DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS A TRAVES DE MODELOS APROXIMADOS DE CAMBIO DE FASE

H.Castellini,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Pellegrini 250, 2000 Rosario.
D.A.Tarzia,
Depatamento de Matemáticas, Universidad Austral, Moreno 1056, 2000 Rosario y PROMAR (CONICET y Universidad de Rosario), Pellegrini 250, 2000 Rosario.

Se considera un cuerpo semi-infinito en su fase sólida a la temperatura 0°C (mediante una traslación de temperatura, el análisis realizado sigue siendo válido para cualquier temperatura de cambio de fase θ_f) al cual se le impone una temperatura constante $\theta(0,t)=\theta_0 > 0$ en el borde fijo $x = 0$ para $t > 0$, con lo cual se produce un proceso de fusión.

Si se considera una sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$ del material de cambio de fase, de la forma $k\ \theta_x(0.t) = - h_0 / t^{1/2}$ ($t>0$) o de la forma $\theta_x(0,t) = - H_0 / t^{1/2}$ ($t > 0$), entonces se pueden determinar fórmulas analíticas para los coeficientes térmicos desconocidos de la fase líquida del material (en forma análoga, a través de un proceso de solidificación, se pueden determinar los coeficientes térmicos desconocidos de la fase sólida del material).

En el presente trabajo, se utilizan modelos aproximados para el proceso de cambio de fase (método cuasi-estacionario, método del balance integral calórico, método variacional) que incluye una combinación lineal convexa (con parámetro $0<\lambda<1$, a determinar) de soluciones aproximadas de primer y segundo orden en la variable espacial x.

INTRODUCCION

En este trabajo, se utilizan modelos aproximados para el proceso de cambio de fase (método cuasi-estacionario [1], método del balance integral calórico [2], método variacional [3] que incluye una combinación lineal convexa (con parámetro $0<\lambda<1$, a determinar, variante que difiere de la presentada en [4] de soluciones aproximadas de primer y segundo orden en la variable espacial x, para la determinación de coeficientes térmicos desconocidos de la fase líquida del material semi-infinito [5,6], según los siguientes casos:

(i) Conocido experimentalmente θ_0 y $s(t)= 2\sigma t^{1/2}$ (con $\sigma>0$ dado) y no considerando la sobre-condición (6) (ver sección siguiente), se determinan los siguientes coeficientes térmicos desconocidos en función de θ_0, σ y otros datos del problema:

(1) k ; (2) ρ ;(3) c ; (4) L .

(ii) Conocido experimentalmente θ_0 y h_0 se determinan $s(t) = 2\sigma t^{1/2}$ (con $\sigma > 0$ incógnita) y los siguientes coeficientes térmicos desconocidos en función de θ_0, h_0 y otros datos del problema:

(1) k, σ; (2) ρ , σ ; (3) c , σ ; (4) L. σ .

El coeficiente $h_0 > 0$ caracteriza el flujo de calor en el borde fijo del material semiinfinito y debe ser determinado experimentalmente como así también la temperatura $\theta_0 > 0$.

CONDICIONES QUE RIGEN EL PROCESO EVOLUTIVO

Se se considera un broblema de cambio de fase (fusión) de un material unidimensional, semi-infinito, que está sometido en el borde fijo $x = 0$ a un foco térmico de θ_0 grados por encima del punto de fusión del material. Inicialmente, la fase sólida se encuentra a la temperatura de fusión, que por conveniencia se asume de 0 grados. Si se simboliza con $\theta(x,t)$ la temperatura de la fase líquida, entonces se puede plantear el siguiente problema:

(1) $\rho\ c\ \theta_t - k\ \theta_{xx} = 0\ ,\ 0 < x < s(t)\ ,\ t > 0\ ,$

(2) $\theta(0,t) = \theta_0 > 0\ ,\ t > 0\ ,$

(3) $\theta(s(t),t) = 0\ ,\ t > 0\ ,$

$$(4)\ k\ \theta_x\ (s(t),t) = -\rho\ L\ \dot{s}(t)\ ,\ t > 0\ ,$$

$$(5)\ s(0) = 0\ ,$$

$$(6)\ k\ \theta_x(0,t) = -h_0/t^{1/2}\ ,\ t > 0\ ,$$

donde x es la variable espacial, t es el tiempo, s(t) es la posición de la interfase sólido-líquido, ρ es la densidad de masa, c es el calor específico a presión constante, L es el calor latente de fusión por unidad de masa, k es la conductividad térmica y h_0 es el coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo x = 0. Por otra parte, (1) representa la ecuación del calor para la fase líquida, (2) es la condición de la temperatura en el borde fijo x=0, (3) y (4) son las condiciones que caracterizan la frontera de separación de fases, (5) es la condición inicial para *s(t)* y (6) es la sobrecondición del flujo de calor en el borde fijo x = 0.

PERFIL TERMICO

En este trabajo se consideran tres métodos aproximados para solucionar el problema de cambio de fase:

(A) **Solución Exacta** (Lamé - Clapeyron [7]): El problema (1)-(5) tiene solución exacta dada por:

$$\theta(x,t) = \theta_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\mu x/s(t)\right)/\operatorname{erf}(\mu) \right],$$

$$s(t) = 2\ \mu\ \sqrt{\alpha t}\ ,\ \alpha = k/\rho c$$

donde el parámetro $\mu>0$ es a determinar.

