Alberto TARZIA.
Rosario, Abril 1987.

ANEXO I.

¿ Qué es el problema de Stefan ?

El problema de Stefan estudia la temperatura en el espacio ocupado por dos fases de un cuerpo, generalmente una fase sólida y una líquida (ejemplo: hielo y agua en procesos de fusión o solidificación). Las funciones que representan las temperaturas de las dos fases satisfacen las correspondientes ecuaciones del calor. La superficie de separación, que puede variar en el tiempo y que se encuentra a temperatura constante, es una incógnita suplementaria del problema sobre la cual existe una condición que surge del principio de conservación de la energía.

El interés y la dificultad del problema se debe a la presencia de dicha superficie de separación entre las fases, a la cual se la llama la *frontera libre* del problema, cuya determinación es de fundamental importancia en la práctica.

En las múltiples *aplicaciones* del problema de Stefan se pueden mencionar: Problemas con cambio de fase, solidificación de aleaciones binarias, oxidación del zirconio y fusión del dióxido de uranio en reactores nucleares en caso de accidentes, almacenamiento de energía térmica de origen solar por cambio de fase, problema de colada contínua (solidificación de metales), solidificación del pavimento, problemas de control óptimo, procesos de ablación térmica, solidificación de la corteza terrestre, etc.

Por todo ello, este problema ha concitado en los últimos años el interés de matemáticos, físicos, químicos e ingenieros de todo el mundo, lo que ha redundado en un importante desarrollo del tema. Es así que se presentan trabajos en Congresos de Matemática (sobre Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional, Análisis Numérico, Matemática Aplicada), Física, Transferencia del Calor y Materia, etc., y se realizan numerosas publicaciones en más de 150 revistas especializadas en dichas disciplinas. Para mayores detalles pueden verse las publicaciones de los siguientes simposios internacionales sobre problemas de frontera libre:

i) J. R. OCKENDON-W. R. HODGHINS (Eds.), "*Moving boundary problems in heat flow and diffusion*", Clarendon Press, Oxford (1975).

ii) D. G. WILSON-A. D. SOLOMON-P.T. BOGGS (Eds.), "*Moving boundary problems*", Academic Press, New York, (1978).

iii) E. MAGENES (Ed.), "*Free boundary problems*", Vol. I, II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (1980).

iv) J. ALBRECHT-L. COLLATZ-K. H. HOFFMANN (Eds.), "*Numerical treatment of free boundary value problems*", ISNM N° 58, Birkhaüser Verlag, Basel (1982).

v) A. FASANO-M. PRIMICERIO (Eds.), "*Free boundary problems: Theory and applications*", Vol. I, II, Research Notes in Math. N° 79, 89, Pitman, London (1983).

vi) A. BOSSAVIT-A. DAMLAMIAN-M. FREMOND (Eds.), "*Free boundary problems: Applications and theory*", Vol. III, IV, Research Notes in Math. N° 120, 121, Pitman, London (1985).

vii) M. NIEZGODKA-I. PAWLOV (Eds.), "*Recent advances in free boundary problems*", Control and Cybernetics, 14 N° 1-3 (1985).

viii) A. FASANO-M. PRIMICERIO (Eds.), "*Nonlinear diffusion problems*", Lecture Notes in Math. N° 1224, Springer Verlag, Berlin (1986).

Además puede consultarse una extensa bibliografía con más de 2300 referencias sobre problemas de frontera libre para la ecuación del calor y en particular sobre el problema de Stefan en: D. A. TARZIA, "*A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan Problem*", To appear.

ANEXO II.

CONTENIDO DEL SEMINARIO.

CURSO (en CUADERNOS N° 13):

C) A. FASANO, *"Las zonas pastosas en el problema de Stefan"*, (4.30 horas).

CURSILLOS (en CUADERNOS N° 14):

C1) D. A. TARZIA, *"Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan Unidimensional a dos fases"*, (1.15 horas).

C2) D. A. TARZIA, *"El problema de Stefan multidimensional a una fase"*, (3 horas).

C3) L. T. VILLA, *"La ecuación de la difusión y su aplicación a problemas de frontera libre"*, (3 horas).

C4) H. BERTORELLO, *"Termodinámica del cambio de fase con aplicación a transformaciones sólido - líquido"*, (3 horas).

C5) J. E. BOUILLET, *"Comparación de soluciones de ecuaciones parabólicas"*, (3 horas).

CONFRERENCIAS GENERALES (en CUADERNOS N° 14):

CG1) P. R. MARANGUNIC, *"Distribuciones y espacios de Sobolev"*, (1.30 horas).

CG2) E. ZARANTONELLO, *"La teoría espectral cónica"*, (1.15 horas).

CG3) G. G. GARGUICHEVICH, *"Las inecuaciones variacionales elípticas"*, (1.15 horas).

CONFERENCIAS DE APLICACION (en CUADERNOS N° 14):

CA1) N. AGUILERA, *"El método de Alt para el problema del dique poroso"*, (1.30 horas).

CA2) R. H. MASCHERONI, *"El problema de Stefan y la congelación y descongelación de alimentos"*, (1.15 horas).

CA3) E. A. GARCIA, *"Interacción del UO_2 con zircalloy a alta temperatura"*, (1.15 horas).

CA4) M. SOLARI, *"Procesos de solidificación de metales y aleaciones"*, (1.15 horas).

LAS ZONAS PASTOSAS EN EL PROBLEMA DE STEFAN.

ANTONIO FASANO
UNIVERSITÁ degli STUDI di FIRENZE
ISTITUTO MATEMATICO "ULISSE DINI"
Viale Morgagni 67/A
50134 - Firenze. ITALIA.

PLAN

1. INTRODUCION

En los procesos de cambio de fase las "zonas pastosas" (una traducción aproximada del término inglés "mushy region") se pueden definir como regiones (de medida no nula) con temperatura igual a la temperatura de cambio de fase y "energía" intermedia entre los valores que definen (a la misma temperatura) los estados extremos de la transición (líquido y sólido).

Esta definición se refiere a un esquema muy simplificado como el de Stefan, en el cual se supone la existencia de una temperatura de cambio de fase constante y la posibilidad de definir el estado termodinámico del sistema mediante una sola variable (la "energía").

La Parte I de este curso se propone tratar algunas ideas básicas en este contexto, mostrando cómo se define una solución clásica en presencia de zonas pastosas, cómo se puede prever la aparición de una zona pastosa y cómo se demuestra la existencia de dicha solución.

La Parte II ilustra el caso de temperatura de cambio de fase dependiente en manera conocida de las variables espaciales (que tiene mucho que ver con el comportamiento de las aleaciones binarias). Su principal finalidad será mostrar cómo la estructura matemática del problema se complica , especialmente en relación con la evolución de la zona pastosa en donde se instaura un complejo proceso de transporte de energía.

Las propiedades más interesantes serán aclaradas estudiando un problema particular.

Quiero advertir que no se pretende aquí hacer la historia del problema del cambio de fase con zonas pastosas, ni tampoco su desarrollo completo, porque a pesar de su apariencia muy específica, hay una literatura muy amplia y ramificada sobre este asunto.

Por ejemplo no se hará el análisis de las posibles singularidades de la frontera entre una región pastosa y una fase pura. Algunos resultados en este sentido se hallan en [HN1,2], donde se estudian también soluciones autosemejantes (soluciones particulares fueron encontradas en [SWA]). Otra amplia clase de problemas que sería muy interesante discutir es la de los modelos de cambio de fase que describen la fase intermedia como una mezcla de líquido y sólido según alguna ley termodinámica (todavía al nivel macroscópico) que expresa el promedio de una situación microscópica (formación de dendritas). En función de esos modelos se puede interpretar el sobreenfriamiento en un proceso de solidificación y su dependencia de la dinámica general del sistema.

Naturalmente no se puede usar sólo una incógnita para estudiar la evolución del sistema. En [C], [CF] las incógnitas son la temperatura y un apropiado potencial termodinámico, que satisfacen un sistema de dos ecuaciones parabólicas. En [FP8] se usan la temperatura y la fracción de sólido y el modelo consiste en una ecuación parabólica (balance de energía) y una ecuación diferencial ordinaria no lineal y degenerada, que describe la evolución de la fracción de sólido.

La exigencia de mantener el curso entre límites razonables nos impide dedicar a este asunto una tercera parte.

Una guía muy útil para la bibliografía es el trabajo [T1]. Recuerdo además el artículo de revisión [CO].

PARTE I. ZONAS PASTOSAS ISOTERMICAS

2. EL CONCEPTO DE ZONA PASTOSA EN EL PROBLEMA DE STEFAN

Para introducir el concepto de zona pastosa en un proceso de cambio de fase, una manera muy natural es comparar la formulación clásica del problema de Stefan con su formulación débil.

Se advierte al lector que en este primer estadio vamos a plantear una formulación clásica en la cual el concepto de "fase" no será tratado en el sentido tradicional (es decir basándose simplemente en el hecho que la temperatura tome valores mayores o menores que la temperatura de cambio de fase). Esta formulación, que llamaremos formulación clásica extendida, no necesariamente se refiere a la física del cambio de fase (que siempre se define correctamente en la formulación débil).

Parece lícito suponer que la formulación usual del problema de Stefan (sin zonas pastosas) es bien conocida, visto que fue ampliamente ilustrada en este Seminario y en el anterior [T2]. La utilidad de la extensión que vamos a presentar será comentada ampliamente, pero se puede anticipar que deriva fundamentalmente de la siguiente observación: si una fuente de calor actúa sobre un sistema sujeto a cambio de fase, el principio del máximo no permite controlar el signo de la temperatura en cada fase, lo que induce a aclarar algunos hechos.

A. Extensión de la formulación clásica.

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. El dominio en el cual vamos a plantear nuestra formulación es el cilindro $\Omega \times (0,T)$. La formulación se refiere al caso de dos "fases", es decir dos conjuntos abiertos L y S, $L \cap S = \emptyset$, **separados** por una superficie bastante suave Γ (la frontera libre) representable en la forma

$$\Phi(x,t) = 0 \quad , \quad \nabla\Phi \neq 0,$$

y tales que

$$L \cup S = \Omega \times (0,T) \setminus \Gamma \, .$$

Las dos fases se llaman líquida (L) y sólida (S), pero no basándose en el signo del resto $\theta - \theta_c$ (θ = temperatura, θ_c = temperatura del cambio de fase, supuesta constante). En cambio introducimos un "índice de fase" H(x,t) tal que

$$H(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,t) \in L \\ 0 & \text{si } (x,t) \in S \end{cases} \tag{2.1}$$

lo que significa que es posible hallar puntos de L a temperatura $\theta < \theta_C$ (líquido sobreenfriado) o puntos de S a temperatura $\theta > \theta_C$ (sólido sobrecalentado). La "energía" en un punto (x,t) se define como

$$E(x,t) = \int_{\theta_C}^{\theta(x,t)} c(\eta)\, d\eta + \lambda\, H(x,t) \tag{2.2}$$

donde $\lambda > 0$ es el calor latente y $c(\theta)$ es el calor específico.

Para comprender el papel de H(x,t) en la formulación es preciso considerar el esquema completo.

En ambas fases se tiene que resolver en el sentido clásico una ecuación del tipo ($k(\theta)$ conductividad , $r(\theta)$ fuente o sumidero de calor)

$$c(\theta)\, \theta_t = \nabla \cdot (k(\theta)\, \nabla\theta) + r(\theta) \tag{2.3}$$

con las condiciones usuales sobre los coeficientes (diferentes en cada fase). Las dos ecuaciones están acopladas sobre la frontera libre Γ por las condiciones siguientes:

(i) continuidad de θ y

$$\theta = \theta_C, \quad \forall\ (x,t) \in \Gamma \tag{2.4}$$

(ii) balance de energía (condición de Stefan)

$$[\![E]\!]_L^S\ \vec{V} \cdot \vec{n} = [\![\vec{j} \cdot \vec{n}]\!]_L^S, \quad \forall\ (x,t) \in \Gamma \tag{2.5}$$

donde $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$ es el vector unitario normal a $\Gamma \cap (\Omega \times \{t\})$, $\vec{V}$ es la velocidad en $\Omega \times \{t\}$ de la frontera libre y

$$\vec{j} = -\, k\, \nabla\theta, \tag{2.6}$$

$$[\![A]\!]_L^S = \lim_{\substack{(x,t)\to(x_\Gamma,t_\Gamma)\in\Gamma \\ (x,t)\in S}} A(x,t) \; - \lim_{\substack{(x,t)\to(x_\Gamma,t_\Gamma)\in\Gamma \\ (x,t)\in L}} A(x,t) \tag{2.7}$$

(no precisamos aquí el grado de suavidad de θ, que es el usual). Es claro que

$$[\![E]\!]_L^S = -\lambda \tag{2.8}$$

y por eso (2.5) se escribe

$$\lambda\, \frac{\partial\Phi}{\partial t} = [\![-k\ \nabla\theta \cdot \nabla\Phi]\!]_L^S\ . \tag{2.9}$$

Aquí no tiene particular importancia discutir las condiciones sobre la frontera fija $\partial\Omega \times (0,T)$. Por el contrario es interesante examinar las condiciones iniciales.

Para $t = 0$ es necesario conocer los datos siguientes:

(a) la configuración $\Gamma_0 \subset \Omega$ de la frontera entre las fases,

(b) el índice de fase $H(x,0) = H_0(x)$ que define las fases iniciales de una parte y de la otra de Γ_0,

(c) la temperatura $\theta(x,0) = \theta_0(x)$ en ambas fases.

OBSERVACION 2.1. (Variación del índice de fase). En este esquema la frontera libre Γ no es una superficie de nivel $\theta = \theta_c$ cualquiera, sino sólo la que se desarrolla a partir de Γ_0. Otras superficies $\theta = \theta_c$ pueden existir para $t = 0$ o también aparecer posteriormente (posiblemente ramificándose de la frontera libre) por efecto del término $r(\theta)$ en (2.3), pero no son lugares de cambio de fase, vale decir que a través de ellas son continuas no solamente θ, sino también E y $\nabla\theta$. Se concluye que en un punto (x,t) el índice de fase H(x,t) cambia si y sólo si el punto es atravesado por la frontera libre, sin referencia al signo de $\theta - \theta_c$.

OBSERVACION 2.2. No es exacto mirar el esquema como un modelo de cambio de fase con sobreenfriamiento o sobrecalentamiento. En efecto, es difícil pensar que estos estados metaestables se desarrollen siguiendo una ley así de simple. Además no hay limitación alguna en el esquema de los valores que $\theta - \theta_c$ puede tomar en cada fase sin que la fase cambie.

Por eso cuando en $\Omega \times (0,T)$ hay regiones con un signo de $\theta - \theta_c$ contrario al de la fase correspondiente, diremos que el esquema deja de representar el cambio de fase.

Sin embargo el esquema es interesante para nuestra finalidad por los siguientes motivos:

(I) La aparición para un cierto tiempo T^* de una región sobreenfriada o sobrecalentada es un índice de que el proceso físico va a desenvolverse en alguna manera distinta y que por lo tanto se necesita pasar a una formulación diferente.

(II) Hay problemas de frontera libre en una dimensión espacial y en una fase que se pueden reducir (bajo hipótesis apropiadas) a un problema de Stefan en el sentido extendido descripto antes. En esta clase de problemas se hallan los problemas con datos de Cauchy sobre la frontera libre (a veces llamados "de tipo implícito") como por ejemplo el problema de la difusión-consumo de oxígeno. Este último problema tiene un papel fundamental en la teoría clásica que queremos formular sobre las zonas pastosas y a él dedicaremos una sección más adelante.

En resumen, la formulación clásica extendida del problema de Stefan hace aparecer dos cantidades que definen el estado del sistema en cada punto: la temperatura y el índice de fase, definido por las condiciones iniciales y por la dinámica de la frontera libre. (En realidad generalmente no se puede probar la existencia de una solución global y habría una tercera incógnita, es decir el tiempo máximo de existencia).

El caso tradicional (signo correcto de $\theta - \theta_c$ en cada fase) es un caso particular en que el índice de fase, luego la energía, se encuentra definido solamente por la temperatura. Sin embargo las incógnitas siguen siendo dos: la temperatura y la frontera libre.

En el caso unidimensional el problema extendido fue estudiado en detalle en los tres trabajos [FP1] y sucesivas generalizaciones (ecuaciones no lineales y condiciones de frontera libre no lineales) se hallan en [FP2].

B. Formulación débil

La formulación débil del problema de Stefan se basa en la hipótesis fundamental que el estado termodinámico del sistema sea definido solamente por la energía (sería más correcto hablar de entalpía para procesos a presión constante).
Luego, es preciso que no se permita a $\theta - \theta_c$ cambiar de signo sin realizar al mismo tiempo un cambio de fase. Por consecuencia la definición (2.2) de E se sustituye con

$$E = \int_{\theta_c}^{\theta} c(\eta)\, d\eta + \lambda\, H(\theta - \theta_c) \tag{2.10}$$

donde ahora H no es simplemente un "índice de fase", sino que tiene una estructura más complicada:

$$H = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta < \theta_c \\ [0,1], & \text{si } \theta = \theta_c \\ 1, & \text{si } \theta > \theta_c \end{cases} \tag{2.11}$$

es decir, es el grafo de Heaviside.

Si suponemos que tenemos dos fases reales (por así decirlo) y definimos

$$\theta = \beta(E) + \theta_c \tag{2.12}$$

(función continua y tal que $\theta \equiv \theta_c$ para $E \in [0,\lambda]$) y

$$\tilde{\beta}(\theta) = \int_{\theta_c}^{\theta} k(\eta)\, d\eta , \tag{2.13}$$

$$B(E) = \tilde{\beta}(\beta(E)) , \tag{2.14}$$

se puede ver fácilmente que en cada caso la ecuación (2.3) se escribe

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \Delta B(E) + R(E) , \tag{2.15}$$

donde $R(E)$ coincide con $r(\theta)$ para $E \notin [0,\lambda]$.

