SOLUCIÓN DE SIMILARIDAD PARA UN PROBLEMA DE STEFAN UNIDIMENSIONAL A DOS FASES CON ZONA PASTOSA Y CONDICIÓN DE FRONTERA CONVECTIVA

Andrea N. Ceretani[†‡] y Domingo A. Tarzia[†]

[†]*CONICET - Facultad de Ciencias Empresariales, Univ. Austral, Paraguay 1950, Rosario, Argentina.*
[‡]*Facultad de Ciencias. Exactas, Ingeniería y Agrim., Univ. Nacional de Rosario, Pellegrini 250, Rosario, Argentina.* ,
aceretani@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: En este trabajo se considera un problema de solidificación a dos fases para un material unidimensional semi-infinito. Se supone que el proceso de cambio de fase se inicia a partir de la presencia de una temperatura constante en las cercanías de la frontera fija, lo cual se modela con una condición convectiva (condición de Robin). La interfase entre las regiones sólida y líquida se representa como una zona pastosa de acuerdo al modelo de Solomon, Wilson y Alexiades. Se presenta una solución explícita de tipo de similaridad que se obtiene cuando los datos verifican una cierta restricción. Se analiza, además, la relación con el problema con condición de temperatura en la frontera fija y se obtienen condiciones bajo las cuales ambos problemas resultan equivalentes.

Palabras clave: *Problema de Stefan, Soluciones explícitas, Soluciones de similaridad, Condición convectiva, Proceso de cambio de fase.*
2000 AMS Subject Classification: 26A33, 35C05, 35R11, 35R35, 80A22.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se considera un material homogéneo unidimensional semi-infinito que se encuentra bajo un proceso de solidificación a dos fases con una zona pastosa, es decir, con una región de *transición* entre las fases sólida y líquida. Un problema de este tipo fue estudiado en [1] utilizando condiciones de frontera de tipo Dirichlet o de flujo de temperatura. Aquí se sigue dicho trabajo para representar a la zona pastosa, el cual está inspirado en el modelo de Solomon, Wilson y Alexiades dado en [2] para un problema a una fase. Motivados por la relación entre los problemas de Stefan a dos fases sin zona pastosa con condiciones de frontera de tipo convectiva y de temperatura recientemente obtenida en [3], se considera aquí el siguiente problema de frontera libre:

$$\alpha_1\theta_{1_{xx}}(x,t) = \theta_{1_t}(x,t) \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \tag{1a}$$
$$\alpha_2\theta_{2_{xx}}(x,t) = \theta_{2_t}(x,t) \qquad x > r(t), \quad t > 0 \tag{1b}$$
$$s(0) = r(0) = 0 \tag{1c}$$
$$\theta_1(s(t),t) = \theta_2(r(t),t) = 0 \qquad t > 0 \tag{1d}$$
$$\theta_2(x,0) = \theta_2(+\infty,t) = \theta_0 \qquad x > 0, \quad t > 0 \tag{1e}$$
$$k_1\theta_{1_x}(s(t),t) - k_2\theta_{2_x}(r(t),t) = \rho l[\epsilon\dot{s}(t) - (1-\epsilon)\dot{r}(t)] \qquad t > 0 \tag{1f}$$
$$\theta_{1_x}(s(t),t)(r(t) - s(t)) = \gamma \qquad t > 0 \tag{1g}$$
$$k_1\theta_{1_x}(0,t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}\left(\theta_1(0,t) + D_\infty\right) \qquad t > 0 \tag{1h}$$

