MACI 4 (2013) 489-492 G. La Mura, D. Rubio, E. Serrano (Eds.)

SOLUCIÓN DE SIMILARIDAD EN PROCESOS DE DESCONGELAMIENTO EN UN MEDIO POROSO CON CONDICIÓN CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO

Ceretani, Andrea N.† y Tarzia, Domingo A.‡

†*CIFASIS, Blvd. 27 de Febrero 201 bis, S2000EZP Rosario, Argentina, ceretani@cifasis-conicet.gov.ar*
‡*CONICET-Depto. Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, dtarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se estudian soluciones de similaridad para un modelo de descongelamiento en un medio poroso saturado, cuando el cambio de fase induce un salto de densidad y se considera una condición de flujo de tipo $\frac{h_0}{\sqrt{t}}(u(0,t)-B)$ en el borde fijo $x=0$. Se analizan diferentes casos, dependiendo del signo de tres parámetros físicos adimensionales.

Palabras clave: *problema de Stefan, problemas de frontera libre, procesos de cambio de fase, solución de similaridad, salto de densidad, procesos de descongelamiento*
2000 AMS Subject Classification: 35R35 - 35C06 - 80A22

1. INTRODUCCIÓN

Se considera el problema de descongelamiento de un medio poroso parcialmente congelado saturado con un fluido incompresible, con el objetivo de construir soluciones de tipo similaridad. Una descripción detallada del problema físico puede encontrarse en [1, 2, 4, 6, 7]. Más específicamente, se supone que:

1. existe una interfase simple entre las partes congelada y no-congelada;
2. la fase congelada está en reposo respecto de la estructura porosa, a la cual se la considera indeformable;
3. hay un suministro constante de líquido para mantener saturado al medio (debido al salto de densidad entre las fases sólida y líquida, que ocasiona un movimiento de líquido en la región no-congelada).

Se estudia un modelo unidimensional donde las incógnitas son las funciones $x=s(t)$: frontera libre que separa $Q_1=\{(x,t):0<x<s(t),t>0\}$ (fase líquida) y $Q_2=\{(x,t):x>s(t),t>0\}$ (fase sólida), definida para $t>0$; $u(x,t)$: temperatura de la región no-congelada, definida en Q_1 y $v(x,t)$: temperatura de la región congelada, definida en Q_2. En [3] y [5] se obtienen soluciones de tipo similaridad cuando se impone una condición de temperatura y de flujo de calor en el borde fijo, respectivamente. En este trabajo se considera una condición convectiva en el borde fijo del tipo (1.7). Además de los requerimientos básicos de regularidad, estas tres funciones deben satisfacer las siguientes condiciones diferenciales, de contorno e iniciales:

$$u_t = a_1 u_{xx} - b\rho\dot{s}(t)u_x \qquad 0<x<s(t) \qquad t>0 \tag{1.1}$$
$$v_t = a_2 v_{xx} \qquad x>s(t) \qquad t>0 \tag{1.2}$$
$$u(s(t),t) = v(s(t),t) = d\rho s(t)\dot{s}(t) \qquad t>0 \tag{1.3}$$
$$k_F v_x(s(t),t) - k_U u_x(s(t),t) = \alpha\dot{s}(t) + \beta\rho s(t)(\dot{s}(t))^2 \qquad t>0 \tag{1.4}$$
$$v(x,0) = v(+\infty,t) = -A \qquad x>0 \qquad t>0 \tag{1.5}$$
$$s(0)=0 \tag{1.6}$$
$$k_U u_x(0,t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}(u(0,t)-B) \tag{1.7}$$

con:

$$a_1=\alpha_1^2=\frac{k_U}{\rho_U c_U}, \qquad a_2=\alpha_2^2=\frac{k_F}{\rho_F c_F}, \qquad b=\frac{\epsilon\rho_W c_W}{\rho_U c_U}, \qquad d=\frac{\epsilon\gamma\mu}{K},$$

$$\rho = \frac{\rho_W - \rho_I}{\rho_W}, \qquad \alpha = \epsilon \rho_I l, \qquad \beta = \frac{\epsilon^2 \rho_I (c_W - c_I)\gamma\mu}{K} = \epsilon d \rho_I (c_W - c_I).$$

donde:

ϵ: porosidad; ρ_W y ρ_I: densidad del agua y del hielo; c: calor específico a densidad constante; k_F y k_U: conductividad de las zonas congelada y no-congelada, respectivamente; $u = v = 0$: punto de fusión a presión atmosférica; l: calor latente en $u = 0$; γ: coeficiente en la ley de Clausius-Clapeyron; $\mu > 0$: viscosidad del líquido; $K > 0$: permeabilidad hidráulica; $B > 0$: temperatura externa en el borde fijo $x = 0$; $-A < 0$: temperatura inicial; $h_0 > 0$: coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo $x = 0$.