Multiplicando por funciones "test" $\phi \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \times [0,T])$, nulas en $\Omega \times \{T\}$ y en $\partial\Omega \times [0,T]$, siguiendo un procedimiento bien conocido de integración por partes en cada fase y teniendo en cuenta las condiciones en la frontera libre, se llega a la ecuación

$$\int_0^T \int_\Omega [E\, \phi_t + B(E)\, \Delta\phi + R(E)\, \varphi]\, dxdt \; + \int_\Omega E_0(x)\, \varphi(x,0)\, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega \times (0,T)} B_0(x,t)\, \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma\, dt, \tag{2.16}$$

que debe ser satisfecha por E para cualquier función ϕ perteneciente a dicha clase. En (2.16) $E_0(x)$ es el valor inicial de la energía y $B_0(x,t) = B(\Xi(x,t))$, donde $\Xi(x,t)$ es la temperatura dada en el borde $\partial\Omega \times (0,T)$. El término $R(E)$ es ahora una extensión para $E \in [0,\lambda]$ de la función $r(\beta(E))$.

Ahora es natural definir una solución $E \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ de (2.16) como la solución débil del problema de Stefan.

Esto no es distinto que decir que la ecuación diferencial (2.15) vale globalmente en $\Omega \times (0,T)$ en el sentido distribucional: se notará que hay una distribución del tipo "δ de Dirac" centrada sobre la frontera libre (si hay una frontera libre).

Luego, el sentido de (2.16) es el de un balance energético que incluye la absorción y la emisión de calor latente.

Aquí tenemos una sola incógnita (la energía) y el papel de "frontera libre" es asumido por el conjunto N donde $E(x,t)$ toma valores entre 0 y λ (o equivalentemente donde la temperatura es cero).

Estas son todas diferencias importantes respecto al caso discutido antes, pero hay otra diferencia, que (finalmente) introduce el concepto de zona pastosa: <u>la medida de N puede ser no cero</u>. En tal caso se dirá que el conjunto N es ocupado por una zona pastosa.

Vale la pena recordar que se pueden calcular soluciones aproximadas de (2.15) suavizando β y $\tilde{\beta}$ y que el procedimiento es convergente.

Se recuerda también que hay otras formas equivalentes de definir la solución débil, pero aquí no se quiere discutir este asunto.

C. **La zona pastosa.**

La primera formulación débil del problema de Stefan es debida a S.Kamenomostkaya (hoy S.Kamin) [K] y O.A.Oleinik [O], y fue extensamente estudiada por A.Friedman [Fr1], [Fr2]. Desde entonces fue claro que la solución débil podía contener regiones de medida no nula a la temperatura del cambio de fase, cuyo estado era definido por el valor de la energía (su nombre entonces era "nubes").

Naturalmente se intentó probar la equivalencia de las formulaciones clásica y débil en los casos usuales. En esta dirección fueron los trabajos [FPK] (caso unidimensional), [M1] (en más de una dimensión) y también [RB]. En [RB] se demuestra que si no hay fuentes ni sumideros de calor, entonces la medida de la región pastosa es una función no creciente del tiempo (luego, no hay zonas pastosas en $\Omega \times (0,T)$

si no las hay en $\Omega \times \{0\}$).

Otro resultado, digamos negativo, sobre las zonas pastosas es el de [M2]: bajo la misma hipótesis $R(E) = 0$ (ni fuente ni sumidero) en el caso unidimensional la zona pastosa va a desaparecer después de un tiempo finito si la temperatura en el borde satisface algunas condiciones muy generales (el resultado prescinde de la distribución inicial de energía).

Por otro lado habría ejemplos que sugerirían una investigación en la dirección opuesta, es decir estudiar cómo se producen las zonas pastosas (por ejemplo por efecto de una fuente de calor interna: pensemos en la fusión de un metal producida por una corriente eléctrica), o más generalmente cómo éstas evolucionan.

Este punto de vista devuelve nuestra atención hacia una formulación de tipo clásico, que es el contexto natural en que se puede estudiar la evolución de cada fase y de sus fronteras.

Una indicación en este sentido viene por ejemplo desde el problema considerado en [A]: calcular la solución débil para el siguiente problema de fusión en simetría plana. Un estrato de espesor L se halla al tiempo $t = 0$ en la fase sólida a una temperatura uniforme $\theta_0 < \theta_c$; la temperatura de la frontera exterior queda igual a θ_0 para cada $t > 0$ y en el interior hay una fuente constante de calor A . Es claro que si son satisfechas ciertas relaciones entre los coeficientes térmicos y las constantes L , θ_0 y A , entonces hay un punto (por simetría el punto medio) y un instante T^* en el cual la temperatura alcanza el valor θ_c. Es igualmente claro que no se puede esperar la aparición de la fase líquida inmediatamente después de $t = T^*$ porque la fuente de calor introduce la energía necesaria solamente en un tiempo finito. Aparece entonces una zona pastosa (zp). El cálculo numérico realizado en [A] muestra exactamente la aparición de una frontera sólido/(zp) y después, de una segunda frontera (zp)/líquido. Las dos fronteras se encuentran, desapareciendo la región pastosa y quedando solamente las fases líquida y sólida.

D. Programa de estudio de las zonas pastosas.

Lo que dijimos hasta ahora es una motivación suficiente del siguiente programa que queremos desarrollar en el resto de la Parte I.

1. <u>Plantear un esquema clásico del proceso de cambio de fase con zonas pastosas.</u>

Lo que vamos a buscar es una formulación al estilo de la formulación clásica del problema de Stefan, pero basada en la incógnita energía y en la cual aparecen explícitamente las zonas pastosas y sus fronteras.

Si logramos cumplir esta tarea, entonces tendremos tres formulaciones:

(FC) *la formulación clásica extendida*, que tiene generalmente un carácter formal,

(FD) *la formulación débil*, que describe correctamente la evolución de la energía y en la cual no aparecen explícitamente las fronteras libres del problema, (FE) *la formulación clásica para la energía*, que se distingue de la (FC) porque contiene una descripción de las zonas pastosas que consiste en una ecuación de evolución para la energía y en apropiadas condiciones de frontera libre. Además, en (FE) la temperatura en cada fase tiene el signo correcto.

Las soluciones correspondientes serán indicadas con los símbolos SC, SD, SE. Si la formulación (FE) es correcta, cada vez que haya una solución SE entonces deberá ser SE = SD.

2. Encontrar condiciones que impliquen SC $\neq$ SD.

Si eso ocurre, dichas condiciones dan un criterio para decidir si va a aparecer una zona pastosa. Se pasará entonces a la formulación (FE) con la intención de buscar la estructura de la zona pastosa.

3. Probar existencia y unicidad de SE.

Este objetivo sigue lógicamente el punto 2.

E. Otras notas bibliográficas.

Algunas condiciones de frontera libre para fronteras de zonas pastosas se hallan escritas por primera vez en [GC]. Una formulación más precisa y los primeros resultados matemáticos se consiguieron independientemente en [M3], [P2], [S].

Lo que vamos a ilustrar más adelante acerca del punto 1 del programa está básicamente en [FP3] y [FP4]. Los resultados de 2 y 3 vienen del trabajo [FP5] y se hallan ilustrados en [PU] con ejemplos numéricos. Tienen interés para el desarrollo de la teoría los trabajos [FP6] y [FP7] que estudian casos críticos para (FC) en relación con el problema de la difusión-consumo de oxígeno.

Vale le pena recordar que basándose en la formulación (FE) fue posible desarrollar la teoría matemática para el ejemplo de [A] descripto antes (ref. [U]). Un estudio de un problema más general se encuentra en [BdMP1,2].

Una análoga teoría de fase intermedia para el problema de la difusión-consumo de oxígeno se halla ilustrada en [DU].

Finalmente se remite a los artículos de revisión [T1], [P1] y [N] para ulteriores referencias.

3. LA FORMULACION CLASICA PARA LA ENERGIA

A. El caso n-dimensional.

El punto de ataque natural es la formulación débil (2.B). Si hay una solución débil bastante suave se pueden definir los conjuntos (no se confundan con los de la sección 2.A)

$$L = \{ (x,t) \in \Omega \times (0,T) : E > \lambda \} \qquad \text{(región líquida)},$$
$$S = \{ (x,t) \in \Omega \times (0,T) : E < 0 \} \qquad \text{(región sólida)},$$
$$N = \Omega \times (0,T) \setminus (L \cup S) \ \text{ y } \ M = \mathring{N} \qquad \text{(región pastosa)}$$

Si además θ, definida por (2.12), pertenece a $C^{2,1}(L \cup S) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$, $E \in C^{1,1}(M) \cap C(\overline{M})$, las fronteras L-S, L-M, M-S son suaves y $\nabla\theta$ tiene límite en cada lado de las mismas, entonces demostremos que de (2.16) se llega a las ecuaciones

$$c(\theta)\,\theta_t = \nabla \cdot (\, k(\theta)\ \nabla\theta\,) + r(\theta) \qquad \text{en } L \text{ y en } S, \tag{3.1}$$

$$E_t = R(E) \qquad \text{en } M \tag{3.2}$$

y sobre la interfase genérica A-B (donde A y B representan dos símbolos distintos elegidos entre L, S, M)

$$\theta = \theta_c \ , \tag{3.3}$$

$$[\![E]\!]_A^B \ \vec{V} \cdot \vec{n} = [\![-k\ \nabla\theta]\!]_A^B \cdot \vec{n}\ . \tag{3.4}$$

La ecuación (3.1) se demuestra tomando ϕ en (2.3) con soporte compacto y arbitraria en $L \cup S$ y usando la fórmula de Green. En manera semejante se prueba (3.2), tomando ϕ con soporte compacto en M y recordando que $\Delta B(E) = 0$ en M.

La igualdad (3.3) no necesita explicación, mientras (3.4) se obtiene utilizando en (2.3) funciones ϕ cuyo soporte es atravesado por la superficie interfase A-B: teniendo en cuenta (3.1), (3.2) la contribución sobre la interfase implica justamente el balance (3.4).

Si la superficie de interfase A-B tiene la representación

$$\Phi(x,t) = 0\ , \qquad \nabla\Phi \neq 0\ , \tag{3.5}$$

entonces la condición de frontera libre (3.4) se escribe

$$-\,[\![E]\!]_A^B\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} = [\![-k\ \nabla\theta\cdot\nabla\Phi]\!]_A^B\ . \tag{3.6}$$

Evidentemente, si las fases A-B son L-S, (3.6) no es otra cosa que la condición de Stefan (2.9).

DEFINICION 3.1. *El sistema* (3.1), (3.2), (3.3), (3.6) *junto con las condiciones de suavidad para* θ *y* E *constituye la formulación* (*FE*).

OBSERVACION 3.1. Una característica interesante de la formulación (FE) es que hay una ecuación de primer orden (3.2) (aquí simplemente una ecuación ordinaria) acoplada con la ecuación parabólica (3.1) por medio de las condiciones de frontera libre.

OBSERVACION 3.2. Cuando una de las fases A-B es M, entonces hay dos diferencias importantes respecto al caso L-S. Por un lado la condición se simplifica porque $\nabla\theta = 0$ en M, pero se debe tener cuidado con el factor $[E]_A^B$ que necesita una atenta discusión preliminar. En lo que sigue vamos a desarrollar este análisis para el caso de una sola dimensión espacial; ahora comentamos brevemente las formas típicas de (3.6).

(i) Si se tiene $[E]_A^B = 0$, es decir si la energía es continua a través de la interfase, entonces (3.6) equivale a la condición de frontera libre

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \tag{3.7}$$

(continuidad del flujo térmico) y tenemos un problema de frontera libre para la fase pura con datos de Cauchy. Al mismo tiempo la continuidad de la energía provee la condición inicial para integrar (3.2). Esta información es fundamental porque, como se verá, este caso se realiza cuando la región M se halla "arriba" (respecto a la dirección temporal) de la interfase.

(ii) Si M se halla "debajo" de la interfase, entonces se debe suponer que $E(x,t)$ se calcula integrando (3.2) con algunas condiciones iniciales encontradas antes (por ejemplo para $t = 0$) y así (3.6) llega a ser una condición del tipo de Stefan, pero con calor latente variable.

B. <u>El caso unidimensional.</u>

Pongamos $\Phi(x,t) = x - s(t)$. Entonces (3.6) se escribe

$$[\![E]\!]_A^B\,\dot{s} = [\![-k\,\frac{\partial\theta}{\partial x}]\!]_A^B. \tag{3.8}$$

No hay necesidad de comentar el caso de la interfase L-S. Por el contrario tenemos que ilustrar en detalle las condiciones para las interfases S-M y L-M. Queremos hacer un análisis a priori de las soluciones SE para aclarar las posibles estructuras de (3.8).

Con una traslación de escala se pone $\theta_c = 0$.

B1. *Interfase* S $(x < s(t))$ - M $(x > s(t))$.

Recordamos que la función $r(\theta)$ en (3.1) es una función suave para $\theta \neq 0$, acotada y con límites en ambos lados, lo que hace posible definir $R(E)$ continua para $E \in (-\infty,+\infty)$. Además es útil introducir la hipótesis

(*) *si* $r(0^-) = R(0) = 0$, *entonces* $r(\theta) \leq 0$ *para* $\theta \leq 0$.

No se necesita ninguna limitación si $R(0) \neq 0$.

Nuestro objetivo es analizar (3.8) que en la presente situación se escribe

$$E^M \; \dot{s}(t) = k_S \; \theta^S_x , \tag{3.9}$$

donde $k_S = k(0-)$, $\theta^S_x = \theta_x(s(t)-,t)$ y $E^M = E(s(t)^+,t)$.

La interpretación de (3.9) se basa en el siguiente resultado básico

LEMA 3.1. *Bajo la hipótesis* (*) *se tiene la equivalencia*

$$\theta^S_x = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{s} \leq 0 \tag{3.10}$$

en el intervalo de validez de (3.9).

<u>Demostración.</u>

Sea $\theta^S_x = 0$ en un intervalo de tiempo I en el que (3.9) es satisfecha. Entonces el par (s,θ) resuelve en S un problema de frontera libre para la ecuación (3.1) con datos de Cauchy $\theta^S = \theta^S_x = 0$ sobre la frontera libre. Como hay por hipótesis suficiente suavidad, sigue que $\theta^S_t = 0$, es decir que sobre la frontera libre

$$k_S \; \theta^S_{xx} = -R(0). \tag{3.11}$$

Debido al hecho que $\theta \leq 0$ en S, se tiene $\theta^S_{xx} \leq 0$ y entonces hay dos casos posibles:

(i) $R(0) > 0$

(ii) $R(0) = 0$, que por (*) implica $R \leq 0$ en S.

El caso (ii) contradice el principio del máximo fuerte junto con la bien conocida propiedad del signo de la derivada θ_x en un punto de máximo absoluto (p.e. [Fr3], p.49).

Queda solamente el caso (i) en que (3.9) es

$$E^M \; \dot{s} = 0. \tag{3.12}$$

Si fuera $\dot{s}(t) > 0$ sería $E^M = 0$, de donde integrando (3.2) hacia el pasado, teniendo en cuenta $R(0) > 0$ se encuentra $E < 0$ en M, o sea un resultado erróneo. Luego, se probó

$$\theta^S_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s} \leq 0.$$

Supongamos ahora $\dot{s} \leq 0$. De $E^M \geq 0$ y $\theta^S_x \geq 0$ sigue inmediatamente $\theta^S_x = 0$. □

Si se privilegia el papel de R(0), se llega a una nueva versión del mismo resultado:

LEMA 3.2. *Bajo la hipótesis* $(*)$ *se tiene*

$$R(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta^S_x > 0\,, \tag{3.13}$$

$$R(0) > 0 \ \ y \left| \begin{array}{l} \dot{s} > 0 \ \Rightarrow \ \theta^S_x < 0\,, \\ \\ \dot{s} \leq 0 \ \Rightarrow \ \theta^S_x = 0 \end{array} \right. \tag{3.14}$$

en el intervalo de validez de (3.9).

Demostración.

Ya vimos que $R(0) \leq 0$ no es compatible para ningún valor de t con $\theta^S_x = 0$, es decir (3.13) es cierta.

En el caso restante la implicación $\dot{s} \leq 0 \Rightarrow \theta^S_x = 0$ es parte del Lema anterior. Finalmente, recordamos que no se puede tener $\theta^S_x = 0$ si $\dot{s} > 0$ porque se viola la condición $E > 0$ en M.

□

Se puede ahora enunciar la interpretación de (3.9) en una forma más expresiva, la cual privilegia el signo de $\dot{s}$, es decir el sentido del proceso de cambio de fase.

TEOREMA 3.1. *Bajo la hipótesis* $(*)$

(a) $\qquad \dot{s} \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta^S_x = 0 \quad y \quad R(0) > 0\,,$

(a') $\qquad \dot{s} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad E^M = 0\,,$

(b) $\qquad \dot{s} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta^S_x > 0 \quad y \quad E^M > 0,$

en el intervalo de validez de (3.9).

El Teorema 3.1 es simplemente otra manera de ordenar los resultados del Lema anterior.

Antes de comentar lo que obtuvimos, consideremos el análogo caso de una frontera L-M.

B2. *Interfase* $L\ (x < s(t))$ - $M\ (x > s(t))$.

La hipótesis paralela a $(*)$ es

$(**)$ $\qquad$ *si* $r(0^+) = R(\lambda) = 0$, *entonces* $r(\theta) \geq 0$ *para* $\theta \geq 0$

(ninguna limitación si $R(\lambda) \neq 0$).