donde las incógnitas son las temperaturas θ_1, θ_2 de las regiones sólida y líquida, respectivamente, y las fronteras libres s, r de la zona pastosa que la separan de las regiones sólida y líquida, respectivamente. Los parámetros físicos que aparecen en (1) son: la densidad de masa, $\rho > 0$; la conductividad térmica, $k > 0$; el calor específico, $c > 0$; el calor latente por unidad de masa, $l > 0$; el coeficiente que caracteriza la cantidad de calor latente contenido en la zona pastosa, $0 < \epsilon < 1$; el coeficiente que caracteriza el ancho de la interfase, $\gamma > 0$; la temperatura inicial del material, $\theta_0 > 0$; la temperatura externa a la frontera fija $x = 0$, $-D_\infty < 0$; el coeficiente que caracteriza a la transferencia de calor en $x = 0$, $h_0 > 0$; y la difusividad térmica, $\alpha = \frac{k}{\rho c} > 0$. Los subíndices 1 y 2 hacen referencia a las fases sólida y líquida, respectivamente.

2. Existencia y unicidad de solución

A través del clásico método de Neumann, se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 1 *El problema de Stefan (1) admite la solución de similaridad θ_1, θ_2, s, r dada por:*

$$\theta_1(x,t) = -\frac{D_\infty \operatorname{erf}(\xi)}{\operatorname{erf}(\xi) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\pi\alpha_1}}}\left(1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\xi)}\right) \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \tag{2a}$$

$$\theta_2(x,t) = \frac{\theta_0 \operatorname{erf}(\mu)}{\operatorname{erfc}(\mu)}\left(\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\mu)} - 1\right) \qquad x > r(t), \quad t > 0 \tag{2b}$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha_1 t} \qquad t > 0 \tag{2c}$$

$$r(t) = 2\mu\sqrt{\alpha_2 t} \qquad t > 0 \tag{2d}$$

donde $\mu = \sqrt{\alpha_{12}}W(\xi)$, con $\alpha_{12} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ y W la función real definida por:

$$W(x) = x + \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D_\infty}\exp(x^2)\left(\operatorname{erf}(x) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\alpha_1\pi}}\right), \quad x > 0, \tag{3}$$

si y sólo si ξ es solución de la ecuación:

$$F(x) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1}G(x), \quad x > 0, \tag{4}$$

donde F y G son las funciones reales dadas por:

$$F(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\alpha_1\pi}}} - \frac{\theta_0\sqrt{k_2c_2}}{D_\infty\sqrt{k_1c_1}}\frac{\exp\left(-\alpha_{12}W^2(x)\right)}{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\alpha_{12}}W(x)\right)} \qquad x > 0 \tag{5a}$$

$$G(x) = x + \frac{(1-\epsilon)\gamma\sqrt{\pi}}{2D_\infty}\exp(x^2)\left(\operatorname{erf}(x) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\alpha_1\pi}}\right) \qquad x > 0. \tag{5b}$$

De esta manera, el problema de hallar una solución de similaridad para el problema (1) se reduce a estudiar la ecuación (4).

Lema 1

1. La función F dada por (5a) satisface:

$$F(0^+) = \frac{h_0\sqrt{\alpha_1\pi}}{k_1} - \frac{\theta_0\sqrt{k_2c_2}}{D_\infty\sqrt{k_1c_1}}\frac{\exp\left(\left(\frac{\gamma k_1}{2D_\infty h_0\sqrt{\alpha_2}}\right)^2\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma k_1}{2D_\infty h_0\sqrt{\alpha_2}}\right)}, \quad F(+\infty) = -\infty, \quad F'(x) < 0 \quad \forall\, x > 0 \tag{6}$$

2. La función G dada por (5b) satisface:

$$G(0^+) = \frac{(1-\epsilon)\gamma k_1}{2D_\infty h_0\sqrt{\alpha_1}}, \qquad G(+\infty) = +\infty, \qquad G'(x) > 0 \quad \forall\, x > 0. \tag{7}$$