(B) **Modelos Aproximados**: El perfil térmico utilizado es el dado por

$$\theta(x,t) = \theta_0 \left(\lambda \left(1-\frac{x}{s(t)}\right)^2 + (1-\lambda)\left(1-\frac{x}{s(t)}\right) \right)$$

tanto para el Método del Balance Integral Calórico como para el Método Variacional de Biot, donde el parámetro $0 < \lambda < 1$ es a determinar. En cambio, para el Método Cuasi-estacionario el perfil térmico viene dado por

$$\theta(x,t) = \theta_0 \left(1 - \frac{x}{s(t)} \right).$$

DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES TERMICOS

De los ocho casos descriptos anteriormente, sólo se presentarán los resultados correspondientes al caso (ii-4) de la determinación de los coeficientes L y σ.

(A) **Solución exacta**: Si los datos del problema verifican la condición

$$\frac{\theta_0}{h_0}\sqrt{\frac{k\ \rho\ c}{\pi}} < 1$$

entonces se obtiene

$$\sigma = \varepsilon \sqrt{\frac{k}{\rho\ c}}\ ,$$

$$L = h_0 \sqrt{\frac{c}{\rho\ k}}\ \frac{\exp(-\varepsilon^2)}{\varepsilon}$$

donde $\varepsilon > 0$ es la única solución de la siguiente ecuación:

$$\operatorname{erf}(\varepsilon) = \frac{\theta_0}{h_0}\sqrt{\frac{k\ \rho\ c}{\pi}}$$

(B) **Método del Balance Integral Calórico**: Si los datos del problema verifican la condición

$$\frac{\rho c k \theta_0^2}{3\ h_0^2} < 1$$

entonces se obtiene

$$\sigma = 2 \sqrt{\frac{k}{\rho c}} \sqrt{\frac{3\ \lambda\ (1 + \lambda)}{2\lambda^2 - 3\lambda + 3}}\ ,$$

$$L = \frac{c\ \theta_0}{2}\ \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$$

donde $0 < \lambda < 1$ es la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)\ (2\lambda^2 - 3\lambda + 3)} = \frac{\rho c k \theta_0^2}{12\ h_0^2}\ .$$

(C) **Método Variacional de Biot**: Si los datos del problema verifican la condición

$$\frac{26\ \rho c k \theta_0^2}{147\ h_0^2} < 1$$

entonces se obtiene

$$\sigma = \frac{k\theta_0}{h_0}(1+\lambda)\ ,$$

$$L = \frac{c\theta_0}{2}\ \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$$

donde $0 < \lambda < 1$ es la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{\lambda\ W(\lambda)}{(1+\lambda)^2} = \frac{\rho c k \theta_0^2}{42\ h_0^2}$$

donde

$$W(\lambda) = \frac{30 - 40\ \lambda + 25\ \lambda^2 - \lambda^3}{315-840\ \lambda+1008\ \lambda^2-574\ \lambda^3+143\ \lambda^4}\ .$$

(D) **Método Cuasi-estacionario**: Se obtiene como solución:

$$\sigma = \frac{k\theta_0}{h_0},\quad L = \frac{2h_0^2}{k\rho\theta_0}$$

En la Figura 1 se puede apreciar el comportamiento del coeficiente incógnita L en función del parámetro h_0 para los cuatro diferentes métodos.

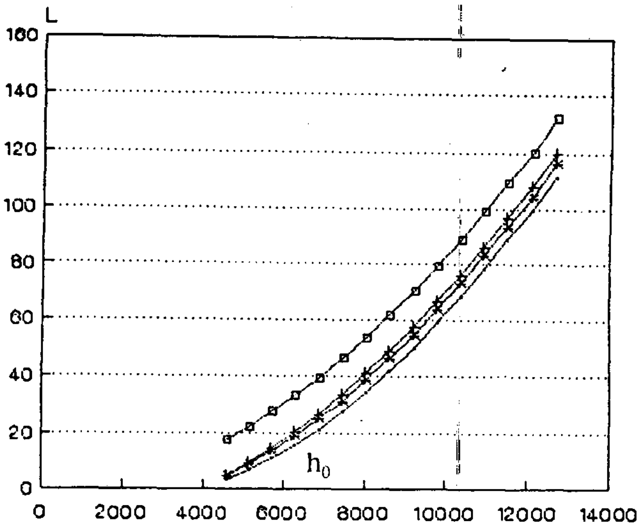

Figura 1: Calor de fusión L vs h_0, Serie A - : M. Biot; Serie B + : Solución exacta; Serie C* : M. Biot; Serie D□ : cuasi-estacionaria.

REFERENCIAS

1. Lunardini V.J., "*Heat transfer in cold climates*", Van Noustrand Reinhold Company, New York (1981).
2. Goodman, T.R., Trans. of the ASME, 80 (1958), 335-342.
3. Biot, M., "*Variational principle in heat transfer*", Clarendon Press, Oxford (1970).
4. Garguichevich, G.G., Sanziel,M.C., Tarzia, D. A., Int. Comm. Heat Mass Transfer, 10 (1983), 349-355.
5. Tarzia D.A.,Advances in Applied Math., 3 (1982),74-82.
6. Tarzia D.A., Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151-1157.
7. Carslaw H.S., Jaeger C.J., "*Conduction of heat in solids*", Clarendon Press, Oxford (1959).