La condición de frontera libre (3.9) tiene la forma

$$(E^M - \lambda)\ \ \dot{s}(t) = k_L\ \theta^L_x\,, \tag{3.15}$$

donde $k_L = k(0^+)$, $\theta^L_x = \theta_x(s(t)^-,t)$, $E^M = E(s(t^+),t)$.

No es necesario ilustrar la prueba de los siguientes resultados:

LEMA 3.3. *Bajo la hipótesis* (**)

$$\theta^L_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{s}(t) \leq 0 \tag{3.16}$$

en el intervalo de validez de (3.15).

LEMA 3.4. *Bajo la hipótesis* (**)

$$R(\lambda) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta^L_x < 0 \,, \tag{3.17}$$

$$R(\lambda) < 0 \quad y \quad \left| \begin{array}{l} \dot{s} > 0 \; \Rightarrow \; \theta^L_x < 0 \,, \\ \\ \dot{s} \leq 0 \; \Rightarrow \; \theta^L_x = 0 \end{array} \right. \tag{3.18}$$

en el intervalo de validez de (3.15).

TEOREMA 3.2. *Bajo la hipótesis* (**)

(a) $\dot{s} \leq 0 \;\Rightarrow\; \theta^L_x = 0 \quad y \quad R(\lambda) < 0$,

(a') $\dot{s} < 0 \;\Rightarrow\; E^M = \lambda$,

(b) $\dot{s} > 0 \;\Rightarrow\; \theta^L_x < 0 \quad y \quad E^M < \lambda$,

en el intervalo de validez de (3.15).

OBSERVACION 3.3. El Teorema 3.1 y la igualdad (3.9) se pueden resumir en la condición de frontera libre (de tipo unilateral)

$$E^M \; [\dot{s}]^+ = E^M \, \dot{s} = k_S \quad \theta^S_x \,, \tag{3.19}$$

como se puede controlar fácilmente. En manera semejante (3.15) y el Teorema 3.2 se sintetizan en la forma

$$(E^M - \lambda) \; [\dot{s}]^+ = (E^M - \lambda) \, \dot{s} \; = k_L \quad \theta^L_x \,. \tag{3.20}$$

OBSERVACION 3.4 Cambiar las posiciones recíprocas de las dos fases equivale al cambio de x con $-x$.

Hay una manera muy expresiva de interpretar los resultados obtenidos:

(a) Si la zona pastosa no se contrae , entonces se tiene que resolver en la fase limítrofe un problema de frontera libre con datos de Cauchy ambos nulos, además este problema no es acoplado con el problema de evolución en la zona pastosa.

Finalmente el término de fuente $r(\theta)$ no puede ser cero.

(a') Si la zona pastosa se expande hacia el sólido o el líquido, se puede afirmar que $E^M = 0$ o $E^M = \lambda$ respectivamente, lo que permite calcular E en M por integración de (3.2) a partir de la frontera libre.

(b) Si la fase pura se expande, entonces el problema en la fase pura es un problema del tipo de Stefan con calor latente dependiente de E en M. Naturalmente E tiene que ser calculada previamente a partir de datos conocidos (por ejemplo para $t = 0$ o también sobre una anterior frontera de expansión de M donde E es 0 o λ).

4. ALGUNOS HECHOS BASICOS SOBRE EL PROBLEMA DE LA DIFUSION-CONSUMO DE OXIGENO.

Como vimos en el Cap. 3, cuando la zona pastosa se expande, según la formulación (FE) se tiene que resolver en la fase limítrofe un problema de frontera libre para una ecuación parabólica no homogénea con datos de Cauchy nulos sobre la frontera libre. Este problema es frecuentemente citado en la literatura como problema de la difusión-consumo de oxígeno [CG].

Si todos los coeficientes son constantes y normalizados a uno, el problema consiste en hallar un par (s,u) en una clase de funciones bastante suaves, tal que

$$u_{xx} - u_t = 1 , \qquad 0 < x < s(t) , \quad 0 < t < T, \tag{4.1}$$

$$s(0) = b > 0 , \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = h(x) \geq 0 , \qquad 0 < x < b , \tag{4.3}$$

$$u(0,t) = g(t) \geq 0 , \qquad 0 < t < T, \tag{4.4}$$

$$u(s(t),t) = 0 , \quad u_x(s(t),t) = 0 , \quad 0 < t < T, \tag{4.5}$$

donde el tiempo T es también incógnita.

Un comentario sobre la literatura de este problema se halla en [P1].

Se sabe que en muchos casos los problemas de frontera libre con datos de Cauchy se pueden reducir a problemas de Stefan (para una discusión general v. [F1], [F2]). Teniendo en cuenta la importancia de (4.1)-(4.5) en la formulación (FE), es útil recordar algunos hechos básicos.

A. Relación con el problema de Stefan (coeficientes normalizados).

Es conocido que la transformación

$$z = u_t \tag{4.6}$$

puede llevar el esquema (4.1)-(4.5) a un problema del tipo de Stefan. Para precisar este procedimiento es preferible partir del problema de Stefan

$$z_{xx} - z_t = 0 , \qquad 0 < x < s(t) , \quad 0 < t < T , \tag{4.7}$$

$$s(0) = b > 0 , \tag{4.8}$$

$$z(x,0) = \psi(x) , \qquad 0 < x < b , \tag{4.9}$$

$$z(0,t) = \phi(t) , \qquad 0 < t < T , \tag{4.10}$$

$$z(s(t),t) = 0 , \quad \dot{s}(t) = -z_x(s(t),t), \quad 0 < t < T \tag{4.11}$$

e introducir la transformación

$$u(x,t) = \int_x^{s(t)} d\xi \int_\xi^{s(t)} [\ z(\eta,t) + 1\ ]\ d\eta. \tag{4.12}$$

Es importante notar que no se hizo ninguna hipótesis sobre el signo de las funciones $\phi(t)$ y $\psi(x)$, es decir el problema se plantea en el sentido de la formulación (FC).

Se verifica fácilmente que la función (4.12) satisface (4.1) y (4.5).

El análisis de las condiciones (4.3), (4.4) es más delicado.

De (4,9), (4.12) se obtiene la relación entre h(x) y $\psi(x)$

$$h(x) = \int_x^b d\xi \int_\xi^b [\ \psi(\eta) + 1\ ]\ d\eta. \tag{4.13}$$

Si nos limitamos a soluciones acotadas de (4.7)-(4.11), la función definida por (4.12) es continua y por lo tanto

$$u(0,0) = h(0).$$

Además

$$u_t(0,t) = \phi(t)$$

y por eso se halla la relación entre g(t) y $\phi(t)$

$$g(t) = h(0) + \int_0^t \phi(\tau)\ d\tau. \tag{4.14}$$

Ahora es claro que la transformación de (4.1)-(4.5) en (4.7)-(4.11) mediante (4.6) se puede llevar a cabo sin crear graves singularidades cuando son satisfechas las condiciones

$$h(0) = g(0)\ , \tag{4.15}$$

$$h''(b) - 1 = 0\ , \tag{4.16}$$

Además (4.13), (4.14) implican una cierta suavidad de h(x) y g(t). En particular, se tiene la condición de compatibilidad

$$h(b) = h'(b) = 0. \tag{4.17}$$

Si $h(0) \neq g(0)$, entonces (4.14) sugiere que el dato $\phi(t)$ en (4.10) del problema de Stefan asociado se comporta como una δ de Dirac. Claramente esta singularidad influye de manera importante sobre la solución. Sin embargo la negación de (4.16) puede comportar consecuencias más graves, porque la singularidad que nace actúa directamente sobre la frontera libre.

Un análisis de algunas propiedades características y de casos singulares se halla en [FP6], [FP7]. Para nuestra finalidad será suficiente recordar los resultados que se refieren a la posible existencia de soluciones cuando (4.16) no es satisfecha.

OBSERVACION 4.1. Si se interpreta (4.7)-(4.11) desde el punto de vista del cambio de fase, las condiciones de frontera libre (4.11) corresponden al proceso de difusión con cambio de fase en la fase líquida (compárese (4.11) con (3.8)). Si los datos son negativos el problema es llamado problema de solidificación de un líquido sobreenfriado (conviene recordar la Obs. 2.2). Por el principio del máximo $\dot{s} < 0$ y hay una inestabilidad debida al hecho que el calor latente de solidificación liberado eleva la temperatura y acelera el proceso. Por eso el problema de la solidificación de un líquido sobreenfriado contiene dificultades que no se hallan en el problema del cambio de fase usual.

B. El problema de Stefan con discontinuidad en el origen de la frontera libre.

Nos limitaremos a enunciar resultados básicos acerca del problema (4.7)-(4.11) que incluyen el caso $\psi(b) \neq 0$.

TEOREMA 4.1 (*no existencia*). *Si la función $h(x)$ definida por* (4.13) *es no positiva en algún intervalo $(b - \sigma\ ,\ b)$, entonces no hay ninguna solución del problema* (4.7)-(4.11).

La explicación "física" del teorema es que si el líquido es demasiado frío habrá una congelación instantánea, sin evolución de un frente. También se puede decir que si en el problema asociado (4.7)-(4.11) la concentración inicial toma valores negativos (es decir, no físicos) cerca de la frontera libre, el problema no tiene sentido y no sorprende el resultado de no existencia.

El teorema sucesivo precisa el grado de sobreenfriamiento tolerable.

TEOREMA 4.2. (*existencia y unicidad*). *Supóngase que el dato inicial $\psi(x)$ es tal que*

$$\psi(x) > -1 , \qquad \forall \ x \in (b - \sigma\ ,\ b) \tag{4.18}$$

para algún $\sigma > 0$. Entonces el problema (4.7)-(4.11) *tiene una y sólo una solución (del tipo SC) para algún $T > 0$.*

De (4.18) se tiene el

COROLARIO. *La condición*

$$h''(x) > 0 \quad , \qquad \forall \ x \in (b - \sigma\ ,\ b)$$

junto con (4.17) *es suficiente para la existencia y unicidad de la solución del problema de la difusión-consumo de oxígeno* (4.1)-(4.5).

OBSERVACION 4.2. La unicidad se demuestra bajo la condición más general

$$\psi(x) \geq -1 \quad \text{y} \quad \psi(x) \not\equiv -1$$

en algún intervalo $(b - \sigma\ ,\ b)$.

C. **Caso de coeficientes diferentes de uno.**

Es fácil controlar cómo se modifica la desigualdad (4.19) si en la ecuación (4.1) hay coeficientes diferentes de uno:

$$k\, u_{xx} - u_t = A \tag{4.20}$$

($k > 0$, $A > 0$). En este caso las relaciones (4.12), (4.13) son reemplazadas por

$$u(x,t) = \frac{1}{k} \int_x^{s(t)} d\xi \int_\xi^{s(t)} [\, z(\eta,t) + A \,]\, d\eta\,, \tag{4.21}$$

$$h(x) = \frac{1}{k} \int_x^{b} d\xi \int_\xi^{b} [\, \psi(\eta) + A \,]\, d\eta \tag{4.22}$$

y la (4.18) llega a ser

$$\psi(x) > -A\,, \tag{4.23}$$

mientras (4.19) no cambia.

En el esquema (4.7)-(4.11) en lugar de (4.7) encontramos

$$k\, z_{xx} - z_t = 0 \tag{4.24}$$

y en lugar de la segunda de (4.11) tenemos

$$\dot{s}(t) = -\frac{k}{A}\, z_x(s(t),t). \tag{4.25}$$

Es igualmente interesante estudiar el caso $A < 0$. Tomemos

$$-A = R > 0. \tag{4.26}$$

Entonces tiene sentido estudiar el problema

$$u_t - k\, u_{xx} = R \quad , \quad 0 < x < s(t)\,, \qquad 0 < t < T, \tag{4.27}$$

$$s(0) = b > 0 \quad , \tag{4.28}$$

$$u(x,0) = h(x) \leq 0 \quad , \qquad 0 < x < b \quad , \tag{4.29}$$

$$u(0,t) = g(t) \leq 0 \quad , \qquad 0 < t < T, \tag{4.30}$$

$$u(s(t),t) = 0,\; u_x(s(t),t) = 0\,, \qquad 0 < t < T, \tag{4.31}$$

aunque no podamos atribuirle la misma interpretación física del sistema (4.1)-(4.5). Hay resultados análogos, es decir si vale (4.17), el problema es equivalente en el sentido de (4.21) al problema de Stefan (típico de la fase sólida, formulación (FC)) (4.24), (4.8), (4.9), (4.10) y

$$z(s(t),t) = 0 \quad , \quad \dot{s}(t) = \frac{k}{R}\, z_x(s(t),t)\,, \tag{4.23}$$

donde las relaciones entre h, ψ y entre g, ϕ son dadas por (4.22) (con $A = -R$) y (4.14) respectivamente. Si ϕ, $\psi \geq 0$ se habla de fusión de un sólido sobrecalentado.

Además se prueban en manera semejante los siguientes teoremas.

TEOREMA 4.3. *Si $h(x)$, definida por* (4.22) (*con* $A = -R$) *es no negativa en las proximidades de $x = b$, entonces el problema no tiene ninguna solución.*

TEOREMA 4.4. *Si hay un intervalo* $(b - \sigma\ ,\ b)$ *en el cual*

$$\psi(x) < R\ , \tag{4.33}$$

entonces el problema (4.24), (4.8), (4.9), (4.10), (4.32) *tiene una y sólo una solución (del tipo SC).*

COROLARIO. *Si además de* (4.17) *la función* $h(x)$ *es tal que*

$$h''(x) < 0 \tag{4.34}$$

en algún intervalo $(b - \sigma\ ,\ b)$, *el problema* (4.27)-(4.31) *tiene una y sólo una solución.*

5. PRODUCCION DE ZONAS PASTOSAS POR UNA FUENTE INTERNA DE CALOR.

A. El problema físico.

Después del paréntesis sobre el problema de la difusión-consumo de oxígeno, volvamos a seguir el programa trazado en el §2.D, limitándonos al caso de una sola dimensión espacial.

Queremos descubrir cuándo una fuente de calor puede generar una zona pastosa alrededor de un punto donde la temperatura ha alcanzado el valor crítico del cambio de fase, que se supone igual a cero.

Para simplificar, nos referiremos al caso de coeficientes y fuentes constantes. Luego se tratará la ecuación

$$\theta_t - k\ \theta_{xx} = R$$

($k = k_L$ en la fase líquida, $k = k_S$ en la fase sólida), con $R > 0$. El caso $R < 0$ (sumidero de calor) es simétrico.

A pesar de la normalización del coeficiente de θ_t, conservamos para el término R el sentido de fuente de calor, utilizándolo directamente en la ecuación de evolución de la energía, sin introducir otro símbolo. Si lo desea, el lector podrá fácilmente tener en cuenta la corrección necesaria.

Debido al carácter local del resultado que vamos a buscar, no tenemos interés en la influencia de los datos en el borde fijo. Por eso planteamos el problema en el medio infinito $-\infty < x < +\infty$.

Si

$$\theta(x,0) = h(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

es la condición inicial, suponemos h continua para $x \neq 0$ y, si es necesario, más suave y acotada. Además suponemos que $x = 0$ es un punto crítico en el sentido que uno de los casos siguientes ocurre:

(i) $\quad h(x)\ x < 0,\ \ x \neq 0$: fases iniciales L-S,

(ii) $h(x) < 0, \; x \neq 0$: fases iniciales S-S,

(iii) $h(x) = 0, \; x < 0$; $h(x) > 0, \; x > 0$: fases iniciales M-L,

(iv) $h(x) = 0, \; x < 0$; $h(x) < 0, \; x > 0$: fases iniciales M-S,

(v) $h(x) \equiv 0, \; x \in \mathbb{R}$: fases iniciales M-M.

Naturalmente hay muchos subcasos de (iii), (iv), (v) según el valor de la energía donde $h = 0$. Es claro que los casos simétricos de (i)-(v) se tratan en manera similar. En algunos casos se pueden considerar desigualdades no estrictas para h en (i)-(iv) pero con oportunas precauciones. No queremos entrar en este detalle.

El caso $h(x) > 0$ para $x \neq 0$ no presenta ningún interés porque no hay nacimiento de nuevas fases (para cualquier $t > 0$ el medio está en estado líquido).

Finalmente hagamos la hipótesis

(H) *en cualquier intervalo próximo al origen donde $h(x) \not\equiv 0$, h y sus derivadas no tienen un punto de acumulación de ceros.*

B. Caso (i) : fases L-S para t = 0.

Un criterio para decidir si una zona pastosa va a nacer se puede obtener analizando el comportamiento de la solución SC, es decir la solución (s,u) del sistema

$$u_t - k_L\, u_{xx} = R \qquad \text{en } D_L \equiv \{(x,t) : x < s(t),\; t \in (0,T)\}, \tag{5.1}$$

$$u_t - k_S\, u_{xx} = R \qquad \text{en } D_S \equiv \{(x,t) : x > s(t),\; t \in (0,T)\}, \tag{5.2}$$

$$u(x,0) = h(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

$$s(0) = 0\,, \tag{5.4}$$

$$u(s(t),t) = 0\,, \qquad t \in (0,T), \tag{5.5}$$

$$-\, k_L\, u_x(s(t)^-,t) + k_S\, u_x(s(t)^+,t) = \lambda\, \dot{s}(t), \qquad t \in (0,T). \tag{5.6}$$

El principio del máximo garantiza que $u > 0$ en D_L. Hasta que $u < 0$ en D_S, la solución SC coincide con SD, es decir describe correctamente el proceso. Lo que vamos a buscar es una condición para h(x) y R, bajo la cual u(x,t) tome valores positivos en D_S, implicando SC $\neq$ SD. El resultado se basa en la comparación de h(x) con la siguiente función

$$h_0(x,\alpha) = k_S\, R\, \alpha^{-2}\, [1 - \exp(-\alpha \tfrac{x}{k_S})] - R\, \alpha^{-1}\, x\,, \qquad \alpha \neq 0 \tag{5.7}$$

$$h_0(x,0) = -\, R\, x^2\, (2k_S)^{-1}\,.$$

El desarrollo

$$h_0(x,\alpha) = (\frac{R}{k_S}) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} (\frac{\alpha}{k_S})^{n-2}\, \frac{x^n}{n!} \tag{5.8}$$

muestra que $h_0(0,\alpha) = h_{0x}(0,\alpha) = 0$ y que $h_{0\alpha}(x,\alpha) > 0$ para $x > 0$ bastante pequeño.