Teorema 2 *La ecuación (4) admite una única solución positiva si y sólo si el coeficiente h_0 satisface la siguiente desigualdad:*

$$h_0 > h_0^\star, \tag{8}$$

con $h_0^\star$ definido por:

$$h_0^\star = \frac{\gamma k_1}{2D_\infty\eta\sqrt{\alpha_2}}, \tag{9}$$

$\eta = \eta\left(\frac{\gamma k_1}{\theta_0 k_2}, \frac{(1-\epsilon)l}{\theta_0 c_2}\right)$ *la única solución de la ecuación:*

$$H(x) = 0, \quad x > 0, \tag{10}$$

y H la función real definida por:

$$H(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)} - \frac{\gamma k_1\sqrt{\pi}}{2\theta_0 k_2}\frac{1}{x} + \frac{(1-\epsilon)l\sqrt{\pi}}{\theta_0 c_2}x, \quad x > 0. \tag{11}$$

Prueba. A partir de las propiedades de las funciones F y G dadas en el Lema 1, sigue que la ecuación (4) admite una única solución positiva si y sólo si $F(0^+) > \frac{l\sqrt{\pi}}{D_\infty c_1}G(0^+)$, es decir, si y sólo si:

$$H\left(\frac{\gamma k_1}{2D_\infty h_0\sqrt{\alpha_2}}\right) < 0. \tag{12}$$

Como la función H satisface $H(0^+) = -\infty$, $H(+\infty) = +\infty$ y $H'(x) > 0$ para $x > 0$, resulta que (12) vale si y sólo si:

$$0 < \frac{\gamma k_1}{2D_\infty h_0\sqrt{\alpha_2}} < \eta, \tag{13}$$

donde $\eta = \eta\left(\frac{\gamma k_1}{\theta_0 k_2}, \frac{(1-\epsilon)l}{\theta_0 c_2}\right)$ es la única solución positiva de la ecuación (10). Sólo resta observar que la desigualdad (13) es equivalente a (8). □

A partir de los Teoremas 1 y 2, se obtiene el principal resultado de esta sección:

Corolario 1 *El problema de Stefan (1) admite la solución de similaridad dada por (2) si y sólo si el coeficiente h_0 que caracteriza a la transferencia de calor en la frontera $x = 0$ satisface la desigualdad (8).*

Remark 1 *El Teorema 1 generaliza resultados presentados en [4] para un proceso de solidificación a una fase con una zona pastosa de acuerdo al modelo de Solomon, Wilson and Alexiades [2], y a los obtenidos en [3] para un proceso de solidificación a dos fases sin zona pastosa.*

3. Relación entre los problemas con condiciones convectiva y de temperatura en la frontera

Si se considera el problema (1) con h_0 tal que (8) vale, se sabe por el Corolario 1 que admite la solución de similaridad dada por (2), donde ξ es la única solución positiva de la ecuación (4). Como:

$$\theta_1(0,t) = -\frac{D_\infty \operatorname{erf}(\xi)}{\operatorname{erf}(\xi) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\pi\alpha_1}}},$$

se considera ahora el problema (1*) dado por (1a)-(1g) y la siguiente condición de temperatura en $x = 0$:

$$\theta_1(0,t) = -D_0, \quad t > 0 \qquad (D_0 > 0), \tag{1h*}$$

con D_0 definido como:

$$D_0 = \frac{D_\infty \operatorname{erf}(\xi)}{\operatorname{erf}(\xi) + \frac{k_1}{h_0\sqrt{\pi\alpha_1}}} > 0. \tag{14}$$

Este problema admite la solución de similaridad dada por [1]:

$$\theta_1^\star(x,t) = -D_0\left(1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\xi^\star)}\right) \qquad 0 < x < s^\star(t), \quad t > 0 \tag{15a}$$

$$\theta_2^\star(x,t) = \frac{\theta_0 \operatorname{erf}(\mu^\star)}{\operatorname{erfc}(\mu^\star)}\left(\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\mu^\star)} - 1\right) \qquad x > r^\star(t), \quad t > 0 \tag{15b}$$

