

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE DOS COEFICIENTES TÉRMICOS MEDIANTE PROBLEMAS INVERSOS DE STEFAN FRACCIONARIOS

Andrea N. Ceretani^{†‡} y Domingo A. Tarzia[†]

[†]CONICET - Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral, Paraguay 1950, Rosario, Argentina.

[‡]Facultad de Ciencias. Exactas, Ingeniería y Agrim., Univ. Nacional de Rosario, Pellegrini 250, Rosario, Argentina. ,
aceretani@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: En este trabajo se considera un material de cambio de fase unidimensional semi-infinito con coeficientes térmicos constantes entre los cuales son desconocidos simultáneamente el calor específico y la conductividad térmica. Con el objetivo de determinar estos coeficientes, se supone que el material se encuentra bajo un proceso de fusión *con memoria*, lo cual se modela con un problema inverso de Stefan fraccionario en el tiempo con una sobrecondición en la frontera fija y una evolución conocida de la interfase. Se obtienen fórmulas explícitas para la temperatura, el calor específico y la conductividad térmica bajo la condición de que los datos verifiquen una restricción. Finalmente, se observa que los resultados obtenidos mediante la formulación clásica de este problema pueden obtenerse como un caso límite del modelo fraccionario.

Palabras clave: *Problema inverso de Stefan, Derivada temporal fraccionaria de Caputo, Coeficientes térmicos desconocidos, Soluciones explícitas, Funciones de Wright y de Mainardi, Sobrecondición de frontera.*

2000 AMS Subject Classification: 26A33, 35C05, 35R11, 35R35, 80A22.

1. INTRODUCCIÓN

La determinación de coeficientes térmicos para materiales de cambio de fase a través de problemas inversos de Stefan ha sido ampliamente estudiada durante las últimas décadas [1, 2, 5, 10, 11, 12]. Recientemente, han comenzado a estudiarse los *problemas de Stefan fraccionarios* [14, 15, 16, 6, 7, 8] en el contexto de procesos de cambio de fase *con memoria* (ver, por ejemplo, la interpretación física del tipo de problemas abordados en [6, 7, 8] que se hace en [16]). Según el conocimiento de los autores, el primer trabajo de determinación de coeficientes térmicos a través de problemas de Stefan fraccionarios fue hecho en [13]. Motivados por [11, 13], consideramos aquí el problema de la determinación de dos coeficientes térmicos desconocidos a través de un problema de Stefan fraccionario a una fase para el cual se conoce la evolución de la interfase. Se estudia el caso de calor específico y conductividad térmica desconocidos, pero un análisis similar puede hacerse para otro par de coeficientes térmicos desconocidos entre la densidad de masa, el calor latente por unidad de masa, el calor específico y la conductividad térmica.

Más precisamente, se considera el siguiente problema inverso a una fase para un proceso de fusión con interfase sin grosor (*sharp front interface*):

$$D^\alpha T(x, t) = \mu_\alpha \lambda^2 T_{xx}(x, t) \quad 0 < x < s(t), t > 0 \quad (\lambda^2 = k/\rho c) \quad (1a)$$