Para enunciar el resultado que nos interesa distingamos dos casos:

Caso 1: la pendiente $\beta = \dot{s}(0)$ está definida.

Si los límites $h'(0-)$ y $h'(0^+)$ existen, entonces

$$\beta = [\, -k_L\, h'(0-) + k_S\, h'(0^+)\,] / \lambda. \tag{5.9}$$

Caso 2: $\lim_{t\to0^+} \dot s(t) = +\infty$ o $\lim_{t\to0^+} \dot s(t) = -\infty$,

TEOREMA 5.1. *En el Caso 1, si hay un intervalo* $(0,x_0)$ *tal que*

$$h(x) < h_0(x,\alpha) \quad , \quad \forall \quad x \in (0,x_0) \tag{5.10}$$

para algún $\alpha < \beta$, *entonces SC = SD en algún intervalo* $(0,t_0)$.

Si por el contrario hay un intervalo $(0,x_0)$ *tal que*

$$h(x) > h_0(x,\alpha) \quad , \quad \forall \quad x \in (0,x_0) \tag{5.11}$$

para algún $\alpha > \beta$, *entonces SC* $\neq$ *SD.*

En el Caso 2 siempre tenemos SC = SD (localmente).

Demostración. *Caso* 1, *hipótesis* (5.10). Bajo la transformación

$$y = x - s(t) \; , \quad v(y,t) = u(y + s(t),t) \tag{5.12}$$

el problema (5.2), (5.3), (5.5) toma la forma

$$\begin{aligned} &v_t - k_S\, v_{yy} - \dot s\, v_y = R \,, && y > 0 \,, \quad t \in (0,T) \,, \\ &v(y,0) = h(y) \,, && y > 0 \,, \\ &v(0,t) = 0 \,, && t \in (0,T). \end{aligned}$$

La función $h_0(y,\alpha)$ es la solución estacionaria de la ecuación

$$v_t - k_S\, v_{yy} - \alpha\, v_y = R \,, \qquad y > 0 \,, \quad t > 0$$

que satisface las condiciones $h_0(o,\alpha) = h_{0y}(o,\alpha) = 0$.

Para el resto $w(y,t) = h_0(y,\alpha) - v(y,t)$ tenemos el sistema

$$\begin{aligned} &w_t - k_S\, w_{yy} - \dot s\, w_y = (\alpha - \dot s)\, h_{0y}(y,\alpha), && y > 0 \,, \quad t \in (0,T) \,, \\ &w(y,0) > 0 \,, && y \in (0,x_0) \,, \\ &w(0,t) = 0 \,, && t \in (0,T). \end{aligned}$$

Por la hipótesis $\alpha < \beta$ hay un intervalo $(0,t_1)$ en el cual $\alpha - \dot s(t) < 0$. Además $h_{0y}(y,\alpha) < 0$ para $y > 0$ y por lo tanto el principio del máximo implica $w(y,t) > 0$ en algún rectángulo $(0,x_0) \times (0,t_0)$. Luego, de $v(y,t) < h_0(y,\alpha) < 0$ se encuentra $u(x,t) < 0$ en D_S cerca del origen, de donde se halla SC = SD.

Caso 1, *hipótesis* (5.11). En manera semejante se prueba que $w(y,t) < 0$ en algún rectángulo $(0,x_0) \times (0,t_0)$ y por eso $w_y(0,t) < 0$, es decir $v_y(0,t) > 0$ en $(0,t_0)$, que es lo mismo que $u_x(s(t)^+,t) > 0$.

Por consiguiente $u(x,t)$ toma valores positivos en puntos de D_S cerca de la frontera libre y SC $\neq$ SD.

Caso 2. Si $\lim_{t\to0^+} \dot s(t) = -\infty$, se tiene $\dot s(t) < 0$ cerca de $t = 0$. Entonces, por (5.6) $\sup u_x(s(t),t) < 0$ en algún intervalo $(0,t_1)$ y se obtiene el resultado buscado.

Si $\lim_{t\to0^+} \dot s(t) = +\infty$, la función $h(x)$ se puede aproximar con una sucesión $\{h_n\}$ monótona de funciones suaves uniformemente en compactos de $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Se sabe que la correspondiente sucesión $((s_n,u_n))$ de soluciones converge a la solución (s,u).

En particular $s_n \to s$ uniformemente y $\dot{s}_n(0) \to +\infty$.

Por el hecho que $h_0(x,\beta) \to 0$ si $\beta \to +\infty$, se pueden hallar $\alpha > 0$ y n_0 tal que todas las funciones $h_n(x)$ con $n > n_0$ satisfacen (5.10). Por lo tanto las soluciones correspondientes (s_n,u_n) son físicas en un intervalo $(0,t_0)$. Más aún, se reconoce que se puede elegir t_0 independientemente de n. Entonces pasando al límite $n \to \infty$ se concluye que también (s,u) es una solución SD. □

OBSERVACION 5.1. Con la misma técnica se demuestra el resultado siguiente.

Si hay un intervalo $(0,t_0)$ *en que* $\dot{s}(t) \leq \beta$ *y un intervalo* $(0,x_0)$ *en que* $h(x) \geq h_0(x,\beta)$, $h(x) \not\equiv h_0(x,\beta)$, *entonces* $SC \neq SD$. *Invirtiendo las desigualdades se halla* $SC = SD$ *(localmente).*

C. Caso (i) : Criterio para la aparición de una zona pastosa.

Del Teorema 5.1 (y exactamente de (5.11)) sigue inmediatamente que las condiciones

$$h(0^+) = h'(0^+) = 0 \qquad (\Rightarrow \beta = -\frac{1}{\lambda} k_L\, h'(0-) \geq 0\,) \tag{5.13}$$

son <u>necesarias</u> para que se halle $SC \neq SD$, es decir para el nacimiento de una zona pastosa. Condiciones <u>suficientes</u> se pueden lograr de (5.11) y (5.8), suponiendo que $h(x)$ es bastante suave para $x > 0$:

$$h''(0^+) > -\frac{R}{k_S} \tag{5.14}$$

(porque $h_{0xx}(0,\alpha) = -\frac{R}{k_S}$, independientemente de α),

$$h''(0^+) = -\frac{R}{k_S}, \qquad h'''(0^+) > \beta\frac{R}{k_S^2} = h_{0xxx}(0,\beta) \tag{5.15}$$

(por la misma razón que antes). Notemos que bajo (5.13), (5.14) $SC \neq SD$ para cualquier distribución de temperatura $h(x) \geq 0$ en la fase líquida para $t = 0$.

Se puede ir más adelante con esta técnica, comparando derivadas de orden superior, si se supone que la solución SC tiene derivadas continuas en $\overline{D}_S$ hasta el orden necesario. Si valen (5.13) y

$$h''(0^+) = -\frac{R}{k_S}, \qquad h'''(0^+) = \beta\frac{R}{k_S^2} = h_{0xxx}(0,\beta)\,, \tag{5.16}$$

entonces $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{d}{dt}u_x(s(t)^+,t) = 0$ y no solamente $\dot{s}(0)$ sino también $\ddot{s}(0)$ son determinadas por la sola temperatura inicial en el líquido :

$$\beta_2 \equiv \ddot{s}(0) = -\frac{1}{\lambda}\, k_L{}^2 \,[\, -\frac{1}{\lambda}\ h'(0^-)\, h''(0^-) + h'''(0^-)\,] \,. \tag{5.17}$$

Si $\beta_2 < 0$ es posible aplicar la Obs. 5.1 ($\dot{s}(t) < \beta$) y comparar las derivadas de h en $x = 0$ con las derivadas de $h_0(x,\beta)$ y deducir condiciones suficientes para $SC \neq SD$.

En este caso se tiene $SC \neq SD$ si para algún $n > 1$

$$h^{(p)}(0^+) = (-1)^{p+1}\,\frac{R}{k_S}\,\left(\frac{\beta}{k_S}\right)^{p-2}, \qquad p = 2,\ldots,n-1, \tag{5.18}$$

y

$$h^{(n)}(0^+) > (-1)^{n+1}\,\frac{R}{k_S}\,\left(\frac{\beta}{k_S}\right)^{n-2}, \tag{5.19}$$

La situación opuesta, es decir $\beta_2 > 0$ hace posible encontrar condiciones suficientes para $SC = SD$: basta invertir el signo de la desigualdad en (5.19).

D. Caso (i) : Existencia de la zona pastosa.

TEOREMA 5.2. *Bajo las hipótesis (H), §A y (5,11) del Teorema 5.1 (o las más generales de la Obs. 5.1) hay una y sólo una solución SE del problema del cambio de fase y dicha solución tiene una región pastosa* $M \neq \emptyset$.

Demostración

Es claro que como "problema de cambio de fase" se entiende la formulación (FE) descripta en el Cap. 3, §B, es decir queremos buscar una solución del siguiente problema

$$\theta_t - k_L\theta_{xx} = R > 0 \quad \text{en} \quad D_L \equiv \{(x,t) : x < \rho(t),\ 0 < t < T\}\,, \tag{5.20}$$

$$\theta_t - k_S\theta_{xx} = R > 0 \quad \text{en} \quad D_S \equiv \{(x,t) : \sigma(t) < x,\ 0 < t < T\}\,, \tag{5.21}$$

$$E_t = R \quad \text{en} \quad D_M \equiv \{(x,t) : \rho(t) < x < \sigma(t),\ 0 < t < T\}\,, \tag{5.22}$$

$$\rho(0) = \sigma(0) = 0\,, \tag{5.23}$$

$$\theta(x,0) = h(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{5.24}$$

$$\theta(\sigma(t)^+,t) = \theta_x(\sigma(t)^+,t) = 0\,, \qquad 0 < t < T\,, \tag{5.25}$$

$$E(\sigma(t)^-,t) = 0\,, \qquad 0 < t < T\,, \tag{5.26}$$

$$\theta(\rho(t)^-,t) = 0\,, \qquad 0 < t < T\,, \tag{5.27}$$

$$[\,\lambda - E(\rho(t)^+,t)]\ \dot{\rho}(t) = -k_L\theta_x(\rho(t)^-,t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{5.28}$$

con los vínculos

$$\dot{\rho}(t) \geq 0\,,\ \dot{\sigma}(t) \geq 0\,,\ \ 0 < E(x,t) < \lambda \qquad \text{en} \quad D_M \neq \emptyset. \tag{5.29}$$

El problema (5.20)-(5.29) surge del análisis hecho cuando se planteó la formulación (FE) para el caso unidimensional: siendo $R > 0$, la zona pastosa no se puede expandir hacia el líquido; por otro lado esperamos que la zona pastosa nazca para $t > 0$ y que se expanda hacia el sólido, lo que explica las condiciones (5.25), (5.26) y el vínculo $\dot{\sigma}(t) \geq 0$. Análogamente esperamos que el líquido se expanda hacia la zona pastosa, es decir $\dot{\rho}(t) \geq 0$.

Luego, se tiene que resolver una sucesión de problemas:

(I) un problema de frontera libre con datos de Cauchy en D_S, que se puede estudiar en manera autónoma, controlando que sea $\theta < 0$,

(II) el problema (5.22), (5.26) para encontrar E arriba de la frontera $x = \sigma(t)$,

(III) un problema de Stefan a una fase con calor latente variable en D_L.

La unicidad de SE sigue del hecho que SE = SD y de la unicidad de SD.

Estudio del problema (I).

Del Corolario al Teorema 4.4 sale que (5.13) y $h''(x) < 0$ (para x en algún intervalo $(0,x_0)$) implican la existencia de una (y sólo una) solución. Ya vimos que (5.13) resulta de (5.11), mientras que $h''(x) < 0$ cerca de $x = 0$ (a la derecha) es una fácil consecuencia de la hipótesis (H) junto con (5.13) y con $h(x) < 0$ para $x > 0$.

Además, examinando el procedimiento de resolución de (I) ilustrado en el §4, C, nos damos cuenta que $k_S\, h''(x) + R > 0$ en $(0,x_0)$ para algún $x_0 > 0$ lleva a la condición $\dot{\sigma}(t) > 0$ en algún intervalo $(0,t_0)$.

Siendo necesariamente $h'(x) < 0$ en un entorno a la derecha de $x = 0$, es fácil aplicar el principio del máximo a θ_x y concluir que $\theta_x < 0$ en la intersección de D_S con un entorno del origen. Luego es cierto que $\theta < 0$ en D_S para algún tiempo finito.

Estudio del problema (II).

Ahora no hay dificultad en calcular $E \in (0,\lambda)$ en una región acotada por las curvas $x = \sigma(t)$, $0 < t < t_0$, donde $E = 0$ y $x = \sigma(t - \lambda/R)$, donde $E = \lambda$.

Estudio del problema (III).

El hecho que $E < \lambda$ cerca del origen permite afirmar que el sistema (5.20), (5.23), (5.24), (5.27), (5.28) tiene una y sólo una solución local en función de los resultados de [FP6]. El principio del máximo garantiza que $\dot{\rho} > 0$ para $t > 0$. Para completar la demostración del Teorema es necesario probar que $\rho(t) < \sigma(t)$ para $t > 0$.

Limitándonos al caso en que β está definido, notemos que si vale la desigualdad (5.14), entonces

$$\lim_{t \to 0^+} \dot{\sigma}(t) = +\infty ,$$

mientras de (5.28) y (5.9),(5.13) sale $\dot{\rho}(0) = \beta$, luego $\sigma(t) > \rho(t)$ localmente. Si en lugar de (5.14) tenemos (5.15), entonces se encuentra $\dot{\sigma}(0) = \dfrac{k_S^2}{R} h'''(0^+)$, luego $\dot{\sigma}(0) > \dot{\rho}(0)$. Si en lugar de (5.15) vale (5.16), se halla $\dot{\sigma}(0) = \dot{\rho}(0)$ y tenemos que comparar los límites de las derivadas segundas de σ y ρ.

Para calcular $\ddot{\rho}$ se toma la derivada de (5.28), observando que

$$E(\rho(t)^+,t) = R\,\{t - \sigma^{-1}[\rho(t)]\} \tag{5.30}$$

y por eso

$$\dot{E}(\rho(t)^+,t) = R\,\{\, 1 - \frac{\dot{\rho}}{\dot{\sigma}}\,\} ,$$

que tiende a cero para $t \to 0^+$. Luego se halla fácilmente

$$\ddot{\rho}(0) = \beta_2. \tag{5.31}$$

En cuanto a $\ddot{\sigma}$, si se suponen válidas (5.18) y (5.19) con $n = 4$ se ve que

$$\lim_{t \to 0^+} \ddot{\sigma}(t) = +\infty$$

y de nuevo $\sigma(t) > \rho(t)$.

Para $n = 5$ se llega a la conclusión $\ddot{\sigma}(0) > 0$ y hay que recordar que estamos examinando el caso $\beta_2 < 0$, es decir $\ddot{\sigma}(0) > 0 > \ddot{\rho}(0)$.

Naturalmente se puede continuar, pero parece suficiente pararse aquí, porque la técnica es ya clara. $\square$

E. Caso (ii) : fases S-S para $t = 0$.

Es claro que en este caso SC nunca puede coincidir con SD ni tampoco es útil para prever el nacimiento de una zona pastosa. En lugar de SC tiene sentido considerar la solución del problema de Cauchy característico

$$u_t - k_S\, u_{xx} = R \quad , \qquad -\infty < x < +\infty \ , \quad t > 0 \ , \tag{5.32}$$

$$u(x,0) = h(x) \quad , \qquad x \neq 0 \ , \tag{5.33}$$

donde $h(x)$ es supuesta negativa, suave y acotada en conjuntos compactos con las usuales condiciones de crecimiento al infinito.

Si hay un intervalo de tiempo $(0,t_0)$ en el cual $u(x,t) \leq 0$ para cada x, entonces $u(x,t)$ representa efectivamente la temperatura, es decir el sistema permanece en la fase sólida.

Es fácil controlar que esto se verifica bajo una de las hipótesis siguientes:

los límites $h(0^-)$, $h(0^+)$ *ambos existen y al menos uno es negativo* (5.34)

o bien

$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$ *y los límites* $h'(0^-)$, $h'(0^+)$ *ambos existen y al menos uno no es cero.* (5.35)

Luego queda el caso

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} h'(x) = 0 \ , \tag{5.36}$$

en que el papel dicriminatorio es tenido por la función

$$f(x) = k_S\, h''(x) + R \ , \tag{5.37}$$

o sea el valor inicial de u_t (para $x \neq 0$). Si

(a) $f(x) = 0 \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

el problema (5.32), (5.33) tiene una solución estacionaria y su interpretación física es clara.

Otros casos de coincidencia de $u(x,t)$ con la temperatura son

(b_1) $f \leq 0$ y $f \not\equiv 0$,

(b_2) si el conjunto $\{x < 0 : f(x) > 0\}$ [o también el conjunto $\{x > 0 : f(x) > 0\}$] no es vacío, hay un intervalo $(-\delta,0)$ [$(0,\delta)$], que lo separa del origen, donde $f \leq 0$ y $f \not\equiv 0$.

