

DETERMINACIÓN DE UN COEFICIENTE TÉRMICO EN UN PROCESO DE SOLIDIFICACIÓN CON ZONA PASTOSA GENERADO A PARTIR DE UNA SOBRECONDICIÓN CONVECTIVA EN LA FRONTERA FIJA

Andrea N. Ceretani y Domingo A. Tarzia

CONICET-Depto. Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, aceretani@austral.edu.ar; dtarzia@austral.edu.ar

Resumen: Se considera un material semi-infinito caracterizado por $x > 0$ que se encuentra inicialmente en su fase líquida a temperatura de fusión y que se somete a un flujo de calor en la frontera $x = 0$, a partir de lo cual se inicia un proceso de solidificación con presencia de una zona pastosa. Se impone una sobrecondición convectiva en $x = 0$ con el objetivo de determinar simultáneamente el coeficiente ξ que caracteriza a una de las fronteras libres que definen la zona pastosa y uno de los coeficientes térmicos elegidos entre l (calor latente por unidad de masa), k (conductividad térmica), ρ (densidad de masa), c (calor específico), ϵ ó γ (coeficientes que caracterizan a la zona pastosa), lo cual conduce al estudio de seis casos diferentes. Se presenta el estudio de dos de los casos, acompañado por fórmulas explícitas para los coeficientes desconocidos.

Palabras clave: *Cambio de fase, Condición convectiva, Problema de Lamé-Clapeyron-Stefan, Zona pastosa, Modelo de Solomon-Wilson-Alexiades*

2000 AMS Subject Classification: 35R35 - 35C06 - 80A22

1. EL PROBLEMA

En este trabajo se considera un material semi-infinito caracterizado por $x > 0$ que inicialmente se encuentra en su fase líquida a su temperatura de fusión, a la cual sin perder generalidad se considera igual a 0°C . En el instante $t = 0$ se impone una condición de flujo en $x = 0$, a partir de lo cual comienza un proceso de solidificación con la presencia de las siguientes tres regiones [1, 2]:

1. región líquida a temperatura $T(x, t) = 0$: $D_l = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / x > r(t), t > 0\}$,
2. región sólida a temperatura $T(x, t) < 0$: $D_s = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < s(t), t > 0\}$,
3. región pastosa a temperatura $T(x, t) = 0$: $D_p = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / s(t) < x < r(t), t > 0\}$,

siendo s y r las funciones que caracterizan a las fronteras libres de la región pastosa. A esta última se la considera isotérmica y se establecen las siguientes hipótesis sobre su estructura:

1. el material contiene una fracción fija ϵl del calor latente total $l > 0$, con $0 < \epsilon < 1$, es decir:

$$kT_x(s(t), t) = \rho l[\epsilon \dot{s}(t) + (1 - \epsilon)\dot{r}(t)], \quad t > 0,$$

siendo $k > 0$ la conductividad térmica y $\rho > 0$ la densidad de masa del material,

2. su ancho es inversamente proporcional al gradiente de temperatura, es decir:

$$T_x(s(t), t)(r(t) - s(t)) = \gamma, \quad t > 0$$

con $\gamma > 0$.

Motivados por los recientes trabajos [3, 4] y con el objetivo de determinar la temperatura $T = T(x, t)$, las fronteras libres $x = r(t)$ y $x = s(t)$, y uno de los coeficientes térmicos elegido entre l (calor latente por unidad de masa), k (conductividad térmica), ρ (densidad de masa), c (calor específico), ϵ y γ (coeficientes

que caracterizan a la zona pastosa), se impone también una sobrecondición de tipo convectiva en $x = 0$ (ver condición (7) más abajo), resultando el siguiente problema de frontera libre:

$$\rho c T_t(x, t) - k T_{xx}(x, t) = 0 \quad 0 < x < s(t), t > 0 \quad (1)$$

$$T(s(t), t) = 0 \quad t > 0 \quad (2)$$

$$k T_x(s(t), t) = \rho l [\epsilon \dot{s}(t) + (1 - \epsilon) \dot{r}(t)] \quad t > 0 \quad (3)$$

$$T_x(s(t), t)(r(t) - s(t)) = \gamma \quad t > 0 \quad (4)$$

$$r(0) = s(0) = 0 \quad (5)$$

$$k T_x(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} \quad t > 0 \quad (6)$$

$$k T_x(0, t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}} (T(0, t) + D_\infty) \quad t > 0 \quad (7)$$

donde $q_0 > 0$ y $h_0 > 0$ son, respectivamente, los coeficientes que caracterizan el flujo y la transferencia de calor en $x = 0$ y $-D_\infty < 0$ es la temperatura externa en $x = 0$, estando dichos parámetros calculados experimentalmente.