2. Soluciones de tipo similaridad

Siguiendo los métodos introducidos en [3, 5, 8, 9], se puede demostrar que:

Teorema 1 *El problema de frontera libre (1.1)-(1.7) admite la solución de similaridad:*

$$s(t) = 2\xi\alpha_1\sqrt{t} \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = \frac{Bg(p,\xi) + \frac{mk_U}{2h_0\alpha_1}\xi^2 + (m\xi^2 - B)\int_0^{\frac{x}{2\alpha_1\sqrt{t}}} exp(-r^2 + pr\xi)\,dr}{g(p,\xi) + \frac{k_U}{2h_0\alpha_1}} \tag{2.2}$$

$$v(x,t) = \frac{m\xi^2 + A\,erf(\gamma_0\xi) - (A + m\xi^2)\,erf\left(\frac{x}{2\alpha_2\sqrt{t}}\right)}{erfc(\gamma_0\xi)} \tag{2.3}$$

sí, y sólo si, el coeficiente adimensional $\xi > 0$ satisface la ecuación:

$$\delta_1\left(1 - \frac{AM}{B}y^3\right)G_1(p,y) - \delta_2 G_2(M,y) = y + Ny^3, \qquad y > 0 \tag{2.4}$$

con tres parámetros adimensionales N, M y p dados por:

$$N = \frac{2\beta\rho\alpha_1^2}{\alpha} \in \mathbb{R}, \qquad M = \frac{2d\rho\alpha_1^2}{A} = \frac{m}{A} \in \mathbb{R}, \qquad p = 2b\rho \in \mathbb{R},$$

siendo:

$$\delta_1 = \frac{k_U B}{2\alpha\alpha_1^2} > 0, \qquad \delta_2 = \frac{k_F A}{\alpha\alpha_1\alpha_2\sqrt{\pi}} > 0, \qquad K_0 = \frac{k_U}{2\alpha_1 h_0} > 0, \qquad \gamma_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0,$$

$$g(p,y) = \int_0^y exp(-r^2 + pry)\,dr, \quad G_1(p,y) = \frac{exp((p-1)y^2)}{K_0 + g(p,y)}, \quad G_2(M,y) = (1 + My)\frac{exp(-\gamma_0^2 y^2)}{erfc(\gamma_0 y)}.$$

3. Resultados preliminares

Con el objetivo de analizar la ecuación (2.4), en esta sección se presentan propiedades de las funciones involucradas en la misma. Las demostraciones se basan en cálculos básicos que no se reproducen aquí.

Lema 1 *Cualquiera sea $p \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lim_{y\to 0^+} G_1(p,y) = \frac{1}{K_0} > 0$. Además, para valores positivos de p se tiene:*

1. $\lim_{y\to+\infty} G_1(p,y) = \begin{cases} 0 & p < 2 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} & p = 2 \\ +\infty & p > 2 \end{cases}$, *2.* $\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{G_1(p,y)} = \frac{1}{p-2} \qquad p > 2,$

3. $\lim_{y\to+\infty} y^2 G_1(p,y) = \begin{cases} +\infty & p \geq 2 \\ 0 & p < 2 \end{cases}$, *4.* $\frac{\partial G_1}{\partial y}(p,y) < 0$ *para todo* $y > 0$ *y* $p \leq 1$, *y para valores negativos de p se tiene:*

5. $\frac{\partial G_1}{\partial y}(p, y) < 0$ *para todo* $y > 0$,

6. $\lim_{y\to+\infty} y^2 G_1(p, y) = 0.$

Lema 2 *1. Si* $M > 0$ *entonces* G_2 *crece desde 1 a* $+\infty$ *cuando y crece desde 0 a* $+\infty$.

2. Si $M < 0$ *entonces* G_2 *crece desde 1 hasta un máximo positivo y luego decrece a* $-\infty$*, cuando y crece desde 0 a* $+\infty$.

