

UNA SOLUCIÓN EXPLÍCITA PARA EL PROBLEMA DE SOLIDIFICACIÓN DE UNA ALEACIÓN BINARIA PROPUESTO POR RUBINSTEIN CON UN FLUJO DE CALOR EN EL BORDE FIJO

Mariela B. Cirelli^a y Domingo A. Tarzia^{a†}

^a*Departamento de Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, 52000FZF Rosario, Argentina.
MCirelli@austral.edu.ar*

[†]*CONICET, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se considera un material semi-infinito de una aleación binaria consistente en dos componentes. Se supone que la solidificación de la aleación está gobernada por un diagrama de equilibrio de fase consistente en una curva “liquidus” y una curva “solidus” de acuerdo al modelo propuesto por L. Rubinstein. Se considera que la aleación se encuentra inicialmente en estado líquido y que un flujo de calor particular se impone en el borde fijo $x = 0$. Se obtienen las condiciones necesarias y/o suficientes para los datos (iniciales y de contorno y coeficientes térmicos del material) a fin de obtener una solidificación instantánea. Además, se halla la solución explícita correspondiente.

Palabras clave: *Problema de Stefan, solidificación, cambio de fase, aleación binaria, solución explícita, curvas liquidus y solidus.*

2000 AMS Subjects Classification: 35R35, 80A22, 35C05

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un material semi-infinito de una aleación binaria consistente en dos componentes A y B . Sea C la concentración del componente B y T la temperatura. Se supone que la solidificación de la aleación está gobernada por un diagrama de equilibrio de fase consistente en una curva “liquidus” $C = f_l(T)$ y una curva “solidus” $C = f_s(T)$. Se asume que f_s y f_l son funciones crecientes en la variable T con:

$$f_l(T_A) = f_s(T_A) < f_l(T) < f_s(T) < f_l(T_B) = f_s(T_B), \quad T_A < T < T_B$$

donde T_A y T_B son las temperaturas de fusión de A y B respectivamente. El material se encuentra en la fase sólida si $C > f_s(T)$ y en la fase líquida si $C < f_l(T)$. Cuando C varía entre $f_s(T)$ y $f_l(T)$ el estado del material no está bien definido y se lo conoce con el nombre de zona pastosa (mushy region) según lo descrito en el modelo propuesto en [3] y que puede apreciarse en el Figura 1.

Se considera que la aleación se encuentra inicialmente en estado líquido a la temperatura constante T_0 y a la concentración constante C_0 . Luego un flujo de calor caracterizado por la constante q_0 es impuesto en el borde fijo $x = 0$ con lo cual un frente de solidificación $x = s(t)$ comienza instantáneamente separando la aleación en estado sólido ($x < s(t)$) del estado líquido ($x > s(t)$). La formulación matemática de este proceso de cristalización consiste en hallar la temperatura $T = T(x, t)$ y la concentración $C = C(x, t)$, ambas definidas para $x > 0$ y $t > 0$, la frontera libre $x = s(t)$, definida para $t > 0$, y la temperatura crítica de solidificación T_k de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \alpha_s T_{s,xx} = T_{s_t}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0; \\ \text{ii.} \quad & \alpha_l T_{l,xx} = T_l, \quad s(t) < x, \quad t > 0; \\ \text{iii.} \quad & d_s C_{s,xx} = C_{s_t}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0; \end{aligned} \tag{1}$$

- iv. $d_l C_{l_{xx}} = C_l, \quad x > s(t), \quad t > 0;$
- v. $k_s T_{s_x}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} \quad (q_0 > 0), \quad t > 0;$
- vi. $T_s(s(t), t) = T_l(s(t), t) = T_k, \quad t > 0;$
- vii. $T_l(x, 0) = T_0$ con $T_A < T_0 < T_B, \quad x > 0;$
- viii. $T_l(\infty, t) = T_0$, con $T_A < T_0 < T_B, \quad t > 0;$
- ix. $C_{s_x}(0, t) = 0, \quad t > 0;$
- x. $C_s(s(t), t) = f_s(T_k), \quad t > 0;$
- xi. $C_l(x, 0) = C_0, \quad x > 0;$
- xii. $C_l(s(t), t) = f_l(T_k), \quad t > 0;$
- xiii. $k_s T_{s_x}(s(t), t) - k_l T_{l_x}(s(t), t) = \gamma \rho s'(t), \quad t > 0;$
- xiv. $d_l C_{l_x}(s(t), t) - d_s T_{s_x}(s(t), t) = [f_s(T_k) - f_l(T_k)] s'(t), \quad t > 0,$