La solución de este problema está dada por [1, 2, 4]:

$$T(x, t) = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad 0 < x < s(t), t > 0 \quad (8)$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha t} \quad t > 0 \quad (9)$$

$$r(t) = 2\mu\sqrt{\alpha t} \quad t > 0 \quad (10)$$

donde A , B , ξ y μ son coeficientes a determinar y $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ (coeficiente de difusión térmica), a partir de lo cual se obtiene que:

$$A = -\frac{q_0\sqrt{\pi\alpha}}{k} \operatorname{erf}(\xi), \quad B = \frac{q_0\sqrt{\pi\alpha}}{k}, \quad \mu = \xi + \frac{\gamma k \exp(\xi^2)}{2q_0\sqrt{\alpha}}, \quad (11)$$

con lo cual la solución del problema (1)-(7) queda expresada como:

$$T(x, t) = \frac{q_0\sqrt{\pi\alpha}}{k} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \operatorname{erf}(\xi) \right] \quad 0 < x < s(t), t > 0 \quad (12)$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha t} \quad t > 0, \quad (13)$$

$$r(t) = 2 \left[\xi + \frac{\gamma k \exp(\xi^2)}{2q_0\sqrt{\alpha}} \right] \sqrt{\alpha t} \quad t > 0 \quad (14)$$

y que los coeficientes a determinar en el problema deben satisfacer las siguientes dos ecuaciones:

$$\left(\xi + \frac{(1 - \epsilon)\gamma k \exp(\xi^2)}{2q_0\sqrt{\alpha}} \right) \exp(\xi^2) = \frac{q_0}{\rho l \sqrt{\alpha}} \quad (15)$$

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{k D_\infty}{q_0 \sqrt{\pi \alpha}} \left(1 - \frac{q_0}{h_0 D_\infty} \right) \quad (16)$$

Como los coeficientes a determinar son ξ y uno de los coeficientes térmicos elegido entre l , γ , ϵ , k , ρ y c , surgen los siguientes seis problemas:

Caso 1: Determinar ξ y l

Caso 2: Determinar ξ y γ

Caso 3: Determinar ξ y ϵ

Caso 4: Determinar ξ y k

Caso 5: Determinar ξ y ρ

Caso 6: Determinar ξ y c .

2. RESULTADOS

A continuación, se presenta el estudio de los Casos 2 y 4.

Teorema 1 (Caso 2: determinación de ξ y γ) Si se considera el problema (1)-(7) con el coeficiente γ desconocido, entonces la solución está dada por (12)-(14) con ξ y γ dados por:

$$\xi = \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{kD_{\infty}}{q_0\sqrt{\pi\alpha}} \left(1 - \frac{q_0}{h_0D_{\infty}} \right) \right) > 0 \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{2q_0\sqrt{\alpha}}{k(1-\epsilon)} \left(\frac{q_0}{\rho l\sqrt{\alpha}} - \xi \exp(\xi^2) \right) > 0 \quad (18)$$

si y sólo si los parámetros restantes q_0 , h_0 , D_{∞} , l , ϵ , k , ρ y c satisfacen las siguientes desigualdades:

$$1 - \frac{q_0}{h_0D_{\infty}} > 0 \quad (19)$$

$$\frac{kD_{\infty}}{q_0\sqrt{\pi\alpha}} \left(1 - \frac{q_0}{h_0D_{\infty}} \right) < 1 \quad (20)$$

$$f \left(\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{kD_{\infty}}{q_0\sqrt{\pi\alpha}} \left(1 - \frac{q_0}{h_0D_{\infty}} \right) \right) \right) < \frac{q_0}{\rho l\sqrt{\alpha}} \quad (21)$$