Por el contrario se demuestra fácilmente que se encuentra $u(0,t) > 0$ cerca de $t = 0$ si vale una de las condiciones

(c_1) $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$,

(c_2) si el conjunto $\{x<0 : f(x)<0\}$ [$\{x > 0 : f(x) < 0\}$] no es vacío, hay un intervalo$(-\delta,0)$ $[(0,\delta)]$, que lo separa del origen, donde $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$.

Resumamos este resultado en el

TEOREMA 5.3. *Si $h(x)$ satisface (5.36) y (c_1) o (c_2), donde f es definida por (5.37), entonces ni SC, ni la solución $u(x,t)$ de (5.32), (5.33) tienen el sentido de temperatura y una zona pastosa va a nacer.*

El caso

(d) f cambia su signo en $x = 0$

es mucho más delicado.

Supongamos que $f(x)$ es bastante suave para $x = 0$ ($\Rightarrow h''(0) = -\frac{R}{k_S}$)

Si vale

$$R\, h^{(4)}(0) + k_S\, h'''^2(0) < 0 , \tag{5.38}$$

entonces la parte cuadrática de la expansión de Taylor de u en el origen es definida negativa y en un intervalo de tiempo bastante pequeño $u(x,t)$ es la temperatura (se encuentra solamente la fase sólida).

En la situación opuesta tenemos el

TEOREMA 5.4. *Si*

$$R\, h^{(4)}(0) + k_S\, h'''^2(0) > 0 \tag{5.39}$$

valiendo (d) ($\Rightarrow h'''(0) \neq 0$) , una zona pastosa va a nacer en las proximidades del origen.

No examinamos casos intermedios.

F. Caso (ii) : Existencia de la zona pastosa.

Se debe demostrar la existencia de la solución SE en el caso del Teorema 5.3.

El resultado esperado, si $h(x)$ satisface las hipótesis del Teorema 5.3, es que una zona pastosa se produce en el origen y se expande en ambas direcciones.

TEOREMA 5.5. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.3 hay una y sólo una solución (del tipo SE) del sistema*

$$\theta_t - k_S\, \theta_{xx} = R \qquad en\ S = \{(x,t) : x < \sigma_1(t)\ o\ x > \sigma_2(t),\ t \in (0,T)\}, \tag{5.40}$$

$$\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0, \tag{5.41}$$

$$\theta(x,0) = h(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.42}$$

$$\theta(\sigma_i(t),t) = 0\ ,\quad \theta_x(\sigma_i(t),t) = 0\ ,\qquad i = 1,2,\quad t \in (0,T), \tag{5.43}$$

$$E_t = R \qquad en\ M = \{(x,t) : \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t)\ ,\ 0 < t < T\}, \tag{5.44}$$

$$E(\sigma_1(t)^+,t) = E(\sigma_2(t)^-,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{5.45}$$

para algún $T > 0$, *con los vínculos*

$$\dot\sigma_1(t) \le 0\ \ ,\ \ \dot\sigma_2(t) \ge 0\ , \qquad 0 < t < T. \tag{5.46}$$

Demostración

Supongamos por el momento que $f(x)$, es decir $h(x)$, satisface (c_1) con $f > 0$. Entonces, recordando los resultados del Cap. 4, se obtiene la existencia de una única solución del problema (5.40), (5.41), (5.42), (5.43) y además $\dot\sigma_1(t) < 0$, $\dot\sigma_2(t) > 0$, $0 < t < T$. Se puede elegir T de manera que $\theta < 0$ en S.

El cálculo de E(x,t) de (5.44), (5.45) es elemental. □

No hay dificultad para extender el resultado a otros casos previstos por el Teorema 5.3.

OBSERVACION 5.2 Se recuerda que el resultado es local en el tiempo. Puede ser difícil seguir cómo evoluciona la solución porque las fronteras libres pueden retroceder y presentarse varias situaciones.

El caso del Teorema 5.4 parece mucho más complicado y se omite por brevedad.

G. Caso (iii) : fases M-L.

Es claramente necesario completar la información sobre la temperatura inicial, es decir

$$h(x) \equiv 0 \ \text{ para } \ x \le 0\ ,\ \ h(x) \ge 0 \ \text{ para } \ x > 0 \tag{5.47}$$

(y $h \not\equiv 0$ en todo intervalo $(0,\delta)$), dando la distribución inicial de la energía

$$E(x,0) = E_0(x)\ , \qquad x \le 0\ , \tag{5.48}$$

donde E_0 es una función suave con valores en $[0,\lambda]$.

Notemos que si $E_0(x) \equiv \lambda$ el sistema conserva el estado líquido.

Si $E_0(x) = \lambda$ en $[-\delta,0]$ para algún $\delta > 0$, entonces se produce básicamente el caso (v) en proximidad de $x = -\delta$.

Luego lo que interesa estudiar es el caso

$$E_0(x) < \lambda\ , \qquad \forall\ \ x \in (-\infty,0). \tag{5.49}$$

Finalmente, sobre E_0 hacemos una hipótesis del tipo (H), §A.

Aquí no necesitamos buscar un criterio de aparición de la zona pastosa, sino tenemos que encontrar directamente cómo evolucionan las fases M-L.

Finalmente notemos que la solución SC coincide con la solución del problema de Stefan a una fase, simplemente ignorando la condición (5.48). Por eso SC no tiene ningún interés físico, salvo en el caso $E_0 \equiv 0$.

Es natural buscar una solución SE en que la fase líquida se expande. Por lo tanto queremos resolver el siguiente problema

$$\theta_t - k_L\, \theta_{xx} = R \qquad \text{en } L = \{(x,t) : x > \sigma(t)\ ,\ t \in (0,T)\}, \tag{5.50}$$

$$\sigma(0) = 0\ , \tag{5.51}$$

$$\theta(x,0) = h(x)\ , \qquad x > 0, \tag{5.52}$$

$$E_t = R \qquad x < \sigma(t) \qquad , 0 < t < T, \tag{5.53}$$

$$E(x,0) = E_0(x)\ , \qquad x < 0 \tag{5.54}$$

$$\theta(\sigma(t),t) = 0\ , \qquad 0 < t < T\ , \tag{5.55}$$

$$[\lambda - E_0(\sigma(t)) - Rt]\, \dot\sigma(t) = -k_L\, \theta_x(\sigma(t)^+,t)\ , \qquad t \in (0,T), \tag{5.56}$$

con los vínculos

$$E \in [0,\lambda]\ , \quad \dot\sigma(t) \le 0\ . \tag{5.57}$$

TEOREMA 5.7. *Si $E_0(x)$ satisface* (5.49), *el problema* (5.50)-(5.57) *tiene una única solución* (*SE*) *para algún* $T > 0$.

Demostración.

Si el coeficiente de $\dot\sigma(t)$ en (5.56) es mayor de una constante positiva, el Teorema es cierto en virtud de los resultados de [FP1], que aseguran existencia y unicidad para el problema (5.50), (5.51), (5.52), (5.55), (5.56) cuando el "calor latente" no degenera. Esta circunstancia se verifica si $E_0(0) < \lambda$.

Luego el caso delicado es

$$E_0(0) = \lambda\ ,\ E_0(x) < \lambda \ \text{ para } \ x < 0. \tag{5.58}$$

Según la hipótesis hecha sobre $E_0(x)$ (ni E_0 ni sus derivadas tienen infinitos ceros en intervalos finitos) se puede decir que

$$E_0'(x) > 0 \tag{5.59}$$

en algún intervalo $(x_0,0)$.

La demostración es muy larga y la dividiremos en varios puntos.

(I) *La curva $E = \lambda$.*

Sea $x = \gamma(t)$ la curva de nivel $E(x,t) = \lambda$ y sea t acotado en modo tal que $\gamma(t) \in (x_0,0)$.

Derivando la igualdad $E_0(\gamma(t)) + Rt = \lambda$ y utilizando (5.59) se deduce que hay un tiempo T^* tal que

$$-\infty < \dot\gamma(t) < 0\ ,\ \text{ para cada } \ t \in (0,T^*). \tag{5.60}$$

(II) *Las soluciones aproximadas* (σ_n, θ_n).

Ahora queremos construir una sucesión de soluciones aproximadas.

Sea $\{\epsilon_n\}$ una sucesión que decrece a cero y tal que $\{-\epsilon_n\} \subset (x_0,0)$.

El problema de frontera libre obtenido de (5.50), (5.51), (5.52), (5.55), (5.56) reemplazando (5.51), (5.52) con

$$\sigma_n(0) = -\,\epsilon_n\ , \tag{5.61}$$

$$\theta_n(x,0) = \begin{cases} h(x)\ , & x > 0\ , \\ 0\ \ , & -\epsilon_n < x \le 0\ , \end{cases} \tag{5.62}$$

por efecto de (5.58), se halla en las condiciones ya recordadas para la existencia de una solución (σ_n, θ_n). Más aún, esta solución existe hasta que la frontera $x = \sigma_n(t)$ está separada de la curva $x = \gamma(t)$ por una distancia positiva. Se nota también que $\dot\sigma_n(t) < 0$.

Si se prueba que las dos curvas no pueden encontrarse, entonces se puede afirmar que las soluciones aproximadas tienen un intervalo común de existencia $(0,T)$.

Supóngase que para algún t_n' sea

$$\lim_{t \to t_n'^-} \sigma_n(t) = \gamma(t_n').$$

Entonces se tiene $0 \geq \limsup_{t \to t_n'^-} \dot\sigma(t) \geq \liminf_{t \to t_n'^-} \dot\sigma(t) \geq \dot\gamma(t_n') > -\infty$ y por (5.56)

$\lim_{t \to t_n'} \theta_{nx}(\sigma_n(t)^+,t) = 0$, en contraste con el hecho que $\theta_n = 0$ es un máximo

para θ_n en $L_n = \{(x,t) : x > \sigma_n(t)\ ,\ 0 < t < t_n'\}$.

Además con una técnica estandard se demuestra que las diferentes fronteras $x = \sigma_n(t)$ no pueden encontrarse.

Luego se concluye que

(α) las soluciones (σ_n, θ_n) existen en un intervalo común $(0,T) \subset (0,T^*)$,

(β) la sucesión $\{\sigma_n\}$ es creciente.

Así se llega a la existencia del límite

$$\sigma(t) = \sup \sigma_n(t) \leq \gamma(t)\ , \quad t \in (0,T). \tag{5.63}$$

(III) Estudio del límite $\sigma(t)$.

Se excluye fácilmente que pueda ser $\sigma(t) \equiv \gamma(t)$ en algún intervalo de tiempo (utilícese el principio del máximo y (5.56) para obtener una contradicción).

Sea $\hat t \in (0,T)$ tal que $\sigma(\hat t) < \gamma(\hat t)$. Queremos demostrar que no hay $\bar t > \hat t$ tal que $\sigma(\bar t) = \gamma(\bar t)$.

Supongamos que $\bar t$ existe y para cada $\mu \in (0,\lambda)$ sea $x = \gamma_\mu(t)$ la curva de nivel $E(x,t) = \mu$. Entonces, si $\mu > E(\sigma(\hat t), \hat t)$, para cada n bastante grande se puede hallar $\tilde t \in (\hat t, \bar t)$ tal que

$$\sigma_n(\tilde t) = \gamma_\mu(\tilde t) \qquad \text{y} \qquad \sigma_n(t) < \gamma_\mu(t)\ , \quad \forall\ t \in (\hat t, \tilde t). \tag{5.64}$$

El dominio $D_\mu \equiv \{(x,t) :\ \gamma_\mu(t) < x < \gamma_\mu(\hat t)\ ,\ \hat t < t < \tilde t\}$ está contenido en $D_n{}^L$ y tiene sentido comparar en D_μ la función $\theta_n(x,t)$ con la solución del problema

$$v_t - k_L v_{xx} = R \qquad \text{en } D_\mu\ ,$$
$$v(\gamma_\mu(t),t) = v(\gamma_\mu(\hat t),t) = 0.$$

Por el principio del máximo $\theta_n > v$ en D_μ y, siendo $\theta_n = v$ en el punto $(\gamma_\mu(\tilde t),\tilde t)$, se tiene

$$\theta_{nx}(\sigma_n(\tilde t),\tilde t) > v_x(\gamma_\mu(\tilde t),\tilde t) \equiv C > 0\ , \tag{5.65}$$

donde la constante C no depende en manera crítica de μ.

Entonces, de (5.56) sale la desigualdad

$$\dot\sigma_n(\tilde t) < -k_L \frac{C}{\lambda-\mu}\ . \tag{5.66}$$

Al mismo tiempo $\sigma_n(\bar{t}) \geq \gamma_\mu(\bar{t})$ y se tiene una contradicción tomando μ bastante próximo a λ.

Luego para cada $t \in (0,T)$ la función límite $\sigma(t)$ es menor que $\gamma(t)$. En función de este resultado se puede afirmar (p. e. con las técnicas de [FP1]) que las derivadas $\dot{\sigma}_n(t)$ son acotadas uniformemente en todo subintervalo compacto de $(0,T)$, lo que implica que $\sigma(t)$ es Lipschitz continua en $(0,T)$. Además, de la monotonía de la sucesión $\{\sigma_n\}$ y de $\lim \sigma_n(0) = 0$ sale la uniforme convergencia de $\{\sigma_n\}$ a σ en $[0,T]$.

(IV) Conclusión.

Si $\theta(x,t)$ es la solución de (5.50), (5.52), (5.55) correspondiente a la frontera límite $x = \sigma(t)$, la sucesión $\{\theta_n\}$ converge uniformemente a θ. También $\left\{\frac{\partial\theta_n}{\partial x}\right\}$ converge uniformemente a $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ en compactos que no tocan $x = \sigma(t)$.

Para concluir la demostración del Teorema queda probar que el par (σ,θ) satisface (5.56).

Con un método estandard basado en la integración de (5.50), se obtiene que cada par (σ_n,θ_n) satisface la ecuación

$$\lambda[\sigma_n(t)-\sigma_n(0)] + Rt\sigma_n(t) - R\int_0^t \sigma_n(\tau)\,d\tau - \int_{\sigma_n(0)}^{\sigma_n(t)} E_0(x)\,dx + \int_0^b h(x)\,dx +$$
$$+ \int_0^t \theta_{nx}(b,\tau)\,d\tau - \int_{\sigma_n(t)}^b \theta_n(x,t)\,dx + R\int_0^t \int_{\sigma_n(0)}^{\sigma_n(\tau)} dx\,d\tau = 0\,, \tag{5.67}$$

donde b es una constante cualquiera positiva.

Por la uniforme convergencia el límite (σ,θ) satisface la ecuación análoga

$$(\lambda + Rt)\,\sigma(t) - R\int_0^t \sigma(\tau)\,d\tau - \int_0^{\sigma(t)} E_0(x)\,dx + \int_0^b h(x)\,dx +$$
$$+ \int_0^t \theta_x(b,\tau)\,d\tau - \int_{\sigma(t)}^b \theta(x,t)\,dx + R\int_0^t \int_0^{\sigma(\tau)} dx\,d\tau = 0\,. \tag{5.68}$$

Siendo $\sigma(t)$ Lipschitz continua en $(0,T)$, se sabe probar con técnicas clásicas que la derivada $\theta_x(\sigma(t)^+,t)$ existe y es continua en $(0,T)$ y que (5.68) es equivalente a (5.56).

El Teorema es así demostrado. □

H. Caso (iv) : fases M-S.

Como en el caso anterior se prescribe la energía $E_0(x)$ para $t = 0$, $x < 0$ y sobre $E_0(x)$ se hacen las mismas hipótesis de suavidad. Por simplicidad, suponemos h(x) continua en $x = 0$ y, si es necesario, más suave.

Conviene distinguir los casos siguientes:

(iv-a) $E_0(x) \equiv \lambda$,

(iv-b) $0 < E_0(0) < \lambda$,

(iv-c) $E_0(0) = 0$,

(iv-d) $E_0(0) = \lambda$ (y $E_0(x) \not\equiv \lambda$).

Caso (iv-a).

Básicamente se pueden usar las técnicas de §B y §C para el caso (i) y llegar a los mismos resultados.

Caso (iv-b).

TEOREMA 5.8. *Para algún intervalo de tiempo $(0,T)$ existe una única solución SE (σ,E,θ), donde $x = \sigma(t)$ es la curva que separa M y S. Además, si*

$$h'(0^+) < 0 \tag{5.69}$$

o si

$$h'(0^+) = 0 \quad , \quad k_S\, h''(0^+) + R < 0 \tag{5.70}$$

(σ,E,θ) satisface el sistema (5.50) (con las sustituciones $k_L \to k_S$, $L \to S$), (5.51)-(5.55) y la condición de frontera libre

$$[\ E_0(\sigma(t)) + Rt\ ]\ \dot\sigma(t) = k_S\ \theta_x(\sigma(t)^+,t) \quad , \quad 0 < t < T , \tag{5.71}$$

con los vínculos

$$\dot\sigma(t) \le 0 \ , \qquad E_0(\sigma(t)) + Rt \le \lambda \ , \ \ 0 < t < T.$$

En cambio, si

$$h'(0^+) = 0 \quad , \quad k_S\ h''(x) + R > 0 \ , \ \ \forall\ x \in (0,x_0) \ , \tag{5.72}$$

para algún $x_0 > 0$, en lugar de (5.71) la condición de frontera libre es

$$\theta_x(\sigma(t)^+,t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \tag{5.73}$$

y los vínculos son

$$\dot\sigma(t) \ge 0 \ , \qquad E(x,t) = E_0(x) + Rt \le \lambda \ , \ \ 0 < t < T.$$

Demostración.

