Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 8

2021

Trabajos presentados al VIII MACI 2021

Proceedings of VIII MACI 2021

La Plata, 3 al 7 de mayo de 2021

ASOCIACION ARGENTINA DE MATEMATICA APLICADA
COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

SOBRE LAS SOLUCIONES DE UNA FAMILIA DE PROBLEMAS DE VALORES INICIALES Y DE CONTORNO DE TIPO ROBIN PARA LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA EN EL TIEMPO

Isolda Cardoso[a], Sabrina Roscani[b,c] y Domingo Tarzia[b,c]

[a]*Depto. Matemática, ECEN, FCEIA, UNR, Pellegrini 250, Rosario, Argentina*
[b] *Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina*
[c] *CONICET, Argentina*

Resumen: Se considera una familia de problemas de valores iniciales y de contorno para la ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo cuyo parámetro es el coeficiente de transmisión de calor β que aparece al considerar en la frontera una condición de Robin o de tipo convectiva. Para cada β fijo, se resuelve el problema utilizando series de Fourier y finalmente se hace tender β a infinito obteniendo como límite una función que es solución al problema de Dirichlet correspondiente al problema de Robin considerado inicialmente.

Palabras clave: *ecuación de difusión fraccionaria, condición de Robin, método de Fourier*
2000 AMS Subject Classification: 26A33 - 35G10 - 35C10 - 35B30

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo es una ecuación que se utiliza para describir procesos de difusión anómala, como se puede ver en el detallado trabajo realizado por Metzler y Klafter en [6], o por Klafter y Sokolov en [4], cuya principal característica es que la derivada temporal ha sido reemplazada por una derivada fraccionaria de Caputo en el tiempo. Esto es, una ecuación de evolución del siguiente tipo

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} u(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t), \qquad (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera suficientemente regular y

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Para un estudio detallado sobre derivadas fraccionarias se recomienda [3] mientras que un análisis detallado sobre la ecuación de difusión fraccionaria y sus aplicaciones se puede hallar en [7] y [8].
El siguiente problema de valores iniciales y de contorno para la EDF de tipo Dirichlet, que será referenciado de ahora en más como D-IBVP, fue considerado por Sakamoto y Yamamoto en [9]

$$\begin{array}{rll} (i) & {}_0^C D_t^{\alpha} u(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \in \Omega,\ 0<t<T, \\ (ii) & u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ (iii) & u(\boldsymbol{x},t) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,\ 0<t<T. \end{array} \tag{3}$$

En dicho trabajo, los autores prueban, entre otras cosas, existencia y unicidad de soluciones a través del método de Fourier de representación en series, obteniendo el resultado que enunciamos a continuación.

Teorema 1 *Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única solución débil $u_D \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ del problema D-IBVP* (3) *dada por*

$$ u_D(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \varphi_n) E_{\alpha,1}(-\lambda_n^D t^{\alpha}) \varphi_n(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

donde (λ_n^D, φ_n) son los autovalores y autofunciones, respectivamente, del problema de Sturm-Liouville

$$ \varphi_n(\cdot) \in H_0^1(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega) \tag{5}$$

$$ \Delta \varphi_n(\boldsymbol{x}) + \lambda_n^D \varphi_n(\boldsymbol{x}) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6}$$

Más aún, ${}_0^C D_t^\alpha u_D \in C((0,T]; L^2(\Omega))$ *y existe una constante positiva* $C > 0$ *tal que*

$$||u_D||_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq C||u_0||_{L^2(\Omega)}. \tag{7}$$

En este trabajo se considerará el siguiente problema de valores iniciales y de contorno, que llamaremos β-IBVP:

$$\begin{array}{lll} (i) & {}_0^C D_t^\alpha u(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ (ii) & u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ (iii) & \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x},t) + \beta u(\boldsymbol{x},t) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,\ 0 < t < T, \end{array} \tag{8}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota la derivada en la dirección normal exterior, β es el coeficiente de Newton de transferencia de calor y el resto de las constantes físicas involucradas han sido establecidas con valor constante igual a 1 con el fin de simplificar. Este problema ha sido estudiado en [2] utilizando el método de potenciales con integrales de Poisson.