$$T(s(t), t) = T_m \quad t > 0 \quad (1b)$$

$$-kT_x(s(t), t) = \nu_\alpha \rho l D^\alpha s(t) \quad t > 0 \quad (1c)$$

$$T(0, t) = T_0 \quad t > 0 \quad (1d)$$

$$kT_x(0, t) = -\frac{q_0}{t^{\alpha/2}} \quad t > 0 \quad (1e)$$

$$s(0) = 0 \quad (1f)$$

donde las incógnitas son la temperatura T [$^{\circ}\text{C}$] de la fase líquida, el calor específico $c > 0$ [$J\text{ kg}^{-1} (^{\circ}\text{C})^{-1}$] y la conductividad térmica $k > 0$ [$W\text{ m}^{-1} (^{\circ}\text{C})^{-1}$]. Los demás coeficientes involucrados en el problema (1) se suponen conocidos, a saber: la densidad de masa $\rho > 0$ [$kg\text{ m}^3$], el calor latente por unidad de masa $l > 0$ [$J\text{ kg}^{-1}$], la temperatura de cambio de fase $T_m > 0$ [$^{\circ}\text{C}$], la temperatura $T_0 > T_m$ [$^{\circ}\text{C}$] en la frontera $x = 0$, el coeficiente $q_0 > 0$ [$W\text{ m}^2 (^{\circ}\text{C})^{-1}$] que caracteriza el flujo de calor en $x = 0$ y la *capacidad de retención de memoria* [16] $0 < \alpha < 1$ (adimensional) que tiene el sistema. Los parámetros $0 < \mu_\alpha \leq 1$ [$s^{1-\alpha}$] y $0 < \nu_\alpha \leq 1$ [$s^{\alpha-1}$] se incluyen con el único objetivo de tener coherencia dimensional en la ecuación (1a)

y en la condición (1c), respectivamente, y se los asume tales que $\mu_\alpha, \nu_\alpha \rightarrow 1$ cuando $\alpha \rightarrow 1^-$. Se supone también que es conocida la evolución de la interfase, considerando [6, 7, 8]:

$$s(t) = \sigma t^{\alpha/2}, \quad t > 0, \quad (2)$$

con $\sigma > 0$ [$m s^{-\alpha/2}$]. El operador D^α en (1a) y (1c) representa la derivada temporal fraccionaria de orden α en el sentido de Caputo, el cual está determinado por:

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau & \text{if } 0 < \alpha < 1 \\ f'(t) & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}, \quad t > 0 \quad (3)$$

para cualquier $f \in W^1(\mathbb{R}^+) = \{f \in C^1(\mathbb{R}^+)/f' \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$, donde Γ es la función Gamma definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} s^{x-1} \exp(-s) ds, \quad x > 0.$$

De acuerdo a [3, 4], el coeficiente $\mu_\alpha \lambda^2$ [$m^2 s^{-\alpha}$] en la ecuación (1a) es una especie de *coeficiente de difusión fraccionario*, siendo $\lambda^2 = k/\rho c$ [$m^2 s^{-1}$] la difusividad térmica.

2. FÓRMULAS EXPLÍCITAS PARA LA TEMPERATURA Y LOS DOS COEFICIENTES TÉRMICOS DESCONOCIDOS

En primer lugar se establecerá una caracterización de las soluciones de tipo similaridad para el problema (1). En este sentido, se comienza con la siguiente definición, que está motivada por la dada en [6, 7] para el caso de problemas de Stefan fraccionarios directos.

Definición 1 La terna dada por la temperatura T , el calor específico c y la conductividad térmica k es una solución del problema inverso de Stefan fraccionario a una fase (1) si:

1. T está definida en $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$.
2. $T \in C(\Omega) \cap C_x^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap W_t^1(\mathbb{R}^+)$, donde $\Omega = \{(x, t) / 0 < x < s(t), t > 0\}$ y $W_t^1(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / f(x, \cdot) \in W^1(\mathbb{R}^+) \forall x > 0\}$.
3. T es una función continua sobre $\Omega \cup \partial_p \Omega$, donde $\partial_p \Omega = \{(0, t)/t > 0\} \cup \{(s(t), t)/t > 0\}$, excepto quizás en el punto $(0, 0)$, en el cual se debe verificar la siguiente condición:

$$0 \leq \liminf_{(x,t) \rightarrow (0,0)} T(x, t) \leq \limsup_{(x,t) \rightarrow (0,0)} T(x, t) < \infty.$$

4. Para todo $t > 0$, existe $\frac{\partial}{\partial x} T(s(t), t)$.
5. c y k son números reales positivos.
6. La temperatura T y los dos coeficientes térmicos verifican (1).