(I). *Hipótesis* (5.69). El coeficiente de $\dot\sigma$ en (5.71) es positivo y existencia y unicidad de (σ,E,θ) siguen de [FP1]. Para que (σ,E,θ) sea SE se necesita $\theta < 0$ para $x > \sigma(t)$ y $0 < t < T$.

La hipótesis (5.69) comporta $\dot\sigma(0) = k_S\ h'(0^+)\ /\ E_0(0) < 0$, luego $\dot\sigma(t) < 0$ en algún intervalo $(0,T)$, o sea $\theta_x(\sigma(t)^+,t) < 0$ en $(0,T)$.

Como ya se notó, en esta situación no se puede bifurcar de $x = \sigma(t)$ una segunda línea de nivel $\theta = 0$ (lo que estaría en contraste con el principio del máximo). Por lo tanto $\theta < 0$ en D^S.

(II). *Hipótesis* (5.70). La diferencia respecto al caso anterior es que $\dot\sigma(0) = 0$. Comparando los límites de θ_t al origen para $t = 0$ (negativo) y para $x = \sigma(t)$ (cero) se puede probar que

$$\lim_{t \to 0^+} \theta_{xt}(\sigma(t)^+,t) = -\infty$$

y, de (5.71), que

$$\lim_{t \to 0^+} \dot\sigma(t) = -\infty .$$

Por eso, $\dot\sigma(t) < 0$ en algún intervalo $(0,T)$ y de nuevo $\theta < 0$ en S (como siempre el resultado es local en el tiempo).

(III). *Hipótesis* (5.72). Lo que se quiere demostrar se obtiene por los mismos argumentos que se utilizaron en la prueba del Teor. 5.2 (Problema I). Aquí es interesante notar que $E(x,t)$ es discontinua en $x = 0$ (en este sentido la solución es generalizada respecto a la definición dada a su tiempo). Además, si $k_L h''(0^+)+R > 0$, se tiene $\lim_{t \to 0^+} \dot\sigma(t) = +\infty$. □

Los casos (iv-c) y (iv-d) son extremamente complejos porque presentan varias posibilidades y en general los correspondientes teoremas de existencia no están demostrados. Por eso no haremos un tratamiento detallado, sino que indicaremos cómo se resuelven los casos más claros. De todos modos recordamos que para cada caso clasificado hay un ejemplo numérico en [PU].

Caso (iv-c).

Si vale (5.72) se encuentra el mismo resultado que antes, es decir la zona pastosa se adelanta hacia el sólido. Otros casos del Teorema 5.8, es decir (5.69) o (5.70) presentan la dificultad de la degeneración de la condición de frontera libre (5.71), porque el coeficiente de $\dot\sigma$ es nulo para $t = 0$. Entonces sería necesario plantear un método de aproximación, utilizando problemas no degenerados, y hallar acotaciones uniformes. El caso no está tratado en la literatura.

Caso (iv-d).

Consideramos solamente el caso

$$E_0'(0^-) > 0. \tag{5.74}$$

Se puede demostrar que si

$$h'(0^+) < -\lambda R \,/\, [\, k_S\, E_0'(0^-)\,] , \tag{5.75}$$

entonces de nuevo el sistema (5.51)-(5.55), (5.71) tiene una única solución SE. El punto delicado está en la comparación de $\dot\sigma(0)$ con la pendiente de la curva (teórica) $E(x,t) = \lambda$. Se quiere tener

$$\dot\sigma(0) < \dot\gamma(0) \tag{5.76}$$

(siendo, como antes, $x = \gamma(t)$ la curva $E_0(\gamma(t)) + Rt = \lambda$) . La condición (5.76) coincide justamente con (5.75). Para el caso opuesto, proponemos la siguiente

CONJETURA 5.1. *Si se tiene la condición*

$$h'(0^+) > -\lambda R \,/\, [\, k_S \, E_0'(0^-) \,] \tag{5.77}$$

entonces entre la zona pastosa y el sólido va a crecer una fase líquida, es decir hay dos fronteras libres $x = \rho(t)$ (M-L) , $x = s(t)$ (L-S) *y las condiciones de frontera libre son*

(α) *para* $x = s(t)$ *la condición usual de Stefan,*

(β) *para* $x = \rho(t)$

$$[\, \lambda - E_0(\rho(t)) - Rt \,]\, \dot{\rho}(t) = -k_L \, \theta_x(\rho(t)^+,t). \tag{5.78}$$

OBSERVACION 5.3. Aquí se da no solamente la dificultad de la degeneración de la condición (5.78), sino también el hecho que las dos condiciones de frontera libre son acopladas por la temperatura en la fase líquida. El estudio de este problema es abierto.

L. Caso (v) : fases M-M.

Los casos no banales son los siguientes:

(v-a) $\quad 0 \le E_0(x) < \lambda$ para $x < 0$ y $E_0(x) = \lambda$ para $x \ge 0$,

(v-b) $\quad 0 \le E_0(x) < \lambda$ para $x \ne 0$ y $E_0(0) = \lambda$,

donde, por simplicidad $E_0(x)$ es supuesta suave.

Caso (v-a). Coincide con el caso (iii) (§G) con $h = 0$ y sigue valiendo el Teorema 5.7.

Caso (v-b). Se espera observar una fase líquida que se expande en ambas direcciones. Vale decir que se quiere resolver el problema de buscar (ρ_1,ρ_2,E,θ) resolviendo el sistema

$$\theta_t - k_L \, \theta_{xx} = R \quad \text{en } D^L = \{(x,t) : \rho_1(t) < x < \rho_2(t) \,,\, 0 < t < T\}, \tag{5.79}$$

$$\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0 \,, \tag{5.80}$$

$$E_t = R \qquad \text{en } D^M = \{(x,t) : x < \rho_1(t) \text{ o } x > \rho_2(t) \,,\, 0 < t < T\}, \tag{5.81}$$

$$E(x,0) = E_0(x) \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \tag{5.82}$$

$$[\, \lambda - E_0(\rho_1(t)) - Rt \,]\, \dot{\rho}_1(t) = -k_L \, \theta_x(\rho_1(t)^+,t) \,, \qquad 0 < t < T \,, \tag{5.83}$$

$$[\, \lambda - E_0(\rho_2(t)) - Rt \,]\, \dot{\rho}_2(t) = -k_L \, \theta_x(\rho_2(t)^-,t) \,, \qquad 0 < t < T \,, \tag{5.84}$$

con los vínculos

$$\dot{\rho}_1(t) \le 0 \,, \quad \dot{\rho}_2(t) \ge 0 \,, \quad 0 \le E(x,t) \le \lambda. \tag{5.85}$$

Otra vez se pueden utilizar las técnicas del Teorema 5.7 (con la complicación que los problemas aproximados tienen dos fronteras libres) para demostrar el resultado análogo.

PARTE II. ZONAS PASTOSAS NO ISOTERMICAS.

6. FORMULACION DEBIL.

Queremos mostrar cómo el problema del cambio de fase se complica (especialmente en relación con la aparición y la evolución de zonas pastosas) cuando la temperatura del cambio de fase no es constante, sino que depende de las coordenadas espaciales:

$$\theta_c = \theta_c(x). \tag{6.1}$$

siendo $\theta_c(x)$ alguna función suave.

OBSERVACION 6.1. Esta situación física puede encontrarse si en el medio considerado hay algunas deshomogeneidades (de presión, de composición química, etc.). Como caso límite se puede pensar en una aleación binaria en que

(i) no se tenga en cuenta la separación de las curvas de equilibrio termodinámico "líquidus" y "sólidus",

(ii) la difusión de la impureza es mucho más lenta que la difusión del calor. Entonces cada distribución no uniforme de impureza en la aleación produce una temperatura de cambio de fase no homogénea y conocida.

OBSERVACION 6.2. Cuando $\nabla\theta_c \neq 0$, la nueva propiedad de una eventual zona pastosa está en el hecho que el calor es conducido a través de ella. Como se verá, esta propiedad modifica notablemente la estructura matemática del problema.

Antes que nada veamos cómo se define en este caso la solución débil.

Volviendo a la ecuación (2.3), supónganse los coeficientes c, k, r funciones de una sola variable $\eta = \theta - \theta_c(x)$. La definición (2.10) de E se escribe ahora

$$E = \int_0^{\eta} c(\varsigma)\, d\varsigma + \lambda\, H(\eta) \tag{6.2}$$

y conviene escribir (2.12) y (2.13) en la forma

$$\eta = \beta(E)\,, \tag{6.3}$$

$$\tilde{\beta}(\eta) = \int_0^{\eta} k(\varsigma)\, d\varsigma. \tag{6.4}$$

Utilizando la función B(E) definida por (2.14), la ecuación diferencial para E llega a ser (en el sentido distribucional)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \Delta B(E) + \nabla \cdot [\, K(E)\ \ \nabla\theta_c(x)\,] + R(E)\,, \tag{6.5}$$

donde no solamente aparece la extensión $R(E)$ de $r(\eta)$ para $E \in (0,\lambda)$, sino también la extensión $K(E)$ de $k(\eta)$, en el espíritu de la Observación 6.2. La zona pastosa se identifica con el interior del conjunto $\{\eta = 0\}$ (cuando no es vacío).

En lugar de (2.16) la ecuación débil tiene ahora la forma

$$\int_0^T \int_\Omega [\, E\,\varphi_t + B(E)\,\Delta\varphi - K(E)\,\nabla\theta_c \cdot \nabla\varphi + R(E)\varphi\,]\,dx\,dt =$$

$$= \int_{\partial\Omega \times (0,T)} B_0(x,t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma\,dt - \int_\Omega E_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx \tag{6.6}$$

para cada función φ en la clase en su tiempo descripta y con el mismo significado de E_0 y B_0, pero con la hipótesis (provisional)

<u>la medida del subconjunto de</u> $\partial\Omega \times (0,T)$ <u>en que</u> $\theta = \theta_c$ <u>es cero</u>. (6.7)

El papel de la hipótesis (6.7) será claro más adelante. Su origen está en el hecho que la influencia de $\nabla\theta_c \neq 0$ no se limita a la aparición de un término en la ecuación (6.6), sino que gobierna la evolución de la energía en las zonas pastosas, produciendo efectos importantes en el borde.

Volveremos pronto a ilustrar este concepto y veremos qué cambia en (6.6) si no se hace la hipótesis (6.7).

OBSERVACION 6.3. De ahora en adelante las funciones $K(E)$ y $R(E)$ serán definidas para $E \in [0,\lambda]$ como interpolaciones lineales entre sus valores extremos. Así

$$K(E) = k_S + \alpha E \;, \quad 0 < E < \lambda \;, \quad \alpha = (k_L - k_S)\,/\,\lambda. \tag{6.8}$$

$$R(E) = r(0^-) + \alpha_1 E \;, \; 0 < E < \lambda \;, \quad \alpha_1 = (r(0^+) - r(0^-))\,/\,\lambda. \tag{6.9}$$

7. LA ECUACION PARA LA ENERGIA Y LAS CONDICIONES EN EL BORDE FIJO.

Refiriéndose directamente al caso unidimensional, la ecuación de evolución de E en M tiene la forma

$$E_t - [\,K(E)\,\theta_c'(x)\,]_x = R(E)\,, \tag{7.1}$$

que naturalmente se reduce a (3.2) cuando θ_c = constante.

Utilizando (6.8), (6.9) se llega a la ecuación lineal de primer orden

$$E_t - \alpha\,\theta_c'(x)\,E_x = (k_S + \alpha E)\,\theta_c''(x) + R(0) + \alpha_1 E. \tag{7.2}$$

La pendiente de las curvas características define una velocidad local de propagación

$$v_0(x) = -\alpha\;\theta_c'(x)\,, \tag{7.3}$$

debida a la acción conjunta de la distribución no uniforme de θ_c y de $K(E)$.

La curvatura del perfil de θ_c, es decir θ_c'', actúa sobre el sistema como una fuente de calor, lo que se explica fácilmente en términos de balance de energía.

Mirando la ecuación (7.2) se comprende que es preciso tener cuidado con los datos en el borde cuando $\theta = \theta_c$ en algún intervalo de tiempo. Sea $\Omega = (0,1)$ y sea por ejemplo $\theta(0,t) = \theta_c(0)$ para t en algún intervalo no vacío (t',t'').

Distingamos dos casos:

(I) $v_0(0) \leq 0$,

(II) $v_0(0) > 0$.

En el primer caso las líneas características de (7.2) alcanzan el conjunto $\{0\} \times (t',t'')$, subiendo en la dirección temporal. Por consecuencia el valor de $E(0,t)$ para cada t en (t',t'') proviene de la integración de (7.2) a lo largo de la línea característica correspondiente (a partir de alguna condición inicial). Caso particular: si $v_0(0) = 0$ el mismo borde $x = 0$ es una característica y (7.2) se integra inmediatamente.

En cambio, si $v_0(0) > 0$ las curvas características de (7.2) salen de los puntos de $\{0\} \times (t',t'')$ y van subiendo en la dirección temporal. Entonces $E(0,t)$ en (t',t'') debe ser un dato del problema y funciona como valor inicial para la integración de (7.2).

Ahora podemos precisar la definición de solución débil cuando la condición (6.7) no es satisfecha:

si $v_0(0) \leq 0$, el dato $\theta(0,t) = \theta_c(0)$ es suficiente,

si $v_0(0) > 0$, además de $\theta(0,t) = \theta_c(0)$ es necesario conocer $E(0,t) \subset [0,\lambda]$.

En el segundo caso para hacer aparecer el dato adicional $E(0,t)$ en la formulación débil (6.6) se modifica el espacio de las funciones test ϕ, dejando la condición $\phi(0,t) = 0$ en (t',t''). Entonces al primer miembro de (6.6) se agrega el término

$$\int_{t'}^{t''} K[E(0,t)]\, \theta_c'(0)\, \phi(0,t)\, dt.$$

OBSERVACION 7.1. (datos de Neumann). Cuando $v_0(0) > 0$ el dato de Neumann apropiado es $E_x(0,t) = f(t)$ (y no $\theta_x(0,t)$). Si en algún intervalo (t',t'') ocurre la igualdad $\theta(0,t) = \theta_c(0)$, en este intervalo $E(0,t)$ se encuentra integrando la ecuación ordinaria

$$E_t - K(E)\, \theta_c''(0) - R(E) + v_0(0)\, f(t) = 0$$

Después $\theta_x(0,t) = \theta_c'(0)$ en (t',t'') , mientras $\theta_x(0,t) = \theta_c'(0) + \beta'[E(0,t)]\, f(t)$, donde $\theta(0,t) \neq \theta_c(0)$.

Cuando $v_0(0) \leq 0$ es suficiente asignar $\theta_x(0,t)$. Si M tiene una parte de frontera común a $\{0\} \times (0,T)$, ésa es necesariamente incluida en el conjunto donde $\theta_x(0,t) = \theta_c'(0)$ y además es siempre posible calcular $E(0,t)$.

A diferencia del caso del dato de Dirichlet, cuando se especifica el dato de

Neumann el espacio de las funciones test no depende ni de la posible coincidencia de $\theta(0,t)$ con $\theta_c(0)$ ni del signo de $v_0(0)$.

Las condiciones de frontera para la función test ϕ son siempre $\varphi(x,T) = 0$, $\phi_x(0,t) = 0$ (y $\phi_x(1,t) = 0$ si se tiene el dato de Neumann también para $x = 1$). Por ejemplo el término de frontera en la ecuación débil que contiene el dato de Neumann en $x = 0$ es

$$\int_0^T K[E(0,t)]\, \theta_x(0,t)\, \varphi(0,t)\, dt.$$

8. FORMULACION CLASICA PARA LA ENERGIA : CONDICIONES DE FRONTERA LIBRE.

Queremos extender los resultados del §3,B al caso de temperatura de cambio de fase variable.

En general, las condiciones de frontera libre son (con los símbolos del §3,B)

$$E^M [\, \dot s - v_0(s)\,] - k_S [\, \theta_x^S - \theta_c'(s)\,] = 0 \qquad (\text{S-M}), \tag{8.1}$$

$$(\lambda - E^M) [\, \dot s - v_0(s)\,] + k_L [\, \theta_x^L - \theta_c'(s)\,] = 0 \quad (\text{L-M}), \tag{8.2}$$

donde fueron usadas (6.8) y (7.3).

Un primer resultado simple se obtiene cuando θ_c' es constante, utilizando las mismas técnicas de §3,B y teniendo en cuenta que tenemos (8.1) y (8.2) en lugar de (3.9) y (3.15) y que la ecuación de difusión en las fases L, S es

$$\eta_t - k\, \eta_{xx} = r(\eta) + k\, \theta_c' \tag{8.3}$$

con $\eta = \theta - \theta_c$ y $k = k_L$ o $k = k_S$, constantes.

TEOREMA 8.1. *Si θ_c' = constante siguen valiendo los resultados del Teorema 3.1 y del Teorema 3.2 con las siguientes sustituciones:*

- *en la hipótesis* (*) $\qquad R(0) \to R(0) + k_S\, \theta_c'$
- *en la hipótesis* (**) $\qquad R(\lambda) \to R(\lambda) + k_L\, \theta_c'$
- *en las desigualdades* (*a*), (*a'*), (*b*) $\dot s \to \dot s - v_0(s)$.

Si θ_c' no es constante en $[0,1]$, examinemos brevemente el caso de una interfase S-M.