En ambos casos, $G_2(M, y) \simeq \gamma_0 M\sqrt{\pi}y^3$.

Lema 3 *Cualesquiera sean* $M \in \mathbb{R}$ *y* $p \in \mathbb{R}$*, se tiene que* $\lim_{y\to 0^+} J(M, p, y) = \dfrac{1}{K_0}$*, donde* $J(M, p, y) = \left(1 - \frac{AM}{B}y^2\right) G_1(p, y)$ *para cada* $y > 0$*. Además:*

1. *si* $M > 0$ *entonces* $J(M, p, y_0) = 0$ *y* $J(M, p, y) < 0$ *para todo* $y > y_0$*, siendo* $y_0 = \sqrt{B/AM} > 0$,
2. *si* $p < 2$ *entonces* $\lim_{y\to+\infty} J(M, p, y) = 0$,
3. *si* $p \geq 2$ *entonces* $\lim_{y\to+\infty} J(M, p, y) = \begin{cases} -\infty & M > 0 \\ +\infty & M < 0 \end{cases}$ *y* $J(M, p, y) \simeq \begin{cases} -\frac{2AM}{B\sqrt{\pi}}y^2 & p = 2 \\ -\frac{AM(p-2)}{B}y^3 & p > 2 \end{cases}$.

4. Existencia y unicidad de soluciones de tipo similaridad

Teorema 2 *Si* $M > 0$ *y* $N \geq 0$ *entonces:*

1. *Si* $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K \rho_F c_F}} > 1$ *se tiene que la ecuación (2.4) admite al menos una solución* $\xi \in (0, y_0)$.
2. *Si* $p \leq 1$*, se tiene que la ecuación (2.4) admite una única solución* $\xi > 0$ *sí y sólo si* $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K \rho_F c_F}} > 1$.

Prueba.

1. Teniendo en cuenta que $\lim_{y\to 0^+}[\delta_1 J(M, p, y) - \delta_2 G_2(M, p)] = \dfrac{\delta_1}{K_0} - \delta_2$, $\lim_{y\to+\infty}[\delta_1 J(M, p, y) - \delta_2 G_2(M, p)] = -\infty$ y que $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K \rho_F c_F}} > 1$ es equivalente a $\frac{\delta_1}{K_0} - \delta_2 > 0$, se tiene que la ecuación (2.4) admite al menos una solución positiva. Más aún, como $\frac{\delta_1}{K_0} > \delta_2$, $\lim_{y\to+\infty} \delta_1 J(M, p, y) = -\infty$ y $\lim_{y\to+\infty} \delta_2 G(M, y) = +\infty$ implica que el lado izquierdo de (2.4) admite ceros positivos $q_1 < q_2 <$ ..., entonces puede hallarse una solución $\xi \in (0, q_1)$. Sólo resta notar que cada q_k satisface $q_k < y_0$.
2. Basta observar que si $p \leq 1$, el lado izquierdo de (2.4) es estrictamente decreciente en $(0, y_0)$ (puesto que $\frac{\partial J}{\partial y}(M, p, y) < 0$ en $(0, y_0)$ y G_2 es estrictamente creciente) y el lado derecho es esctrictamente creciente.

□

Teorema 3 *Si* $M > 0$ *y* $N < 0$ *entonces, si* $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K \rho_F c_F}} > 1$ *y* $\frac{AM}{B|N|} > 1$ *se tiene que la ecuación (2.4) admite al menos una solución* $\xi \in (0, y_0)$.

Prueba. Similar a la dada para Teor. 2 (1). En este caso hay que notar que el lado derecho de (2.4) es positivo en $(0, \sqrt{1/|N|})$ y que la condición $\frac{AM}{B|N|} > 1$ es equivalente a $y_0 < \sqrt{1/|N|}$. □

Teorema 4 *Si* $M < 0$ *y* $N \geq 0$ *se obtiene:*

1. *Si* $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K \rho_F c_F}} > 1$*, el lado izquierdo de (2.4) admite ceros positivos siendo* q_1 *el menor de ellos, entonces se tiene que la ecuación (2.4) admite al menos una solución* $\xi \in (0, q_1)$.

2. *Si* $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K\rho_F c_F}} \leq 1$ *y* $N < \delta_2\sqrt{\pi}|M|\gamma_0$, *se tiene que la ecuación (2.4) admite al menos una solución* $\xi > 0$.