2. SOLUCIONES Y CONVERGENCIA

Siguiendo el enfoque realizado en [5] y [9], se busca una solución u al problema (8) a variables separables

$$u(\boldsymbol{x},t) = \psi(\boldsymbol{x})\eta(t), \tag{9}$$

lo que conlleva a los dos problemas siguientes, relativos a la variable espacial y temporal respectivamente.

$$\begin{array}{lll} (i) & \Delta\psi(\boldsymbol{x}) + \lambda\psi(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ (ii) & \frac{\partial \psi}{\partial n}(\boldsymbol{x}) + \beta\psi(\boldsymbol{x}) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega; \end{array} \tag{10}$$

y

$$\begin{array}{lll} (i) & {}_0^C D_t^\alpha \eta(t) = \lambda\eta(t), & t \in (0,T), \\ (ii) & \eta(0) = 1. & \end{array} \tag{11}$$

Para abordar el problema (10) se utiliza el siguiente resultado

Teorema 2 *Para todo* $\beta > 0$*, existe una base de funciones* $\{\psi_n(\beta,\cdot)\}_{n\geq 1}$ *de* $L^2(\Omega)$ *y una sucesión de valores reales positivos* $\{\lambda_n(\beta)\}_{n\geq 1}$*,* $0 < \lambda_1(\beta) < \lambda_2(\beta) \leq \ldots$ *ordenados según su multiplicidad, con* $\lambda_n(\beta) \to \infty$ *tales que*

(i) $\psi_n(\beta,\cdot) \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$*,*

(ii) $\Delta\psi_n(\beta,\boldsymbol{x}) + \lambda_n(\beta)\psi_n(\beta,\boldsymbol{x}) = 0$*,* $\boldsymbol{x} \in \Omega$*, y*

(iii) $\frac{\partial}{\partial n}\psi_n(\beta,\boldsymbol{x}) + \beta\psi_n(\beta,\boldsymbol{x}) = 0$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$*.*

Los $\lambda_n(\beta)$*'s son los autovalores del operador* $-\Delta$ *con condición de borde de tipo Robin de parámetro* β*, y las* $\psi_n(\beta,\cdot)$*'s son las autofunciones correspondientes.*

Y respecto del problema (11), su solución es conocida y está dada en términos de la función de Mittag-Leffler

$$\eta(t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^k)}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

que, entre otras propiedades, verifica las dos siguientes que se utilizan para probar los diversos tipos de convergencia de las series relativas a las soluciones:

(i) $E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$,

(ii) existe una constante positiva $C > 0$ tal que $E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) \leq \frac{C}{1+\lambda t^\alpha}$ para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Es natural entonces, proponer como solución débil del problema (8) a la función $u_\beta : [0,T] \to L^2(\Omega)$ definida por

$$u_\beta(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \psi_n(\beta;\cdot)) E_{\alpha,1}(-\lambda_n(\beta)t^\alpha)\psi_n(\beta;\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

donde los $(\psi_n(\beta), \lambda_n(\beta))$ son los dados en el Teorema 2 y se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3 *Sea* $\beta > 0$. *Si* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *entonces existe una solución débil* u_β *al problema* β*-IBVP* (8) *tal que* $u_\beta \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T]; H^1(\Omega))$ *y* ${}_0^C D_t^\alpha u_\beta \in C((0,T]; L^2(\Omega))$. *Más aún,* u_β *está dada por la serie* (12) *y existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$||u_\beta||_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq ||u_0||_{L^2(\Omega)}. \tag{13}$$

Ahora bien, para estudiar la convergencia de estas soluciones a la solución del problema de Dirichlet se cuenta con el siguiente resultado respecto de los autovalores de los problemas de Sturm-Liouville para condiciones de Robin y Dirichlet, demostrado recientemente por Filinovsky en [1] y que se enuncia a continuación para beneficio del lector.

Lema 1 *Sean* $k \in \mathbb{N}$ *y* $\beta > 0$. *Los autovalores del problema de Sturm-Liouville para condición de Dirichlet* (5)-(6) *y los autovalres del problema de Robin dados en el Teorema 2, enumerados según su multiplicidad, verifican que*

$$0 \leq \lambda_k^D - \lambda_k(\beta) \leq C_1 \beta^{-\frac{1}{2}} (\lambda_k^D)^2, \tag{14}$$

donde la constante C_1 *no depende de* k.

Claramente la desigualdad (14) permite deducir que

$$\lim_{\beta\to\infty} \lambda_k(\beta) = \lambda_k^D, \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \beta > 0. \tag{15}$$

Con el resultado precedente, se puede probar, via métodos variacionales que las autofunciones asociadas a ambos tipos de problemas convergen débilmente en $H^1(\Omega)$ y se enuncia en el siguiente lema.