De (8.1), es decir

$$E^M [\, \dot s - v_0(s)\,] = k_S\, \eta_x^S, \tag{8.4}$$

siempre se tiene la implicación

$$\dot{s} - v_0(s) \leq 0 \Rightarrow \eta^S_x = 0. \tag{8.5}$$

Para obtener otros resultados es necesario definir los conjuntos

$$A^+ = \{ (x,t) \in (0,1) \times (0,T) : R(0) + k_S\, \theta''_S > 0 \},$$
$$A^- = \{ (x,t) \in (0,1) \times (0,T) : R(0) + k_S\, \theta''_S < 0 \},$$
$$A_0 = \{ (x,t) \in (0,1) \times (0,T) : R(0) + k_S\, \theta''_S = 0 \}.$$

Es fácil probar que

$$\eta^S_x = 0 \Rightarrow \dot{s} - v_0(s) \leq 0 \quad \text{para} \quad (s(t),t)) \in A^+ \tag{8.6}$$

y que

$$\eta^S_x > 0 \quad \text{para} \quad (s(t),t)) \in A^- \tag{8.7}$$

Cuando $x = s(t)$ atraviesa $\overset{\circ}{A}_0$ (supuesto no vacío) estamos en el caso del Teorema 8.1, es decir la condición (8.4) es del tipo de Stefan: $\eta^S_x > 0$, $\dot{s} > v_0$.

Resumiendo, tenemos el

TEOREMA 8.2. *Si $x = s(t)$ separa S ($x < s(t)$) y M ($x > s(t)$) , las siguientes implicaciones son ciertas (se excluyen los puntos de ∂A_0):*

$$\dot{s} - v_0(s) > 0 \Rightarrow \eta^S_x > 0 ,\ E^M > 0 \ \textit{(problema del tipo de Stefan)} , \tag{8.8}$$

$$\dot{s} - v_0(s) \leq 0 \Rightarrow \eta^S_x = 0 \ \textit{(problema con datos de Cauchy) y } (s(t),t) \in A^+. \tag{8.9}$$

Además

$$\dot{s} - v_0(s) < 0 \Rightarrow E^M = 0 . \tag{8.9'}$$

<u>Demostración.</u> Solamente (8.8) necesita algún comentario. La implicación es clara si $(s(t),t) \in A^- \cup \overset{\circ}{A}_0$. Si $(s(t),t) \in A^+$, entonces de (8.4)

$$\dot{s} - v_0(s) > 0 \ \text{ y } \ \eta^S_x = 0 \Rightarrow E^M = 0 .$$

Por lo tanto se puede integrar (7.2) hacia atrás respecto al tiempo, a partir de $x = s(t)$, y visto que el segundo miembro de (7.2) es positivo cerca de $x = s(t)$, se encuentra $E(x,t) < 0$ en M. Luego es absurdo suponer que $\eta^S_x = 0$. □

Para la interfase L-M vale un teorema análogo, definiendo

$$B^+ = \{ (x,t) \in (0,1) \times (0,T) : R(\lambda) + k_L\, \theta''_L > 0 \},$$
$$B^- = \{ (x,t) \in (0,1) \times (0,T) : R(\lambda) + k_L\, \theta''_L < 0 \},$$
$$B_0 = \{ (x,t) \in (0,1) \times (0,T) : R(\lambda) + k_L\, \theta''_L = 0 \}.$$

TEOREMA 8.3. *Si $x = s(t)$ separa L ($x < s(t)$) y M ($x > s(t)$) , las siguientes implicaciones son ciertas (se excluyen los puntos de ∂B_0) :*

$$\dot{s} - v_0(s) > 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^L_x < 0 \ , \quad E^M < \lambda \quad (\textit{problema del tipo de Stefan}) \ , \tag{8.10}$$

$$\dot{s} - v_0(s) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^L_x = 0 \quad (\textit{problema con datos de Cauchy}) \ y \ (s(t),t) \in B^-. \tag{8.11}$$

Además

$$\dot{s} - v_0(s) < 0 \quad \Rightarrow \quad E^M = \lambda \ . \tag{8.11'}$$

OBSERVACION 8.1. Los resultados obtenidos se pueden definir en manera independiente de la posición relativa de S y M o de L y M, introduciendo la velocidad $w = \dot{s} - v_0(s)$, es decir la velocidad del frente interfase relativa a la velocidad local de propagación de la energía. Entonces se nota que:

(i) si w está dirigida en el sentido de la zona pastosa (expansión relativa de la fase pura) la condición de frontera libre es del tipo de Stefan;

(ii) en el caso opuesto (no contracción relativa de la zona pastosa) la condición de frontera libre es del tipo de Cauchy.

9. RESOLUCION DE UN PROBLEMA PARTICULAR.

Queremos estudiar un problema particular con temperatura de cambio de fase dependiente de x. Entre otras cosas, opinamos interesante mostrar mediante este ejemplo que cuando $\nabla\theta_c \neq 0$ una zona pastosa puede formarse espontáneamente, sin la contribución de fuentes de calor.

A. Planteo del problema (Problema P).

Se buscan las incógnitas $x = \sigma(t)$ (frontera M-S), $x = \rho(t)$ (frontera L-M), $E(x,t)$ (energía) en el estrato $0 < x < 1$, suponiendo

$$\theta_c = -1 + x^2 \ , \tag{9.1}$$

$$R(E) = 0 \ , \tag{9.2}$$

k_L, k_S constantes y $K(E)$ definida por (6.8),

$$\theta(x,0) = -1 + \frac{x^2}{2} \ , \qquad 0 < x < 1 \ , \tag{9.3}$$

$$\theta_x(0,t) = 0 \ , \tag{9.4}$$

$$\theta(1,t) = -\tfrac{1}{2} \ . \tag{9.5}$$

OBSERVACION 9.1. La elección de $\theta_c(x)$, de la temperatura inicial y de los datos en el borde es tal que

(i) para $t = 0$ el sistema se halla en el estado sólido,

(ii) para $x = 1$ el sistema queda en el estado sólido,

(iii) el calor es conducido hacia la pared $x = 0$, donde la temperatura inicial es la del cambio de fase,

(iv) el aumento de energía en $x = 0$ no puede producir inmediatamente un aumento de temperatura, pero antes que posiblemente nazca una fase líquida se espera la aparición de una zona pastosa.

Naturalmente mucho de lo que vamos a demostrar acerca del problema (P) será válido para todas aquellas situaciones que conservan los mismos caracteres básicos ($\theta''_c > 0$, $\theta'_c(0) = \theta_x(0,0) = 0$, $\theta(0,0) = \theta_c(0)$, $\theta(x,0) < \theta_c(x)$, $\theta(1,t) < \theta_c(1)$, etc.)

B. Análisis a priori de la región sólida.

Supóngase que el Problema P tenga una solución en algún intervalo de tiempo $(0,T_0)$. Estudiemos la estructura de la región S, teniendo presente la Obs. 9.1. Acerca del punto (iv) tenemos el

LEMA 9.1. *Hay una función* $\sigma(t) \geq 0$ *tal que*

$$S = \{ (x,t) : \sigma(t) < x < 1 \ , \ 0 < t < T_0 \} \tag{9.6}$$

y que $\sigma(t) \not\equiv 0$ *en cualquier entorno de* $t = 0$.

Demostración.

Es muy fácil controlar que no hay ningún intervalo $(0,t_1)$ tal que $\theta(x,t) < \theta_c(x)$ en el rectángulo $(0,1) \times (0,t_1)$.

Por eso, procediendo de $x = 1$ hacia $x = 0$ se encuentra una curva $x = \sigma(t)$ con las siguientes propiedades:

$$\sigma(0) = 0 \ , \quad \sigma(t) < 1 \quad \text{y} \quad \sigma(t) \not\equiv 0 \text{ en todo entorno de } t = 0 \ ,$$

$$\theta(x,t) < \theta_c(x) \ , \qquad \sigma(t) < x < 1 \ , \quad 0 < t < T_0 \ ,$$

$$\theta(\sigma(t),t) = \theta_c(\sigma(t)) \ , \qquad 0 < t < T_0 .$$

Entonces, la prueba del Lema se reduce a demostrar que no hay otra componente de S.

En S y en L el resto $\eta = \theta - \theta_c$ satisface la ecuación

$$\eta_t - k\,\eta_{xx} = k\,\theta''_c > 0 \ . \tag{9.7}$$

(donde k representa k_S o k_L).

Supóngase que sea $\eta < 0$ en alguna región S_1 definida por

$$0 \leq \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t) < \sigma(t) \ , \quad 0 \leq t' < t < t'' \leq T_0$$

y que $\eta = 0$ en la frontera parabólica de S_1. Aplicando el principio del máximo a (9.7) en S_1 se obtiene inmediatamente una contradicción. □

C. Análisis a priori de la región pastosa.

Demostraremos que necesariamente se halla una zona pastosa y que por algún tiempo no hay una región líquida.

LEMA 2. *Existe* $t_0 \in (0,T_0)$ *tal que*

$$\aleph = \{ (x,t) : 0 < x < \sigma(t) \ , \ \ 0 < t < t_0 \} \subset M. \tag{9.8}$$

Demostración.

Antes que nada demostraremos que hay una componente de M contigua a S. La negación de esto sería la existencia de una región

$$\{ (x,t) : \rho(t) < x < \sigma(t) \ , \ \ 0 < t < t_1 \} \subset L$$

donde $\rho(t)$ es alguna función no negativa y tal que $\rho(0) = 0$.

Si fuera $\rho(t) > 0$ para $t > 0$, por el Lema 9.1 $x = \rho(t)$ sería necesariamente una curva interfase M-L y como tal, suave. Además, por el Teorema 8.3 se tiene $\dot\rho < v_0(\rho) = -2\alpha\rho$ (siendo las fase M y L en el orden opuesto al del Teorema 8.3, hay que invertir las desigualdades entre $\dot s$ y v_0 ; después nótese que el conjunto B^+ coincide con el rectángulo $(0,1)\times(0,T_0)$). Esta desigualdad contrasta con la hipótesis $\rho(t) > 0$ para $t > 0$.

Luego, queda probar que la hipótesis $\rho(t) \equiv 0$ es también absurda. El asunto en que se basa la prueba es el balance de energía en la región

$$\{ (x,t) : 0 < x < \sigma(t) \ , \ \ 0 < t < t_0 \} \ ,$$

que estamos suponiendo ocupada por la fase líquida. Integrando (9.7) sobre esta región se obtiene (con claros símbolos)

$$\int_0^t k_L \, [\, \eta_x^L + \theta'_o(\sigma(\tau)) \,] \, d\tau = \int_0^{\sigma(t)} \eta(x,t) \, dx \geq 0. \tag{9.9}$$

De la condición de Stefan en $x = \sigma(t)$ viene

$$-\lambda \ \sigma(t) + k_L \int_0^t \theta'_o(\sigma(\tau)) \, d\tau \geq 0$$

y, visto que $\theta'_o(\sigma) = 2\sigma$, la desigualdad obtenida no puede ser cierta, como se verifica tomando t bastante pequeño.

El mismo argumento se aplica en cada intervalo $(t',t'') \subset (0,T_0)$ en el cual $\sigma(t) > 0$, $\sigma(t') = 0$ (recuérdese que hasta ahora no se mostró ninguna propiedad de la curva $x = \sigma(t)$, ni tampoco que $\sigma(t) > 0$ para $t > 0$).

Lo que obtuvimos hasta este punto es que verdaderamente hay una componente de M adyacente a S. Podemos ahora demostrar que esa componente es precisamente $\aleph$.

Si se supone lo contrario, entonces hay dos fronteras $x = \rho_1(t)$, $x = \rho_2(t)$, $\rho_1(0) = \rho_2(0)$, $\rho_1(t) < \rho_2(t) < \sigma(t)$ que delimitan una componente de L.

Utilizando la misma técnica que antes, se prueba $\rho_1(t) \equiv 0$.

En la relación con $\rho_2(t)$ notemos que la correspondiente condición de frontera libre es (8.2), es decir

$$(\lambda - E^M) \, [\, \dot\rho_2 - v_0(\rho_2) \,] + k_L \, \eta_x^L = 0 \ . \tag{9.10}$$

Ya que (9.9) es todavía cierta, reemplazando σ con ρ_2 se llega a la desigualdad

$$-\int_0^t (\lambda - E^M)\, \dot\rho_2\, d\tau + \int_0^t (\lambda - E^M)\, v_0(\rho_2)\, d\tau \geq 0\,.$$

Cuando $t \to 0$, $E^M \to 0$ y el término principal es $-\lambda\ \rho_2(t)$, siendo todo el resto infinitésimo de orden superior. Por lo tanto es absurdo suponer $\rho_2(t) > 0$.

Así se concluye la demostración del Lema 9.2. □

D. Teorema de existencia para la región S.

El problema en S se puede plantear como el siguiente problema de frontera libre a una fase. Encontrar el par (σ,η) (en la conocida clase de funciones) y el tiempo $T > 0$ tales que (9.7) sea satisfecha para $\sigma(t) < x < 1$, $0 < t < T$ y que sean verificadas las condiciones (9.3), (9.4), (9.5) y las condiciones de frontera libre

$$\eta(\sigma(t),t) = 0\,, \tag{9.11}$$

$$\eta_x(\sigma(t),t) = 0\,, \text{ cuando } \dot\sigma(t) \geq v_0(\sigma(t)) = -2\alpha\ \sigma(t), \tag{9.12}$$

$$E^M\ [\ \dot\sigma(t) - v_0(\sigma(t),t)\ ] = k_S\ \eta_x(\sigma(t),t)\,, \text{ cuando } \dot\sigma(t) < v_0(\sigma(t)). \tag{9.12'}$$

Por el momento limitémosnos al problema con las condiciones (9.11), (9.12) sin considerar ningún vínculo sobre $\dot\sigma(t)$.

LEMA 9.3. *El problema de frontera libre para la ecuación*

$$\eta_t - k_S\ \eta_{xx} = k_S\ \theta''_c\ ,\qquad \sigma(t) < x < 1\,,\ 0 < t\ ,$$

con las condiciones $\eta(x,0) = -\frac{1}{2}x^2$, $\eta(1,t) = -\frac{1}{2}$ *y las condiciones de frontera libre* $\eta = \eta_x = 0$ *para* $x = \sigma(t)$ ***tiene una y sólo una solución global.***

Demostración.

Poniendo $\tau = k_S\ t$, $Z(x,\tau) = \eta_t(x,\tau/k_S)\ /\ (2k_S)$, $s(\tau) = \sigma(\tau/k_S)$, el problema estudiado se transforma en

$$\begin{array}{ll}
Z_{xx} - Z_\tau = 0\ , & s(\tau) < x < 1\,,\ \ \tau > 0\,,\\
s(0) = 0\,, & \\
Z(x,0) = \frac{1}{2}\,, & 0 < x < 1\,,\\
Z(1,\tau) = 0\,, & \tau > 0\,,\\
Z(s(\tau),\tau) = 0\,, & \tau > 0\,,\\
Z_x(s(\tau),\tau) = \dot s(\tau)\,, & \tau > 0\,.
\end{array}$$

La solución η del problema original se halla invirtiendo la transformación, es decir

$$\eta(x,t) = -\ \theta_c(x) + \theta_c(\sigma(t)) + (x - \sigma(t))\ \theta'_c(\sigma(t)) + 2\int_{\sigma(t)}^{x}\int_{\sigma(t)}^{\xi} Z(\zeta,k_S t)\, d\zeta\, d\xi.$$

El par (s,Z) satisface un problema del tipo "fusión de sólido sobrecalentado" (§4,C) en un caso claramente comprendido en el Teorema 4.4 (existencia y unicidad).

Para mostrar que la solución es global explotemos los hechos siguientes:

(i) $\dot s > 0$ (consecuencia del principio del máximo fuerte).

(ii) $0 < s(\tau) < 1$ para τ cualquiera:sigue de la integración de $(1 - x)\ (Z_{xx} - Z_\tau)=0$

que lleva a la igualdad

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(1 - s(\tau))^2 + \int_{s(\tau)}^{1} (1 - x)\, Z(x,\tau)\, dx = 0 ,$$

de donde, siendo Z una función acotada, se deduce que $s(\tau)$ nunca puede tender a 1.

(iii) $\dot{s}(\tau)$ queda acotado para cada τ : en efecto, se halla demostrado en [FP6] que si

$$\lim_{\tau \to \tau_0^-} \dot{s}(\tau) = +\infty$$

para algún τ_0 finito, el punto $(\sigma(\tau_0),\tau_0)$ pertenece a la curva de nivel $Z = 1$ que no existe en nuestro caso, siendo $0 \le Z \le \frac{1}{2}$ por el principio del máximo. □

OBSERVACION 9.2. La discontinuidad de Z en el origen produce una singularidad de $\dot{s}$, es decir

$$\lim_{t \to 0^+} \dot{s}(t) = +\infty . \tag{9.13}$$

Ahora podemos volver a la cuestión principal, demostrando el teorema de existencia para la región S.

Recordamos que la constante α es definida por (5.8).

TEOREMA 9.1. *Cuando* $\alpha \ge 0$ ($k_L \ge k_S$), *el par* (σ,η) *representa la solución buscada para la región* S *hasta que la frontera* $x = \sigma(t)$ *es alcanzada por la (eventual) frontera* $x = \rho(t)$ *entre* L *y* M.

Cuando $\alpha < 0$ ($k_L < k_S$), *la solución obtenida en el Lema* 9.3 *no puede satisfacer por un tiempo indefinido el vínculo* $\dot{\sigma} \ge v_0(\sigma)$, *es decir hay un tiempo* $\overline{T}$ *para el cual es necesario pasar de la condición de frontera libre* (9.12) *a la condición* (9.12') *(si no se verifica antes el colapso de la zona pastosa).*

OBSERVACION 9.3. Hasta ahora no dijimos nada acerca de la formación de la fase líquida. Se verá más adelante que la fase líquida va a nacer después de un cierto tiempo y que la zona pastosa colapsa en un tiempo finito.