A partir de proponer una solución de similaridad para el problema (1) análoga a la presentada en [6, 7, 8, 13] y siguiendo pasos análogos a los necesarios para determinar soluciones de similaridad mediante el método clásico de Neumann, se puede probar el siguiente resultado (ver [6, 7]):

Teorema 1 Si la frontera móvil s está definida por (2), entonces la función T dada por:

$$T(x, t) = T_0 - \frac{T_0 - T_m}{1 - W\left(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)} \left[1 - W\left(-\frac{x}{\sqrt{\mu_\alpha \lambda t^{\alpha/2}}}, -\frac{\alpha}{2}, 1\right)\right], \quad 0 < x < s(t), t > 0 \quad (4)$$

es una solución del problema (1) con calor específico c y conductividad térmica k desconocidos, si y sólo si c y k son solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\xi [1 - W(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1)]}{M_{\frac{\alpha}{2}}(\xi)} = \frac{c(T_0 - T_m)\Gamma(-\frac{\alpha}{2} + 1)}{\mu_\alpha \nu_\alpha l \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)} \quad (5a)$$

$$1 - W(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1) = \frac{\sqrt{k\rho c}(T_0 - T_m)}{\sqrt{\mu_\alpha q_0} \Gamma(-\frac{\alpha}{2} + 1)} \quad (5b)$$

donde el parámetro adimensional ξ está definido por:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu_\alpha \lambda}} \quad (6)$$

y W y M_ν son las funciones de Wright y Mainardi, dadas por:

$$W(z, a, b) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(ak + b)} \quad y \quad M_\nu(z) = W(-z, -\nu, 1 - \nu), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

respectivamente, siendo $a > -1$, $b \in \mathbb{C}$ y $0 < \nu < 1$.

Por lo tanto, la resolución del problema (1) mediante soluciones de tipo similaridad se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones (5). Como se verá a continuación, esto permite demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2 Si la frontera móvil s está dada por (2), entonces el problema (1) admite la solución T , c y k dada por (4) y:

$$c = \frac{\mu_\alpha \nu_\alpha l \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1) \xi [1 - W(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1)]}{(T_0 - T_m) \Gamma(-\frac{\alpha}{2} + 1) M_{\frac{\alpha}{2}}(\xi)} \quad (8a)$$

$$k = \frac{q_0^2 \Gamma^3(-\frac{\alpha}{2} + 1) [1 - W(-\xi, -\frac{\alpha}{2}, 1)] M_{\frac{\alpha}{2}}(\xi)}{\nu_\alpha \rho l (T_0 - T_m) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1) \xi} \quad (8b)$$

respectivamente, siendo ξ la única solución de la ecuación:

$$M_{\frac{\alpha}{2}}(x) = \frac{\nu_\alpha \sigma \rho l \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}{q_0 \Gamma^2(-\frac{\alpha}{2} + 1)}, \quad x > 0, \quad (9)$$

si y sólo si vale la siguiente restricción para los datos del problema:

$$\frac{\nu_\alpha \sigma \rho l \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}{q_0 \Gamma(-\frac{\alpha}{2} + 1)} < 1. \quad (10)$$

Prueba. Mediante algunos cálculos elementales se puede ver que c y k constituyen una solución del sistema de ecuaciones (5) si y sólo si están dados por (8), siendo el parámetro ξ una solución de la ecuación (9). Como la función de Mainardi $M_{\frac{\alpha}{2}}$ es una función estrictamente decreciente de $\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2}+1)}$ a 0 en $\mathbb{R}^+$ [6], se tiene que la ecuación (9) admite una solución si y sólo si su lado derecho está entre 0 y $\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2}+1)}$. Esto último es equivalente a decir que la desigualdad (10) vale, lo cual, junto con el Teorema 1, completa la demostración del teorema. $\square$

Remark 1 Cuando $\alpha = 1$, la derivada temporal fraccionaria de orden α en el sentido de Caputo de una función coincide con su derivada temporal clásica. Luego, si se permite que α valga 1 en el problema (1), se obtiene el problema inverso de Stefan a una fase clásico estudiado en [11].

Mediante el uso de las propiedades de las funciones de Wright y de Mainardi cuando $\alpha \rightarrow 1^-$, se puede demostrar que los resultados del Teorema 2 coinciden con los dados en [11] cuando $\alpha \rightarrow 1^-$.

De acuerdo con la interpretación física dada en [16], cuando α incrementa su valor hacia 1, la capacidad de retención de memoria del sistema disminuye hasta el caso límite de ausencia de memoria. En este contexto, era esperable que los resultados presentados aquí converjan a los dados en [11] para la formulación clásica del problema.