Lema 2 *Sean* $\{\varphi_k\}_k$ *y* $\left\{\lambda_k^D\right\}_k$ *los autovalores y autofunciones del problema de Sturm-Liuville de tipo Dirichlet* (5)-(6) *tales que* $\lambda_1^D < \lambda_2^D \leq \ldots \to \infty$*, y sean* $\{\psi_k(\beta)\}_k$ *y* $\{\lambda_k(\beta)\}_k$ *los autovalores y autofunciones del problema de Robin dados por el Teorema* (2)*, donde* $\lambda_1(\beta) < \lambda_2(\beta) \leq \ldots \to \infty$. *Entonces, para todo* $k = 1, 2, \ldots$ *se tiene que*

$$\psi_k(\beta) \rightharpoonup \varphi_k \quad \textit{débil en } H^1(\Omega), \quad \beta \to \infty. \tag{16}$$

Prueba. Considerando las siguientes formas bilineales

$$\begin{array}{rll} a\colon & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ & (u,v) & \to a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x \end{array} \tag{17}$$

y

$$\begin{array}{rll} a_\beta\colon & H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ & (u,v) & \to a_\beta(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \beta \int\limits_{\partial\Omega} uv \mathrm{d}\gamma \end{array} \tag{18}$$

se puede afirmar que, para cada k fijo, φ_k y $\psi_k(\beta)$ son soluciones de los siguientes problemas respectivamente: *i) Hallar la función* $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(\varphi_k, v) = \lambda_k^D(\varphi_k, v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{19}$$

ii) Hallar la función $\psi_k(\beta) \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a_\beta(\psi_k(\beta), v) = \lambda_k(\beta)(\psi_k(\beta), v) \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega). \tag{20}$$

Se prueba luego que la familia $\{\psi_k(\beta)\}_\beta$ es acotada en $H^1(\Omega)$, por lo cual existe una función $\xi \in H^1(\Omega)$ tal que $\psi_k(\beta) \rightharpoonup \xi$ débil en $H^1(\Omega)$ cuando $\beta \to \infty$. Más aún, utilizando la técnica de [10] se puede ver que

$$(\beta - 1) \int_{\partial\Omega} \psi_k(\beta)^2 \mathrm{d}\gamma \leq C,$$

y de aquí se deduce que $\xi \in H^1_0(\Omega)$. Finalmente, se prueba que ξ es solución del problema (19) y por unicidad resulta que $\xi = \phi_k$, como se quería demostrar. □

Con los lemas precedentes y el Teorema 3 se tiene el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 4 *La familia de soluciones $\{u_\beta\}$ de los problemas β-IBVP* (8)*, converge a la solución u_D del problema D-IBVP* (3) *en $L^2(\Omega)$ para cada $t \in (0, T)$ cuando $\beta \to \infty$.*

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido patrocinado por los Proyectos PIP N° 0275 de CONICET–Universidad Austral, ANPCyT PICTO Austral 2016 N°0090, European Unions Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Sklodowska-Curie Grant Agreement N° 823731 CONMECH y SECyT-UNR (proyecto vigente con resolución en trámite).

REFERENCIAS

[1] A. FILINOVSKIY. *On the eigenvalues of a robin problem with a large parameter.* Mathematica Bohemica, 139 No. 2 (2014), pp. 341–352.

[2] J. KEMPPAINEN. *Existence and uniqueness of the solution for a time-fractional diffusion equation with Robin boundary condition.* Abstract and Applied Analysis, (2011) ID 321903):11.

[3] A. KILBAS, H. SRIVASTAVA, AND J. TRUJILLO. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, 2006.

[4] J. KLAFTER AND I. SOKOLOV. *Anomalous diffusion spreads its wings.* Physics Word, 18 No. 8 (2005), pp.29-32.

[5] Y. LUCHKO. *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary–value problems for the generalized time–fractional diffusion equation.* Computer and Mathematics with Applications, 59 (2010), pp.1766–1772.

[6] R. METZLER AND J. KLAFTER. *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach.* Physics reports, 339 (2000), pp.1–77.

[7] Y. POVSTENKO. *Fractional heat conduction in a semi-infinite composite body*. Communications in Applied and Industrial Mathematics, 6 No. 1 (2014), e-482.

[8] A. V. PSKHU. *Solution of boundary value problems for the fractional diffusion equation by the green function method.* Differential Equations, 39 No. 10 (2003), pp. 1509–1513.

[9] K. SAKAMOTO AND M. YAMAMOTO. *Initial value/boundary value problems for fractional diffusion–wave equations and applications to some inverse problems.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 382 (2011), pp. 426–447.

[10] D. A. TARZIA *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases.* Mathematicae Notae, 27 (1979), pp. 157–165.