OBSERVACION 9.4. La discusión desarrollada en el Cap. 7 sobre las condiciones de frontera fija muestra que no hay que dar el valor de $E(0,t)$, a pesar de la igualdad $\theta(0,t) = \theta_c(0,t)$, porque $v_0(0) = 0$.

<u>Demostración del Teorema 9.1.</u>

La primera afirmación del Teorema sigue del Teorema 8.2 (y Obs. 8.1), observando que si $\alpha \ge 0$ se tiene $v_0(x) = -2\alpha x \le 0$ en $(0,1)$, mientras $\dot{\sigma}(t) > 0$ para $t > 0$, de donde $\dot{\sigma} > v_0(\sigma)$ (expansión relativa de la zona pastosa).

En el caso $\alpha < 0$ es cierto que la misma situación se presenta durante un tiempo bastante pequeño como consecuencia de (9.13). Demostremos que necesariamente se realiza la inversión del signo de la velocidad relativa $\dot{\sigma} - v_0(\sigma)$ para algún tiempo finito $\overline{T}$.

En efecto, de (i) sigue la existencia de $\lim_{t \to \infty} \sigma(t) = \sigma_\infty \leq 1$, y por eso $\liminf_{t \to \infty} \dot{\sigma}(t) = 0$, implicando la existencia de un primer instante $\overline{T}$ tal que $\dot{\sigma}(\overline{T}) = v_0(\sigma(\overline{T}))$ (la función $v_0(\sigma(t))$ es creciente con t). □

OBSERVACION 9.5. Del comportamiento asintótico de $\sigma(t)$ se deduce muy fácilmente que $\lim_{t \to \infty} Z(x,t) = 0$, uniformemente en $(0,\sigma_\infty)$. Se puede ahora deducir de (ii) el valor de σ_∞, simplemente eliminando la integral

$$\sigma_\infty = 1 - 1/\sqrt{2} \tag{9.14}$$

OBSERVACION 9.6. (unicidad). No se puede bifurcar del origen otra solución, pues debería ser una solución tal que $\dot{\sigma}(t) < v_0(\sigma)$, contradiciendo $\sigma(t) > 0$.

OBSERVACION 9.7. No discutiremos el caso de inversión de la velocidad relativa. Un caso parecido se halla tratado en [DU], donde se estudia un problema con doble inversión, mostrando que la segunda inversión produce una discontinuidad de E en M.

E. Teorema de existencia para la región M.

La ecuación para E(x,t) es, recordando (7.2), (9.1), (9.2),

$$E_t - 2\alpha x\, E_x = 2\,(k_S + \alpha E)\,, \tag{9.15}$$

que se puede integrar con la condición

$$E(\sigma(t),t) = 0\,, \tag{9.16}$$

para $0 < t < T^*$, donde $T^* = +\infty$ si $\alpha \geq 0$ y $T^* = \overline{T}$ si $\alpha < 0$.

La solución E(x,t) tiene la representación paramétrica

$$x = \sigma(\tau) \exp[-2\alpha\,(t-\tau)]\,, \tag{9.17}$$

$$E = (k_S/\alpha)\,[\,\exp 2\alpha\,(t-\tau) - 1\,]\,, \quad \text{si} \quad \alpha \neq 1\,, \tag{9.18}$$

$$E = 2k_S\,(t-\tau)\,, \quad \text{si} \quad \alpha = 0 \quad (\,k_L = k_S\,)\,. \tag{9.18'}$$

Así se define una región M^* (que va a contener M), en la cual $0 < E < \lambda$, que se halla acotada por $x = \sigma(t)$ y por

(a) la curva característica de (9.15) que sale del origen, es decir $x = 0$, en el intervalo $[0,T_\lambda]$, donde (por (6.8))

$$T_\lambda = (2\alpha)^{-1} \ln(\,k_L/k_S\,) \qquad \text{si} \quad \alpha \neq 0\,, \tag{9.19}$$

$$T_\lambda = \lambda/(2k_S) \qquad \text{si} \quad \alpha = 0\,, \tag{9.19'}$$

(b) la curva de nivel $E(x,t) = \lambda$

$$x = \sigma\,[\,t - (2\alpha)^{-1} \ln(\,k_L/k_S\,)\,]\,(\,k_L/k_S\,) \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0\,, \tag{9.20}$$

$$x = \sigma\,(\,t - \lambda/(2k_S)\,) \qquad \text{si } \alpha = 0\,, \qquad (9.20')$$

(c) (si $\alpha < 0$) la característica de (9.15) pasante por $(\sigma(\overline{T}),\overline{T})$

$$x = \sigma(\overline{T})\,\exp\,[\,-2\alpha\,(t-\tau)\,]\,, \qquad t > \overline{T}\,. \qquad (9.21)$$

Se puede expresar E en términos de x, t si τ es explicitable de (9.17), es decir hasta cuando $\dot\sigma(t) + 2\alpha\,\sigma(t) > 0$, que es precisamente la condición bajo la cual la solución (σ,η) en S tiene sentido físico, o sea $t < T^*$.

Concluimos enunciando el

TEOREMA 9.2. *La función $E(x,t)$ se puede calcular (formalmente) en una región que se halla arriba de la frontera $x = \sigma(t)$, $t < T^*$.*

OBSERVACION 9.8. La región pastosa M será más pequeña que M^*, pero en la parte común el valor calculado de $E(x,t)$ es el físico. El conocimiento de E en M^* sirve para plantear el problema en la fase líquida.

F. El teorema de existencia para la región L.

Se busca la solución (ρ,η) del problema siguiente

$$\eta_t - k_L\,\eta_{xx} = k_L\,\theta''_0\,, \qquad 0 < x < \rho(t), \qquad T_\lambda < t < T_0\,,$$

$$\rho(T_\lambda) = 0\,,$$

$$\eta_x(0,t) = 0\,, \qquad T_\lambda < t < T_0\,,$$

$$\eta(\rho(t),t) = 0\,, \qquad T_\lambda < t < T_0\,,$$

$$k_L\,\eta_x(\rho(t),t) = -[\,\lambda - E(\rho(t)^+,t)\,]\,[\,\dot\rho(t) - v_0(\rho(t))\,], \qquad T_\lambda < t < T_0\,.$$

En efecto, $\eta_x(\rho(t),t) < 0$ por el principio del máximo fuerte y por lo tanto nunca puede ser $\dot\rho \le v_0(\rho)$ (lo que implicaría $\eta_x(\rho,t) = 0$).

En el esquema de arriba la función $E(x,t)$ es conocida y el valor ideal de T_0 sería el eventual tiempo de colapso de la zona pastosa. Sin embargo, el resultado de [FP4] no da una estima tan precisa de T_0 :

TEOREMA 9.3. *Hay una y sólo una solución (ρ,η) que describe la evolución de la fase líquida en algún intervalo (T_λ,T_0).*

Demostración (resumen).

La demostración es muy larga. La mayor dificultad viene de la degeneración de la condición de frontera libre para $t = T_\lambda$ ($E(0,T_\lambda) = \lambda$). Como ya vimos en casos similares, la idea básica es la construcción de una sucesión de soluciones aproximadas, obtenida reemplazando $\rho(T_\lambda) = 0$ con $\rho_n(T_\lambda) = \epsilon_n$, siendo $\{\epsilon_n\}$ una sucesión decreciente a cero. Después se prueba que las funciones $\rho_n(t)$ están definidas en un intervalo común (T_λ,T_0) y forman una sucesión no creciente y que por eso tiene un límite $\rho(t)$.

Se verifica que esta curva límite está a la derecha de la curva de nivel $E = \lambda$ (es decir, atraviesa la región M^*) y que la convergencia de la sucesión $\{\rho_n\}$ es uniforme. Después se calcula la solución η del problema de conducción en $0 < x < \rho(t)$, $T_\lambda < t < T_0$ y se controla que η sea el límite uniforme de las soluciones aproximadas η_n. Finalmente para concluir la demostración se definen las funciones

$$\Lambda(x,t) = -\int_0^x [\, \lambda - E(\xi,t)\,]\, d\xi \,,$$

$$M(x,t) = -2\alpha x\, [\, \lambda - E(x,t)\,] - \int_0^x E_t(\xi,t)\, d\xi \,,$$

mediante las cuales la condición de frontera libre se escribe

$$k_L\, \eta_x(\rho,t) = \frac{d}{dt}\Lambda(\rho,t) + M(\rho,t)\,. \tag{9.22}$$

Con métodos estandard se demuestra que (9.22) es equivalente (si $\rho(t)$ es Lipschitz) a la igualdad

$$-\int_{T_L}^{t}\int_0^{\rho(\tau)} 2\, k_L\, dx\, d\tau = \Lambda(\rho(t),t) - \Lambda(\rho(0),T_L) + \int_{T_L}^{t} M(\rho(\tau),\tau)\, d\tau - \tag{9.23}$$
$$- \int_0^{\sigma(t)} \eta(x,t)\, dx \,, \qquad t \in (T_L,T_0)\,.$$

Utilizando (9.23) para las soluciones aproximadas y pasando al límite se obtiene que el par (ρ,η) es la solución buscada.

Los detalles se hallan en [FP4]. □

G. Comportamiento asintótico.

No investigamos el desarrollo sucesivo de las fronteras $x = \sigma(t)$ y $x = \rho(t)$. Sin embargo, se puede decir algo acerca del comportamiento al infinito, refiriéndose al caso $\alpha \geq 0$ en el cual se sabe que la región M^* se extiende al infinito.

TEOREMA 9.1. *La zona pastosa desaparece en un tiempo finito.*

Demostración.

Si el teorema fuese falso existirían los límites ρ_∞, σ_∞ de ρ y σ para $t \to \infty$ (recuérdese que $\dot\rho > 0$, $\dot\sigma > 0$). Además $\sigma_\infty\,(k_S/k_L) \leq \rho_\infty \leq \sigma_\infty$.

En la fase sólida $\theta \to -\frac{1}{2}$, en la fase líquida $\theta \to \theta_c(\rho_\infty) = -1 + \rho_\infty^{\,2}$.

Visto que la frontera $x = \sigma(t)$ es suave, la energía $E(x,t)$ es también suave y esta propiedad se transmite a la frontera $x = \rho(t)$. Luego $\dot\rho(t)$, y por consecuencia $\theta_x(\rho(t),t)$, tienden a cero para $t \to \infty$.

Entonces, tomando el límite en la condición de frontera libre (8.2), se encuentra $-2\,\rho_\infty\, K(E_\infty) = 0$, que es absurdo. □

Como corolario se tiene que la solución asintótica es la solución estacionaria del problema de Stefan correspondiente a la temperatura límite $\theta = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto el límite de la frontera líquido - sólido es la raíz de $\theta_c(x) = -\frac{1}{2}$, es decir $s_\infty = 1/\sqrt{2}$.

AGRADECIMIENTOS.

Quiero agradecer al comité científico del Seminario y especialmente al Dr. Tarzia, cuyo trabajo hizo posible el suceso del Seminario y la realización de este Cuaderno.

Agradezco también a las Licenciadas Cristina Turner y Mirta Stampella que con gran paciencia y precisión corrigieron mi pobre castellano.

BIBLIOGRAFIA

[A] D.R.Atthey: *A finite difference scheme for melting problems.* J. Inst. Math. Appl. 13 (1974) 353-366.

[BdMP1] M.Bertsch, P.de Mottoni, L.A.Peletier: *Degenerate diffusion and the Stefan problem.* Nonlinear Anal., TMA 8 (1984) 1311-1336.

[BdMP2] M.Bertsch, P.de Mottoni, L.A.Peletier: *The Stefan problem with heating: appearance and disappearance of a mushy region.* Trans. AMS 293 (1986) 677-691.

[C] G.Caginalp. *Phase field models of solidification: free boundary problems as systems of nonlinear parabolic equations.* In "Free boundary problems: applications and theory" III (A.Bossavit, A.Damlamian, M.Frémond eds.), Pitmans Res. Notes Math. 120 (1985) 107-121.

[CF] G.Caginalp, P.Fife. *Phase-field methods for interfacial boundaries.* Phys. Rev. B 33 (1986) 7792-7794.

[CG] J.Crank, R.S.Gupta. *A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorting tissues.* J. Inst. Math. Appl. 10 (1972) 19-33.

[CO] A.B.Cowley, J.R.Ockendon. *Modelling mushy region.* En prensa.

[DU] Ding Z.Z., M.Ughi. *A model problem for the diffusion of oxygen in living tissues.* En prensa.

[F1] A.Fasano. *Alcune osservazioni su una classe di problemi a contorno libero per l'equazione del calore.* Matematiche (Catania) 29 (1974) 397-411.

[F2] A.Fasano. *Free boundary problems for parabolic equations with Cauchy data on the free boundary.* In "Free boundary problems" II (E.Magenes ed.), (1980) 237-247.

[FP1] A.Fasano, M.Primicerio. *General free boudary problems for the heat equation,* Part I. J. Math. Anal. Appl. 57 (1977) 694-723. Part II. Ibid. 58 (1977) 202-231. Part III. Ibid. 59 (1977) 1-14.

[FP2] A.Fasano, M.Primicerio. *Free boundary problems for non linear parabolic equations with non linear free boudary conditions.* J. Math. Anal. Appl. 72 (1979) 247-273.

[FP3] A.Fasano, M.Primicerio. *A parabolic-hyperbolic free boundary problem.* SIAM J. Math. Anal. 17 (1986) 67-73.

[FP4] A.Fasano, M.Primicerio. *Mushy regions with variable temperature in melting processes.* Boll. UMI (6) 4-B (1985) 601-626.

[FP5] A.Fasano, M.Primicerio. *Phase-change with volumetric heat sources: Stefan's scheme vs. enthalpy formulation.* Suppl. Boll. UMI 4 (5) (1985) 131-149.

[FP6] A.Fasano, M.Primicerio (with an appendix of A.Lacey). *New results on same classical parabolic free boundary problems.* Quart. Appl. Math. 38 (1981) 439-460.

[FP7] A.Fasano, M.Primicerio. *A critical case for the solvability of Stefan-like problems.* Math. Meth. Appl. Sc. 5 (1983) 1-13.

[FP8] A.Fasano, M.Primicerio. *A phase cange model with a zone of coexistence of phases.* En prensa.

[FPK] A.Fasano, M.Primicerio, S.Kamin. *Regularity of weak solutions of one dimensional two phase Stefan problems.* Ann. Math. Pure Appl. 115 (1978) 341-348.

[Fr1] A.Fiedman. *The Stefan problem with several space variables.* Trans. AMS 133 (1968) 51-87.

[Fr2] A.Friedman. *One-dimensional Stefan problem with non monotone free boundary.* Trans. AMS 133 (1968) 89-114.

[Fr3] A.Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice Hall, Englewood Cliffs (1964).

[GG] D.Gelder, A.G.Guy. *Current problems in glass industry.* In "Moving boundary problems in heat flow and diffusion" (J.R.Ockendon, W.R.Hodgkins eds.), Oxford 1975, 71-90.

[HN1] K.Höllig, J.A.Nohel. *A non linear integral equation occurring in a singular free boundary problem.* Trans. AMS 283 (1984) 145-185.

[HN2] K.Höllig, J.A.Nohel. *A singular free boundary problem.* Phys. Math. and Nonlinear PDE's (1983). Lecture Notes Pure Appl. Math. 102 (1985) 85-94.

[K] S.Kamenomostkaya. *Sobre el problema de Stefan* (en ruso). Math. Sb. 53 (1961) 489-514.

[M1] A.M.Meirmanov. *On the classical solution of the multidimensional Stefan problem for quasilinear parabolic equations.* Math. USSR Sb. 40 (1981) 157-178.

[M2] A.M.Meirmanov, I.A.Kaliev. *One-dimensional Stefan problem with an arbitrary initial enthalpy. Periodical solutions.* In "Free boundary problems: applications and theory" III (A.Bossavit, A.Damlamian, M.Frémond eds.), Pitman's Res. Notes Math. 120 (1985) 40-49.

[M3] A.M.Meirmanov. *An example of nonexistence of the classical solution of the Stefan problem.* Sov. Math. Dokl. AN SSSR 23 (1981) 564-566.

[N] M.Niezgodka. *Stefan-like problems.* In "Free boundary problems: theory and applications" II (A.Fasano, M.Primicerio eds.). Pitman's Res. Notes Math. 79 (1983) 321-348.

[O] O.A.Oleinik. *A method of solution of the general Stefan problem.* Sov. Math. Dokl. 1 (1960) 1350-1353.

[P1] M.Primicerio. *Problemi di diffusione a frontiera libera.* Boll. UMI (5) 18-A (1981) 11-68.

[P2] M.Primicerio. *Mushy regions in phase-change problems.* In "Applied nonlinear functional analysis", (R.Gorenflo, K.H.Hoffmann eds.), Meth. Verf. Math. Phys. 25 (1983) 251-269.

[PU] M.Primicerio, M.Ughi. *Phase-change problems with mushy regions.* In "Free boundary problems: applications and theory" III (A. Bossavit, A.Damlamian, M. Frémond eds.). Pitman's Res Notes Math. 120 (1985) 61-71.

[S] R.E.Showalter. *Mathematical formulation of the Stefan problem.* Int. J. Eng. Sc. 20 (1982) 909-912.

[SWA] A.D.Solomon, D.G.Wilson, V.Alexiades. *A mushy zone model with an exact solution.* Letters in Heat Mass Transfer 9 (1982) 319-324.

[T1] D.A.Tarzia. *Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan.* Math. Notae 29 (1981/82) 147-241.

[T2] D.A.Tarzia (ed.). *Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones.* Cuadernos N° 11, 12 (1984), Inst. Mat. "Beppo Levi", Rosario, Argentina.

[U] M.Ughi. *A melting problem with a mushy region : qualitative properties.* IMA J. Appl. Math. 33 (1984) 135-152.