siendo f la función definida por:

$$f(x) = x \exp(x^2), \quad x > 0. \quad (22)$$

Prueba. Por una lado, se observa que en la ecuación (16) sólo aparece una de las incógnitas, ξ . Debido a las propiedades de la función de error, sigue que la ecuación (16) admite una solución positiva ξ si y sólo si

$$0 < \frac{kD_{\infty}}{q_0\sqrt{\pi\alpha}} \left(1 - \frac{q_0}{h_0D_{\infty}} \right) < 1, \quad (23)$$

es decir, si valen (19) y (20). Más aún, cuando se verifican (19) y (20), se tiene que la única solución de (16) está dada por (17).

Por otro lado, despejando γ en función de ξ a partir de (16), se tiene que γ está dado por (18). Se debe notar que este coeficiente es positivo si y sólo si

$$\frac{q_0}{\rho l\sqrt{\alpha}} - \xi \exp(\xi^2) > 0 \quad (24)$$

Sea f la función definida por (22). Como f es creciente en $\mathbb{R}^+$, $f(0^+) = 0$ y $f(+\infty) = +\infty$, sigue que (24) se verifica si y sólo si

$$f(\xi) < \frac{q_0}{\rho l\sqrt{\alpha}} \quad (25)$$

es decir, si y sólo si vale la condición (21). $\square$

Teorema 2 (Caso 4: determinación de ξ y k) Si se considera el problema (1)-(7) con el coeficiente k desconocido, entonces la solución está dada por (12)-(14) con ξ y k dados por:

$$k = \frac{q_0^2 \pi \operatorname{erf}^2(\xi)}{\rho c D_{\infty}^2 \left(1 - \frac{q_0}{h_0 D_{\infty}} \right)^2} > 0 \quad (26)$$

y $\xi > 0$ como la única solución de la ecuación

$$g(x) = \frac{cD_{\infty}}{l\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{q_0}{h_0D_{\infty}} \right), \quad x > 0, \quad (27)$$

si y sólo si los parámetros restantes q_0 , h_0 , D_∞ , l , γ , ϵ , ρ y c satisfacen la condición (19), siendo g la función definida por:

$$g(x) = \left(x + \frac{\gamma\sqrt{\pi}(1-\epsilon)}{2D_\infty \left(1 - \frac{q_0}{h_0 D_\infty}\right)} \right) \operatorname{erf}(x) \exp(x^2), \quad x > 0. \quad (28)$$

Prueba. En primer lugar, se observa que (19) es una condición necesaria para que (16) admita una solución positiva ξ .

Despejando k en función de ξ a partir de (16), sigue que k queda dado por (26). Se observa que k es positivo para ξ positivo. Reemplazando la expresión del parámetro k dada en (26) en (16), se obtiene la ecuación para ξ dada en (27), ya que:

$$g(\xi) = \frac{cD_\infty}{l\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{q_0}{h_0 D_\infty} \right). \quad (29)$$

Asumiendo que vale (19), sigue que g es una función creciente en $\mathbb{R}^+$ y que $g(+\infty) = +\infty$. Además, $g(0^+) = 0$. Luego, (19) es una condición necesaria y suficiente para que la ecuación dada en (27) admita una única solución positiva ξ . $\square$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por los Proyectos PIP N° 0534 de CONICET - Universidad Austral, Rosario, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA 9550-14-1-0122.

REFERENCIAS

- [1] A. D. SOLOMON, D.G. WILSON, AND V. ALEXIADES, *A mushy zone model with an exact solution*, Letters Heat Mass Transfer, 9 (1982), pp.319-324.
- [2] D. A. TARZIA, *Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lam-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades mushy zone model*, International Communications in Heat and Mass Transfer, 14 (1987), pp.219-228.
- [3] D. A. TARZIA, *Relationship between Neumann solutions for two-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problems with convective and temperature boundary conditions*, Thermal Science, Accepted, In Press.
- [4] D. A. TARZIA, *Explicit solutions for the Solomon-Wilson-Alexiades's mushy zone model with convective or heat flux boundary conditions*. To appear.