Prueba. Basta notar que $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K\rho_F c_F}} \leq 1$ equivale a $\lim_{y\to 0^+}[\delta_1 J(M,p,y) - \delta_2 G_2(M,p)] < 0$ y que la condición $N < \delta_2\sqrt{\pi}|M|\gamma_0$ implica que el lado izquierdo de (2.4) tiende a $+\infty$ más rápidamente que el lado derecho, cuando y tiende a $+\infty$. □

Teorema 5 *Si* $M < 0$ *y* $N < 0$ *se obtiene:*

1. *Si* $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K\rho_F c_F}} > 1$, *el lado izquierdo de la ecuación (2.4) admite ceros positivos siendo* q_1 *el menor de ellos el cual satisface:*

   a) $q_1 < \sqrt{1/|N|}$, *se tiene que la ecuación (2.4) admite al menos dos soluciones positivas y una de ellas satisface* $\xi \in (0, \sqrt{1/|N|})$.

   b) $q_1 = \sqrt{1/|N|}$, *se tiene que la ecuación (2.4) admite* $\xi = q_1$ *como solución.*

2. *Si* $\frac{Bh_0\sqrt{\pi}}{A\sqrt{k_K\rho_F c_F}} < 1$, *se tiene que la ecuación (2.4) admite al menos una solución* $\xi > 0$.

Prueba.

1. Basta observar que $\lim_{y\to 0^+}[\delta_1 J(M,p,y) - \delta_2 G_2(M,p)] = +\infty$ y que el lado derecho de (2.4) es positivo en $(0, \sqrt{1/|N|})$ y nulo para $y = \sqrt{1/|N|}$.

2. Sigue de $\lim_{y\to 0^+}[\delta_1 J(M,p,y) - \delta_2 G_2(M,p)] < 0 = \lim_{y\to 0^+}[y + Ny^3]$, $\lim_{y\to +\infty}[\delta_1 J(M,p,y) - \delta_2 G_2(M,p)] = +\infty$ y $\lim_{y\to +\infty}[y + Ny^3] = -\infty$.

□

Nota 1 *Los resultados anteriores implican que, bajo las condiciones especificadas en cada caso, es posible hallar una solución de tipo similaridad del problema (1.1)-(1.7) que garantiza un cambio de fase, es decir, tal que* $m\xi^2 < u(0,t) < B$.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los proyectos PIP No. 0460 del CONICET-Univ. Austral y AFOSR-SOARD Grant FA9550-10-1-0023.

REFERENCIAS

[1] CH. CHARACH, AND I. RUBINSTEIN, *Pressure-temperature effects in planar Stefan problems with density change*, J. Appl. Phys., 71 (1992), pp.1128-1137.

[2] A. FASANO, Z. GUAN, M. PRIMICERIO, I. RUBINSTEIN, *Thawing in saturated porous media*, Mecanica, 28 (1993), pp. 103-109.

[3] A. FASANO, M. PRIMICERIO, D. TARZIA, *Similarity solutions in a class of thawing processes*, Math. Models Meth. Appl. Sci., 9 (1999), pp. 1-10.

[4] Y. NAKANO, *Quasi-steady problems in freezing soils. I. Analysis on the steady growth of an ice layer*, Cold. Reg. Sci. Tech., 17 (1990), pp.207-226.

[5] A. LOMBARDI, AND D. TARZIA, *Similarity solution for a thawing processes with a heat flux condition at the fixed boundary*, Mecanica, 36 (2002), pp. 251-264.

[6] K. O'NEILL, AND R.D. MILLER, *Exploration of a rigid ice model of frost heave*, Water Resor. Res., 21 (1985), 281-296.

[7] F. TALAMUCCI, *Analysis of the coupled heat-mass transport in freezing porous media*, Survey Math. Indust., 7 (1997), pp. 93-139.

[8] D. TARZIA, *Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional*, Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, 12 (1984), pp. 5-7.

[9] D. TARZIA, *Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface*, In Advanced Topics in Mass Transfer, Mohamed El-Amin (Ed.), InTech Open Access Publisher, Rijeka (2011), Chapter 20, 439-484. Available from:
http://www.intechopen.com/articles/show/title/explicit-and-approximated-solutions-for-heat-and-mass-transfer-problems-with-a-moving-interface