(1)

donde $\rho, k, \alpha, d, \gamma$ representan la densidad de masa, la conductividad térmica, la difusividad térmica, la difusión másica y el calor latente de fusión, siendo s y l los sub-índices que denotan la fase sólida y líquida respectivamente. Cuando la condición en la frontera fija $x = 0$ es la dada por una temperatura constante $T_A < T_s(0, t) = T_l < T_0$ (en lugar de la condición (1.v)) el correspondiente problema de solidificación fue resuelto en [3,4,10]. Recientes trabajos sobre la solidificación de una aleación binaria son [1, 2, 7 - 9]. La condición de flujo de calor (1.v) impuesta en el borde fijo fue considerada en [5] para un problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito homogéneo a coeficientes constantes.

El objetivo de éste trabajo consiste en hallar las condiciones necesarias y/o suficientes para los datos iniciales y de contorno del problema y los coeficientes térmicos de la aleación binaria, en particular para el coeficiente q_0 , a los efectos de obtener un cambio de fase instantáneo y una solución explícita del problema [6].

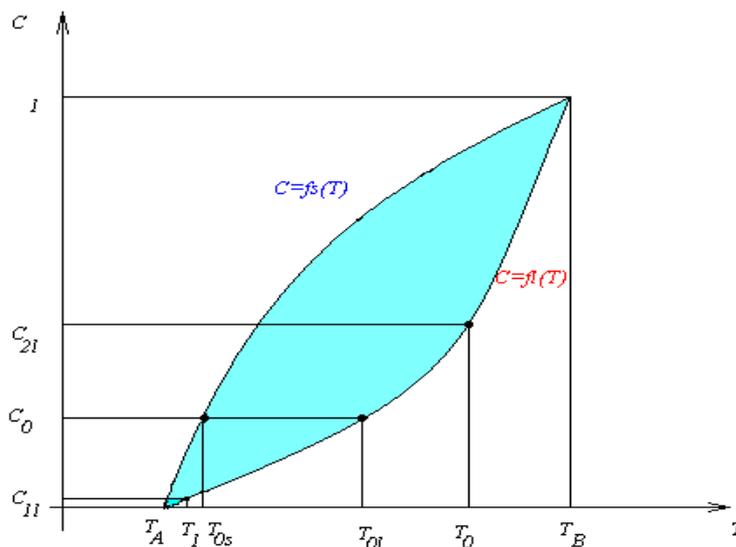


Figura 1: Concentración vs. Temperatura (diagrama de equilibrio de fase con curvas liquidus y solidus)

2. SOLUCIÓN EXPLÍCITA PARA LA SOLIDIFICACIÓN DE UNA ALEACIÓN BINARIA

Teorema 1 Si q_0 verifica la siguiente desigualdad

$$(2) \quad \frac{(T_0 - T_{0_l})k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}} < q_0 < \frac{(T_0 - T_{0_s})k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}}$$

donde $T_{0_l} = f_l^{-1}(C_0)$ y $T_{0_s} = f_s^{-1}(C_0)$ con $f_l^{-1}(C) = T$ y $f_s^{-1}(C) = T$ respectivamente, el problema de frontera libre (1) tiene única solución del tipo de similitud dada por:

$$(3) \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_s t}, \quad t > 0$$

$$(4) \quad T_s(x, t) = \left(T_k - \frac{1}{k_s} q_0 \sqrt{\pi\alpha_s} \operatorname{erf}(\lambda) \right) + \frac{1}{k_s} q_0 \sqrt{\pi\alpha_s} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}} \right), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0$$

$$(5) \quad T_l(x, t) = T_0 + \frac{(T_k - T_0)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} \lambda \right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}} \right), \quad s(t) < x, \quad t > 0$$

$$(6) \quad C_s(x, t) = f_s(T_k), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0$$

$$(7) \quad C_l(x, t) = C_0 + \frac{(f_l(T_k) - T_0)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} \lambda \right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{d_l t}} \right), \quad s(t) < x, \quad t > 0$$

donde las incógnitas T_k y λ (coeficiente que caracteriza la frontera libre $x = s(t)$) satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(8) \quad T_k = F(\lambda), \quad M(\lambda) = \phi(T_k), \quad \lambda > 0, \quad T_A < T_k < T_B,$$

donde las funciones reales F , M y ϕ están definidas de la siguiente manera:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt; \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x); \quad Q(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x), \quad x > 0,$$

$$F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}; \quad M(x) = Q^{-1}\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{d_l}} x \right), \quad x > 0$$

$$F(x) = T_0 + \frac{1}{k_l} \gamma \delta \alpha_l \sqrt{\pi} Q\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} x \right) - \frac{1}{k_l} \sqrt{\alpha_l \pi} \exp(-x^2) F_1\left(\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{\alpha_l}} x \right), \quad x > 0$$

$$\phi(x) = \frac{f_s(x) - f_l(x)}{-(f_l(x) - C_0)}, \quad x \in (T_A, T_{0_l}) \cup (T_{0_l}, T_B)$$

Prueba.