Remark 2 Resultados análogos a los del Teorema 2 se obtienen para la determinación simultánea de otros dos coeficientes térmicos desconocidos elegidos entre k , ρ , l y c .

CONCLUSIONES

En este artículo se ha considerado un material de cambio de fase unidimensional semi-infinito con calor específico y conductividad térmica constantes y desconocidos. Estos coeficientes térmicos fueron determinados a través de un problema inverso de Stefan fraccionario en el tiempo a una fase con una sobrecondición en la frontera fija y una evolución conocida para la interfase. Para representar la capacidad de memoria del sistema se consideró una derivada temporal fraccionaria de orden α , con $0 < \alpha < 1$, en el sentido de Caputo. Se obtuvieron fórmulas explícitas para una temperatura de tipo similaridad y para los coeficientes térmicos desconocidos bajo la hipótesis de que los datos verifiquen una restricción. Finalmente, se observó que el modelo fraccionario generaliza al clásico.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Proyecto PIP Nro. 0534 de CONICET-UA (Rosario, Argentina) y AFOSR-SOARD Grant FA 9550-14-1-0122. Los autores agradecen a los revisores por los oportunos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] A. N. CERETANI AND D. A. TARZIA. *Determination of one unknown thermal coefficient through a mushy zone model with a convective overspecified boundary condition*. Mathematical Problems in Engineering, 2015:8 pages, 2015.
- [2] A. N. CERETANI AND D. A. TARZIA. *Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through a mushy zone model with an overspecified convective boundary condition*. JP Journal of Heat and Mass Transfer, 13-2:277301, 2016.
- [3] J. HRISTOV. *Approximate solutions to fractional subdiffusion equations*. The European Physical Journal - Special Topics, 193:229243, 2011.
- [4] J. HRISTOV. *Starting radial subdiffusion from a central point through a diverging medium (a sphere). Heat-balance integral method*. Thermal Science, 15 - Suppl.1:S5S20, 2011.
- [5] F. KANCA AND M. ISMAILOV. *The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data*. Inverse Problems in Science and Engineering, 20:463476, 2012.
- [6] S. ROSCANI AND E. SANTILLAN MARCUS. *Two equivalent Stefans problems for the time-fractional-diffusion equation*. Fractional Calculus in Applied Analysis, 16-4:802815, 2013.
- [7] S. ROSCANI AND E. SANTILLAN MARCUS. *A new equivalence of Stefans problems for the time-fractional-diffusion equation*. Fractional Calculus in Applied Analysis, 17- 2:371381, 2014.
- [8] S. ROSCANI AND D. A. TARZIA. *A generalized Neumann solution for the two-phase fractional Lamé-Clapeyron-Stefan problem*. Advances in Mathematical Sciences and Applications, 24-2:237249, 2014.
- [9] L. RUBINSTEIN. *The Stefan problem*. American Mathematical Society, Providence, 1971.
- [10] D. A. TARZIA. *Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron- Stefan problem (or one-phase Stefan problem)*. Advances in Applied Mathematics, 3:7482, 1982.
- [11] D. A. TARZIA. *Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 26:11511157, 1983.
- [12] D. A. TARZIA. *Determination of unknown thermal coefficient of a semi-infinite material for the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon- Wilson-Alexiades mushy zone model*. International Communications in Heat and Mass Transfer, 14:219228, 1987.
- [13] D. A. TARZIA. *Determination of one unknown thermal coefficient through the one- phase fractional Lamé-Clapeyron-Stefan problem*. Applied Mathematics, 6:2128 2191, 2015.
- [14] V. R. VOLLER. *An exact solution of a limit case Stefan problem governed by a fractional diffusion equation*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 53:56225625, 2010.
- [15] V. R. VOLLER. *Fractional Stefan problems*. International Journal of Heat and Mass transfer, 74:269277, 2014.
- [16] V. R. VOLLER, F. FALCINI, AND R. GARRA. *Fractional Stefan problems exhibiting lumped and distributional latent-heat memory effects*. Physical Review, E 87:042401, 2013.