$$s^\star(t) = 2\xi^\star\sqrt{\alpha_1 t} \qquad t > 0 \tag{15c}$$

$$r^\star(t) = 2\mu^*\sqrt{\alpha_2 t} \qquad t > 0 \tag{15d}$$

con $\mu^* = \sqrt{\alpha_{12}} W_0(\xi^\star)$ y $\xi^\star$ la única solución de la ecuación:

$$F_0(x) = \frac{l\sqrt{\pi}}{D_0 c_1} G_0(x), \quad x > 0 \tag{16}$$

siendo W_0, F_0, G_0 las funciones reales definidas por:

$$W_0(x) = x + \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D_0} \exp(x^2) \operatorname{erf}(x) \qquad x > 0 \tag{17a}$$

$$F_0(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)} - \frac{\theta_0\sqrt{k_2 c_2}}{D_0\sqrt{k_1 c_1}} \frac{\exp\left(-\alpha_{12} {W_0}^2(x)\right)}{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\alpha_{12}} W_0(x)\right)} \qquad x > 0 \tag{17b}$$

$$G_0(x) = x + \frac{(1-\epsilon)\gamma\sqrt{\pi}}{2D_0} \exp(x^2) \operatorname{erf}(x) \qquad x > 0. \tag{17c}$$

Teniendo en cuenta que ξ satisface (4), se puede demostrar que también resulta ser solución de (16). Luego, se tiene que $\xi = \xi^\star$, a partir de lo cual es fácil ver que $\mu = \mu^\star$, $\theta_1 = \theta_1^\star$ y $\theta_2 = \theta_2^\star$. Se tiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 3 *Si h_0 satisface la condición (8) entonces la solución de similaridad (2) del problema (1) coincide con la solución de similaridad (15) del problema (1*) cuando D_0 está dado por (14).*

Razonando de manera similar, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 4 *La solución de similaridad (15) del problema (1*) coincide con la solución (2) del problema (1) cuando se consideran $D_\infty > D_0$ y h_0 dado por:*

$$h_0 = \frac{k_1 D_0}{\sqrt{\pi\alpha_1}(D_\infty - D_0)\operatorname{erf}(\xi^\star)} > 0. \tag{18}$$

En el sentido establecido por los Teoremas 3 y 4, resulta que los problemas (1) y (1*) son equivalentes.

Conclusiones

En este artículo se consideró un proceso de solidificación a dos fases para un material unidimensional semi-infinito. Se supuso que el proceso de cambio de fase se inicia a partir de una temperatura constante presente en las cercanías de la frontera fija del material, lo cual se modeló mediante una condición convectiva. La interfase que separa las fases sólida y líquida se representó como una zona pastosa de acuerdo al modelo de Solomon, Wilson y Alexiades. Para el problema de Stefan resultante se obtuvo una solución explícita de tipo similaridad bajo la condición de que los datos del problema satisfagan una cierta restricción. Además, se analizó la relación entre los problemas con condiciones convectiva y de Dirichlet en la frontera fija y se establecieron condiciones bajo las cuales ambos problemas resultan equivalentes.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Proyecto PIP No. 0534 de CONICET-UA (Rosario, Argentina) y AFOSR-SOARD Grant FA 9550-14-1-0122. Los autores agradecen a los revisores por los oportunos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo.

Referencias

[1] D. A. Tarzia. *Neumann-like solution for the two-phase Stefan problem with a simple mushy zone model*. Computational and Applied Mathematics, 9-3:201211, 1990.

[2] A. D. Solomon, D. G. Wilson, and V. Alexiades. *A mushy zone model with an exact solution*. Letters in Heat and Mass Transfer, 9:319324, 1982.

[3] D. A. Tarzia. *Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions*. Thermal Science, 2015, OnLine First, DOI:10.2298/TSCI140607003T.

[4] D. A. Tarzia. *Explicit solutions for the Solomon-Wilson-Alexiades' mushy zone model with convective or heat flux boundary conditions*. Journal of Applied Mathematics, 2015 Art ID 375930:19, 2015.