La demostración del teorema se basa en los siguientes hechos:

* La función M es una función estrictamente decreciente con $M(0) = \infty$, $M(+\infty) = 1$.

* La función F es una función estrictamente creciente con las siguientes propiedades:

$$F(0^+) = T_0 - \frac{1}{k_l} q_0 \sqrt{\alpha_l \pi}, \quad F(+\infty) = T_0 + \frac{1}{k_l} \gamma \rho \alpha_l \sqrt{\pi}.$$

* La función $\phi(x)$ es una función estrictamente creciente en el intervalo $[T_{0_s}, T_{0_l})$ con las siguientes propiedades:

$$\phi(T) \in (0,1) \text{ si } T \in (T_A, T_{0_s}), \quad \phi(T) \in [1, \infty) \text{ si } T \in [T_{0_s}, T_{0_l}) \text{ y } \phi(T) < 0 \text{ si } T \in (T_{0_l}, T_B).$$

Si se define la función real $m(\lambda) = \phi(F(\lambda))$ para $\lambda > 0$ resulta que $F(\lambda) \in [T_{0_s}, T_{0_l})$ cuando q_0 verifica la desigualdad (2). Entonces por las conclusiones anteriores se puede asegurar que existe un único $\lambda \in (F^{-1}(T_{0_s}), F^{-1}(T_{0_l}))$ tal que satisface el sistema (8) con lo cual el problema (1) admite una única solución del tipo similaridad (3) – (7). □

Obsevación Si se define $T_1 = T_s(0, t)$ entonces T_1 viene dado por la expresión:

$$(9) \quad T_1 = T_k - \frac{1}{k_s} q_0 \sqrt{\pi \alpha_s} \operatorname{erf}(\lambda)$$

que resulta ser una constante independiente del tiempo t . Por otro lado, se tiene que:

$$(10) \quad T_1 \leq T_s(x, t) < T_k, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0.$$

Corolario 1 Si se definen $C_{1_l} = f_l(T_1)$ y $C_{2_l} = f_l(T_0)$ entonces se tiene que $C_0 \in [C_{1_l}, C_{2_l}]$.

AGRADECIMIENTOS

El Trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP No. 0460 de CONICET-UA y “Fondo de Ayuda a la Investigación de la UA”, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

- [1] D.V. ALEXANDROV AND A.P. MALYGIN, *Self-similar solidification of an alloy from a cooled boundary*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 49 (2006), pp. 763-769.
- [2] J.D. CHUNG, J.S. LEE, S.T. RO AND H. YOO, *An analytical approach to the conduction-dominated solidification of binary mixtures*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 42 (1999), pp. 373-377.
- [3] L. RUBINSTEIN, *The Stefan problem*, Transl. Math. Monographs, Vol. 27, American Math. Society, Providence, 1971.
- [4] A. D. SOLOMON, D.G. WILSON AND V. ALEXIADES, *Explicit solutions phase change problems*, Quarterly of Applied Math, 41 (1983), pp. 237-243.
- [5] D.A. TARZIA, *An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem*, Quarterly of Applied Math, Vol. 39 (1981-1982), pp. 491-497.
- [6] D.A. TARZIA, *Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional*, Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, 12 (1984), pp. 5-36.
- [7] V.R. VOLLER, *A similarity solution for solidification of an under-cooled binary alloy*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 49 (2006), pp. 1981-1985.
- [8] V.R. VOLLER, *A numerical method for the Rubinstein binary- alloy problem in the presence of an under-cooled liquid*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 51 (2008), pp. 696-706.
- [9] V.R. VOLLER, *An enthalpy method for modeling dendritic growth in a binary alloy*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 51 (2008), pp. 823-834.
- [10] D.G. WILSON, A. D. SOLOMON AND V. ALEXIADES, *A shortcoming of the explicit solution for the binary alloy solidification problem*, Letters Heat and Mass Transfer, 9 (1982), pp. 421-428.